Критерій Коші збіжності послідовності.

Теорема. ○

Для того щоб послідовність (y_n) була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що $|y_m - y_n| < \varepsilon$ для всіх $m > n_0(\varepsilon)$ і $n > n_0(\varepsilon)$. ●

Доведення. ►

Доведемо необхідність. Нехай $y_n \to A$ при $n \to +\infty$. Задамо $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Тоді за означенням границі послідовності знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність: $|y_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Якщо $m, n > n_0(\varepsilon)$, то

$$|y_m - y_n| = |y_m - A + A - y_n| \le |y_m - A| + |A - y_n| = |y_m - A| + |y_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Отже $|y_m - y_n| < \varepsilon$. Необхідність доведена.

Припустимо тепер, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $m > n_0(\varepsilon)$ і $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|y_m - y_n| < \varepsilon$. Покажемо, що тоді послідовність (y_n) збіжна.

Покладемо $\varepsilon = 1$, тоді для всіх $m, n > n_0(1)$ маємо $|y_m - y_n| < 1$. Зафіксуємо $m = m_0 > n_0(1)$. З властивостей модуля отримаємо

$$|y_n| - |y_{m_0}| \le |y_n - y_{m_0}| = |y_{m_0} - y_n| < 1 .$$

Звідси $|y_n| < 1 + |y_{m_0}|$. Візьмемо C найбільше з чисел $|y_1|$, $|y_2|$, …, $|y_{n_0}|$, $1 + |y_{m_0}|$, тоді $|y_n| \le C$ для всіх $n = 1,2,...$. Це означає, що послідовність (y_n) обмежена. З обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність (y_{n_k}) (за теоремою Больцано-Вейєрштрасса). Нехай $\lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = A$.

Покажемо, що послідовність (y_n) має ту саму границю A.

Задамо $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ і виберемо $n_0(\varepsilon)$ такий, що $|y_n - y_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n_k, n > n_0(\varepsilon)$.

Перейдемо в цій нерівності до границі при $k \to \infty$. Отримаємо

$$\lim_{k \to \infty} \left| y_n - y_{n_k} \right| = \left| \lim_{k \to \infty} \left(y_n - y_{n_k} \right) \right| = \left| y_n - A \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{, для всіх } n > n_0(\varepsilon) .$$

А це й означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$.

Теорема доведена повністю. ◄