Друга визначна границя

Теорема. ○

Правильна рівність

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ . \ \bullet$$

Доведення. ►

Нехай $x\to+\infty$. Тоді знайдеться таке натуральне n, що $n\le x<n+1$ і $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}$.

Тоді

$$\Bigg(1+\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\substack{\wedge\\ \frac{1}{x}}}\Bigg)^{\overbrace{n}^{\substack{x\\ \vee\!/}}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \Bigg(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\vee\!/\\ \frac{1}{x}}}\Bigg)^{\overbrace{n+1}^{\substack{x\\ \wedge}}}.$$

Перепишемо ці нерівності у вигляді

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Перейдемо в цих нерівностях до границі (зауважимо, що $n\to+\infty$, коли $x\to+\infty$), отримаємо

$$\frac{e}{1+0}\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e\cdot(1+0)\text{, тобто } e\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Нехай тепер $x\to-\infty$. Введемо заміну $x=-1-x'$. Тоді $x'=-1-x$ і $x'\to+\infty$, коли $x\to-\infty$. Виконаємо перетворення

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{-1-x'}\right)^{-1-x'}=\left(\frac{-1-x'+1}{-1-x'}\right)^{-1-x'}=\left(\frac{-x'}{-1-x'}\right)^{-1-x'}=\left(\frac{x'}{1+x'}\right)^{-x'}\left(\frac{x'}{1+x'}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1+x'}{x'}\right)^{x'}\left(\frac{1+x'}{x'}\right)=\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}\left(1+\frac{1}{x'}\right)\to e,\quad x'\to+\infty.$$

Тим самим доведено, що $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Теорему доведено повністю. ◄

Зробивши заміну $x=\dfrac{1}{y}$ отримаємо інший запис теореми

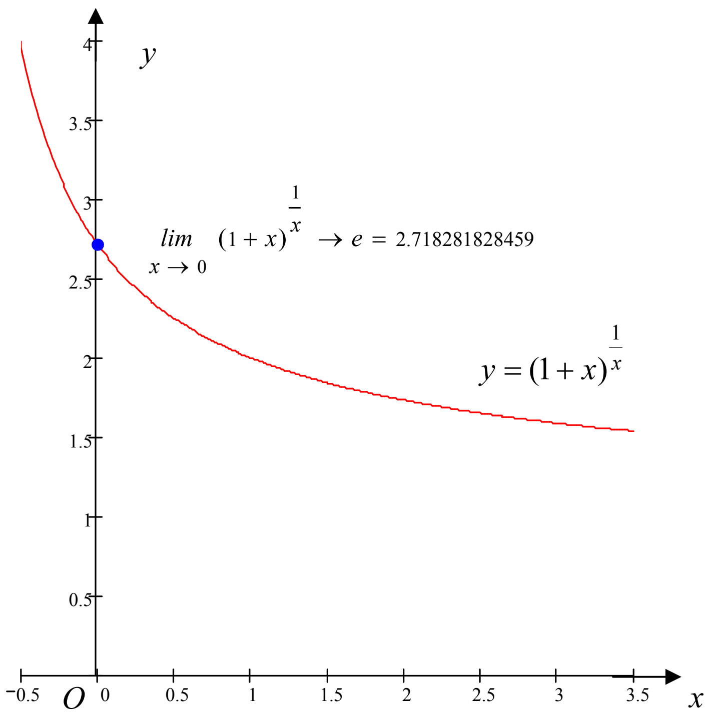
$$\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e\ .$$

Наслідки. ○

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha$. ●



Наприклад:

П1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-4}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+8}{x-4}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-4}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{12}\cdot\frac{12}{x-4}\cdot x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{12}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x-4}}=e^{12}.$$

П2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}.$