Неперервність функції

Поняття неперервної функції.

Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

На мові «ε - δ» це означення запишеться так.

Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Або коротко:

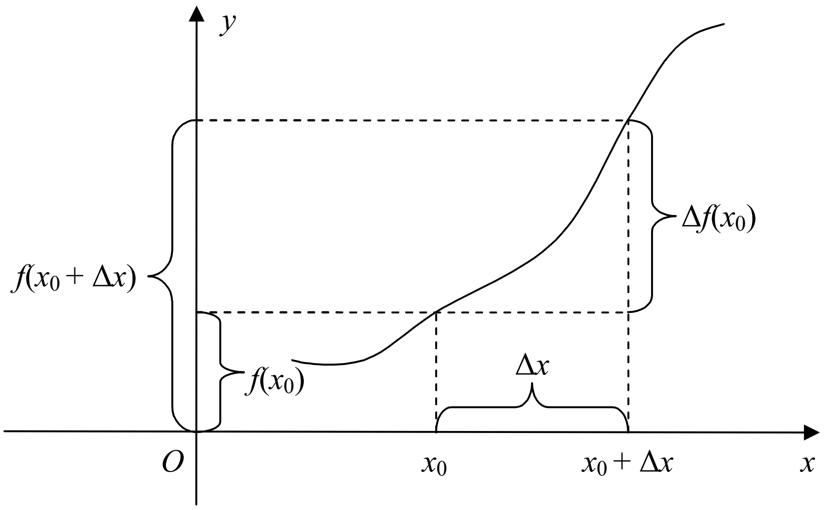
$f(x)$ неперервна в x_0 $\equiv \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in S(x_0, \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Сформулюємо означення неперервності на мові приростів.

Приростом аргументу x в точці x_0 називають різницю $\Delta x = x - x_0$.

Приростом функції $f(x)$ в точці x_0 називають різницю

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



Теорема 1. ○

Для того щоб функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб нескінченно малим приростам аргументу відповідали нескінченно малі прирости функції, тобто щоб

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0. \bullet$$

Теорема 2. ○

Для того щоб функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності точок (x_n), взятих з цього околу, яка збігається до точки x_0, відповідна послідовність значень функції $\left(f(x_n)\right)$ збігалась до $f(x_0)$. ●

Теорема 3. ○

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні функції:

$$f(x) + \varphi(x),\ f(x) - \varphi(x),\ f(x)\cdot\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}\ \ (\varphi(x_0) \neq 0).\bullet$$

Функція називається неперервною в інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Теорема 4. ○

Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна в точці a і функція $f(y)$ неперервна в точці $b = \varphi(a)$, то складена функція $F(x) = f(\varphi(x))$ неперервна в точці a. ●

Теорема 5. ○
Всі елементарні функції неперервні у своїй області визначення. ●
Наприклад:

Розглянемо функцію $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

При $x\neq 0$ функція визначається формулою $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, при цьому маємо

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(перша визначна границя). Це значення співпадає з тим, що задано при $x=0$: $f(0)=1$.

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$, що означає неперервність функції $f(x)$ при $x_0=0$.

Одностороння неперервність.

Функція $f(x)$, визначена в деякому проміжку $[x_0;x_0+h)$, $h>0$, називається <u>неперервною в точці</u> x_0 <u>справа</u>, якщо існує границя функції $f(x)$ в точці x_0 справа і ця границя дорівнює $f(x_0)$, тобто, якщо

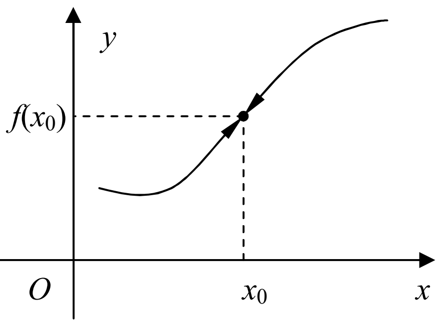
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Функція $f(x)$, визначена в деякому проміжку $(x_0-h;x_0]$, $h>0$, називається <u>неперервною в точці</u> x_0 <u>зліва</u>, якщо існує границя функції $f(x)$ в точці x_0 зліва і ця границя дорівнює $f(x_0)$, тобто, якщо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).$$

Теорема 6. ○

Для неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ була в точці x_0 неперервна зліва і справа, тобто щоб виконувалися наступні умови



1) функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0;
2) існує границя функції зліва $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-)$;
3) існує границя функції справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+)$;
4) ці дві границі співпадають між собою та із значенням функції в точці x_0:

$$f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0).$$ ●

Точка x_0, в якій функція $f(x)$ неперервна, називається <u>точкою неперервності</u> функції $f(x)$.

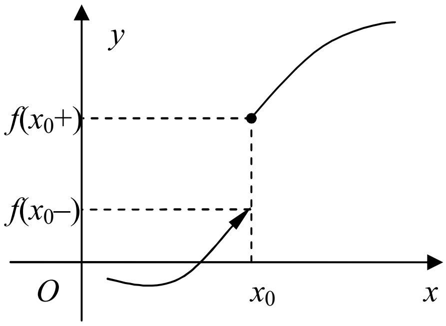
Точки розриву.

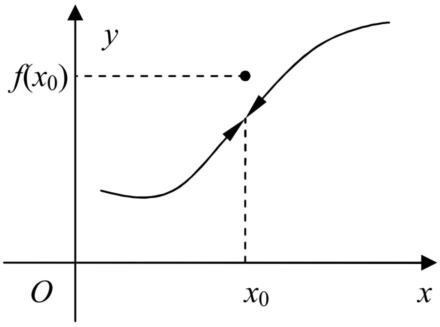
Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0, можливо за виключенням самої точки x_0. Якщо функція $f(x)$ не являється неперервною в точці x_0, то вона називається <u>розривною</u> в цій точці, а точка x_0 називається <u>точкою розриву</u> функції $f(x)$.

Точка x_0 розриву функції $f(x)$ називається <u>точкою розриву першого роду</u>, якщо в цій точці існує права і ліва границі цієї функції.

Якщо при цьому границя зліва дорівнює границі справа, то x_0 називають <u>точкою усувного розриву</u>.

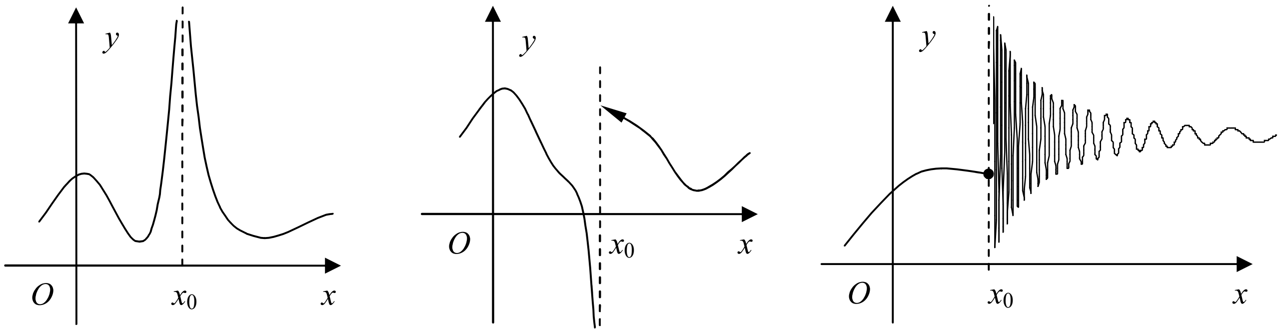
Точка x_0 розриву функції $f(x)$ називається <u>точкою розриву другого роду</u>, якщо в цій точці не існує (або нескінченна) хоча би одна з односторонніх границь.





Розрив першого роду.

Усувний розрив.



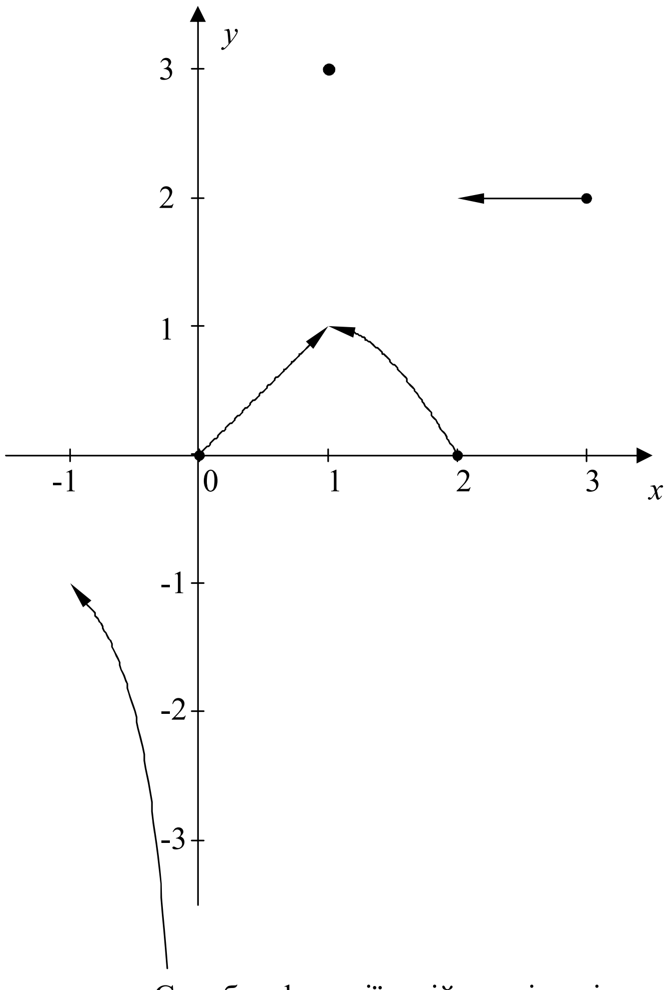
Розриви другого роду.

Якщо x_0 – точка розриву першого роду функції $f(x)$, то різниця між границею функції справа і зліва $f(x_0+)-f(x_0-)$ називається стрибком функції в цій точці. В точках усувного розриву стрибок функції дорівнює нулю.

Наприклад:

П1. Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 3, & x=1,\\ \sin\dfrac{\pi}{2}x, & 1<x\le 2,\\ 2, & 2<x\le 3.\end{cases}$$



Точка $x_0=0$ є точкою розриву другого роду, оскільки границя зліва в цій точці $f(0-)=-\infty$.

Точка $x_1=1$ та $x_2=2$ є точками розриву першого роду, оскільки в цих точках існують скінченні односторонні границі.

Оскільки $f(1-)=f(1+)=1$, то точка $x_1=1$ є точкою усувного розриву. Розрив у цій точці викликаний тим, що

$$f(1-)=f(1+)=1\ne f(1)=3.$$

Стрибок функції в цій точці дорівнює 0.

В точці $x_2=2$ ліва і права границі не співпадають: $f(2-)=0\ne f(2+)=2$.

Тому точкою усувного розриву x_2 не являється. Стрибок функції в цій точці дорівнює

$$f(2+)-f(2-)=2-0=2.$$

Властивості функцій неперервних на відрізку.

Функція називається <u>неперервною на відрізку</u> $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$ та неперервна справа в точці $x=a$ і неперервна зліва в точці $x=b$.

Теорема 7. (Вейєрштрасса) ○

Неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку. ●

Теорема 8. (Вейєрштрасса) ○

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше значення. ●

Лема 1. ○

Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 справа (зліва) і $f(x_0)\neq 0$, то знайдеться число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in[x_0;x_0+\delta)$ $(x\in(x_0-\delta;x_0])$ значення функції $f(x)$ за знаком будуть такими як $f(x_0)$. ●

Доведення. ►

Нехай $f(x_0)>0$ і $f(x)$ неперервна справа в точці x_0. Виберемо $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}>0$, тоді в силу неперервності знайдеться таке $\delta>0$, що для всіх $x\in[x_0;x_0+\delta)$ виконуватиметься нерівність

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2} \text{ або } -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon,$$

тоді з лівої частини нерівностей маємо

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon=f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

Інші випадки доводяться аналогічно. ◄

Наслідок. ○

Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f(x_0)\neq 0$, то знайдеться окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0, для всіх точок якого значення функції $f(x)$ за знаком будуть такими ж як $f(x_0)$.

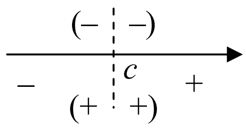
Теорема 9. (Больцано-Коші) ○

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і якщо значення цієї функції на кінцях цього відрізка протилежні за знаком, то існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$, значення функції в якій дорівнює нулю: $f(c)=0$. ●

Доведення. ►

Нехай $f(a)<0$, а $f(b)>0$. Оскільки $f(x)$ неперервна в точці $x=a$ справа, а в точці $x=b$ зліва, то за лемою $\exists\delta>0$ $\forall x\in[a;a+\delta)$: $f(x)<0$ і $\forall x\in(b-\delta;b]$: $f(x)>0$.

Звідси множина D точок x, для яких $f(x)<0$ непорожня. Крім того вона обмежена, оскільки є підмножиною відрізка $[a;b]$, отже має точну верхню грань $\sup D=c$. Ясно, що $a+\delta\leq c\leq b-\delta$, тому $c\in(a;b)$.



Покажемо, що $f(c)=0$. Припустимо, що $f(c)\neq 0$, тоді знайдеться окіл $(c-\delta_1;c+\delta_1)$, в усіх точках якого знак $f(x)$ буде такий же як $f(c)$, що суперечить властивостям точної верхньої грані.

Отже $f(c)=0$. Інші випадки доводяться аналогічно. ◄

Теорема 10. (Больцано-Коші) ○

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $f(a)\neq f(b)$, то для будь-якого числа A, що знаходиться між числами $f(a)$ і $f(b)$, існує точка $c\in(a;b)$ така, що $f(c)=A$.●

Доведення. ►

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x)=f(x)-A$. Функція $\varphi(x)$ неперервна як різниця неперервних функцій. Значення $\varphi(x)$ на кінцях відрізка $[a;b]$ протилежні за знаком.

Дійсно, якщо $f(a) < A < f(b)$, то $\varphi(a) = f(a) - A < 0$, $\varphi(b) = f(b) - A > 0$.

Якщо $f(b) < A < f(a)$, то $\varphi(a) = f(a) - A > 0$, $\varphi(b) = f(b) - A < 0$.

Тоді за теоремою 9 існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що $\varphi(c) = 0$, тобто $f(c) - A = 0$, звідси $f(c) = A$. ◄

Наслідок. ○

Множина всіх значень відмінної від сталої функції $f(x)$ неперервної на відрізку $[a;b]$ складає деякий відрізок. ●

Метод половинного ділення розв'язування рівнянь.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка набуває значення різних знаків (задовольняє умови теореми 9). Причому відомо, що в інтервалі $(a;b)$ існує єдиний корінь рівняння

$$f(x) = 0.$$

Поставимо задачу відшукання кореня c даного рівняння з заданою точністю ε.

Позначмо на початку: $n = 0$ (крок ітерації), $a_n = a_0 = a$, $b_n = b_0 = b$, $c_n = c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Тоді можливі наступні випадки:

1. $f(c_n) = 0$, тоді $c = c_n$ – корінь рівняння. Розв'язування завершене.

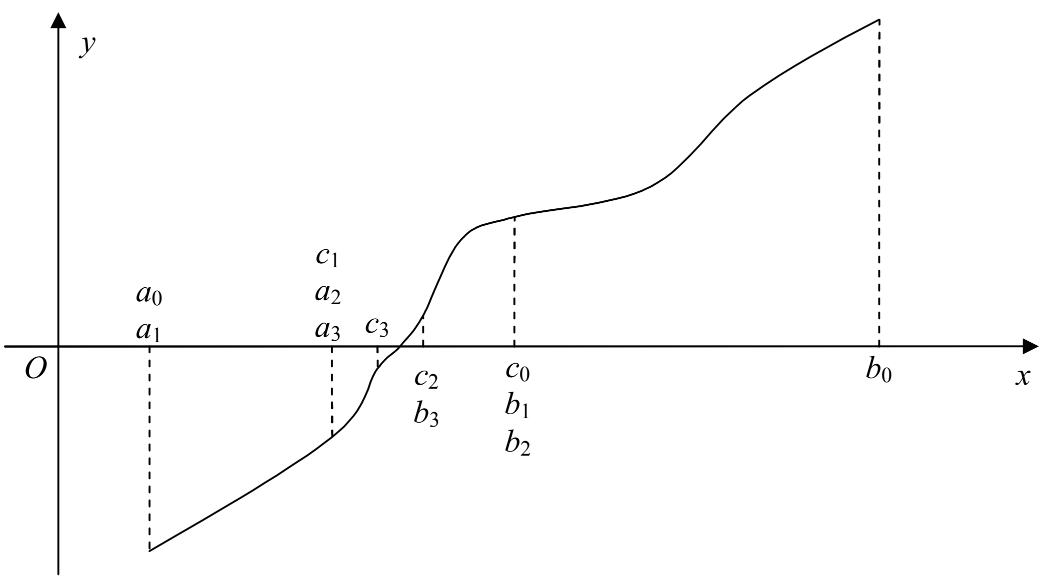
2. $f(a_n)$ і $f(c_n)$ різних знаків. Тоді $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

3. $f(b_n)$ і $f(c_n)$ різних знаків. Тоді $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$, $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

Якщо при цьому $b_{n+1} - a_{n-1} < \varepsilon$, то процедура припиняється і наближене значення кореня приймають рівним $c = c_{n+1}$. Якщо потрібна точність не досягнута, то цикл повторюють при новому значенні кроку n рівному $n+1$.

Послідовність точок (a_n) монотонно зростає і обмежена зверху, тому збігається.

Аналогічно, послідовність (b_n) монотонно спадає і обмежена знизу, тому також збігається. Отже даний ітеративний процес завжди збіжний.



Обернена функція.

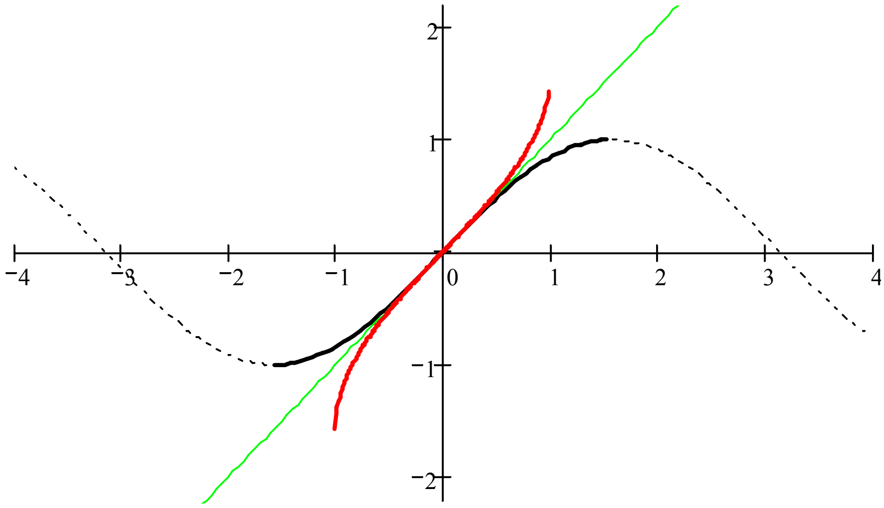
Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X. Позначимо Y множину всіх значень цієї функції, яких вона набуває на множині X. Припустимо також, що кожним двом різним точкам $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) функція $y = f(x)$ ставить у відповідність дві різні точки $y_1 = f(x_1)$ і $y_2 = f(x_2)$ ($y_1 \neq y_2$) множини Y. Тоді для довільної точки $y_0 \in Y$ існує єдине число $x_0 \in X$ таке, що $f(x_0) = y_0$. Це означає, що на множині Y визначена функція $x = \varphi(y)$. Ця функція $x = \varphi(y)$ називається оберненою функцією до функції $y = f(x)$ і позначається $x = f^{-1}(y)$.

Теорема 11. ○

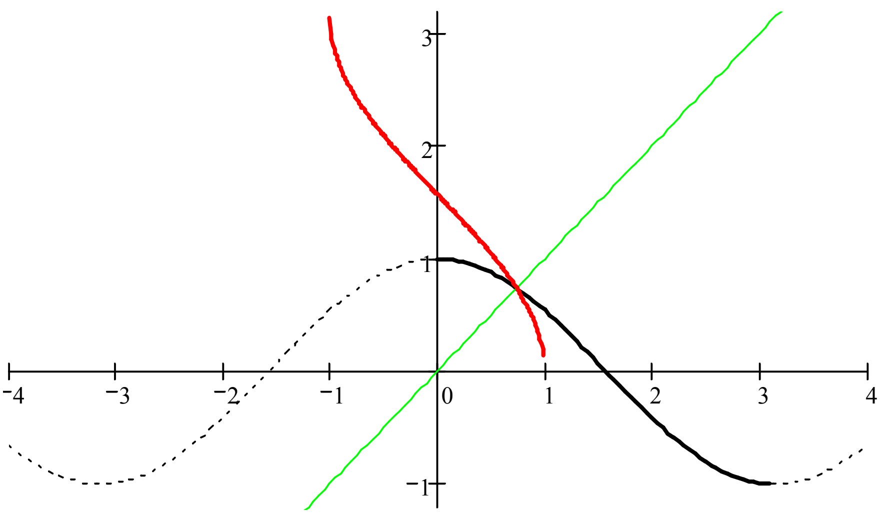
Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, зростає (спадає) і неперервна на цьому відрізку. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ існує, визначена, зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[f(a); f(b)]$ ($[f(b); f(a)]$). ●

Графік оберненої функції $f^{-1}(x)$ симетричний до графіка функції $f(x)$ відносно прямої $y = x$.

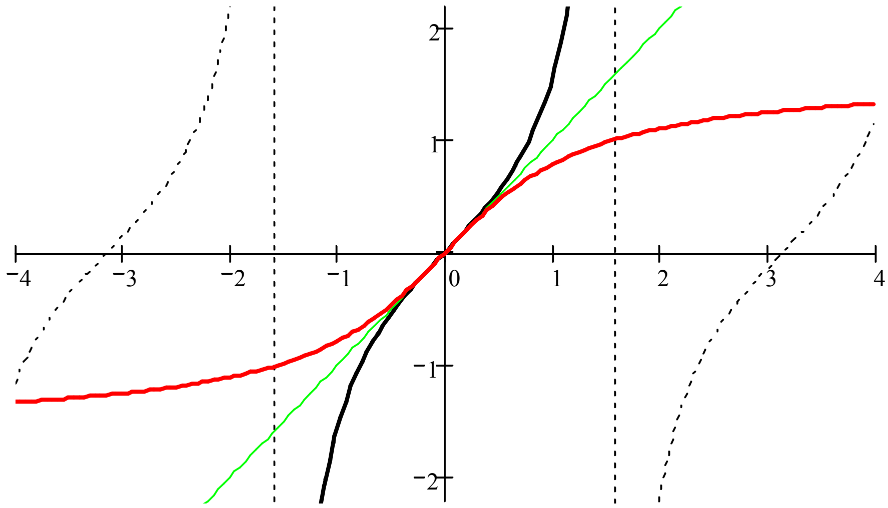
Наприклад:



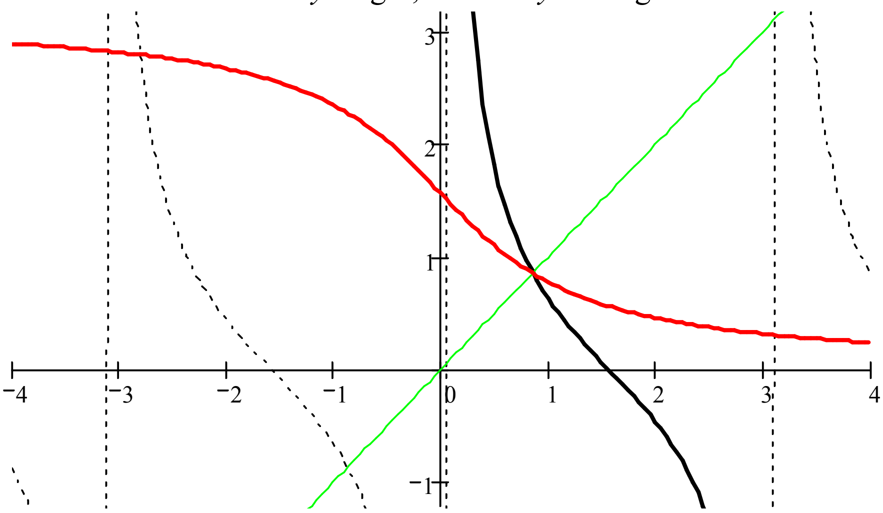
$y = \sin x$, $y = \arcsin x$.



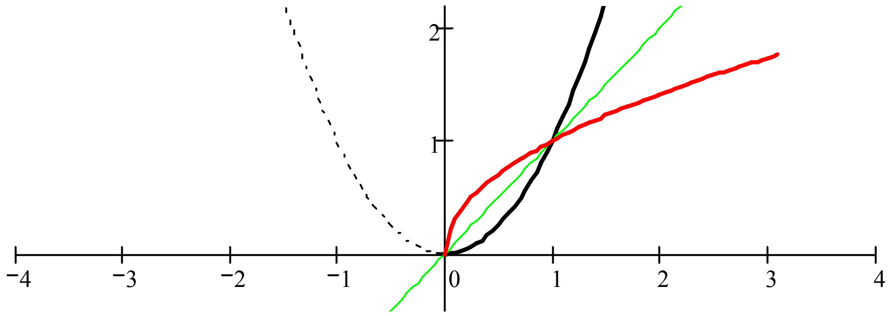
$y = \cos x$, $y = \arccos x$.



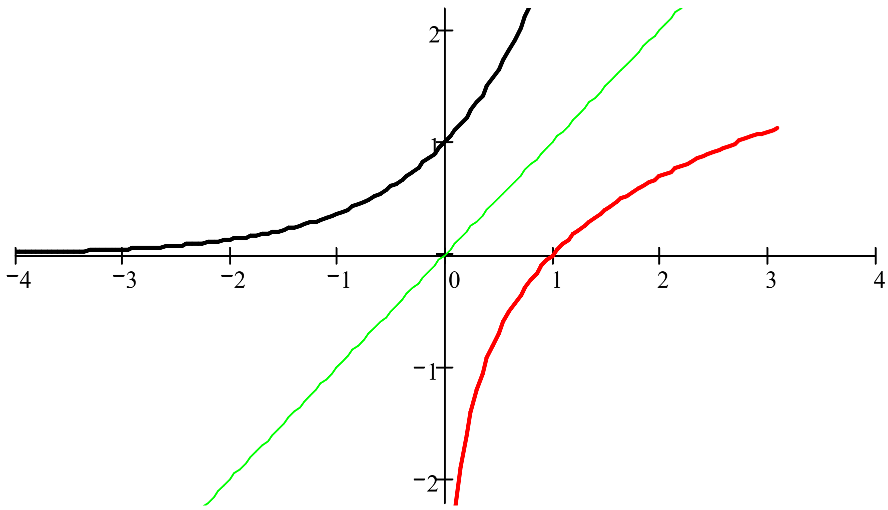
$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$.



$y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.



$y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.



$y = e^x$, $y = \ln x$.