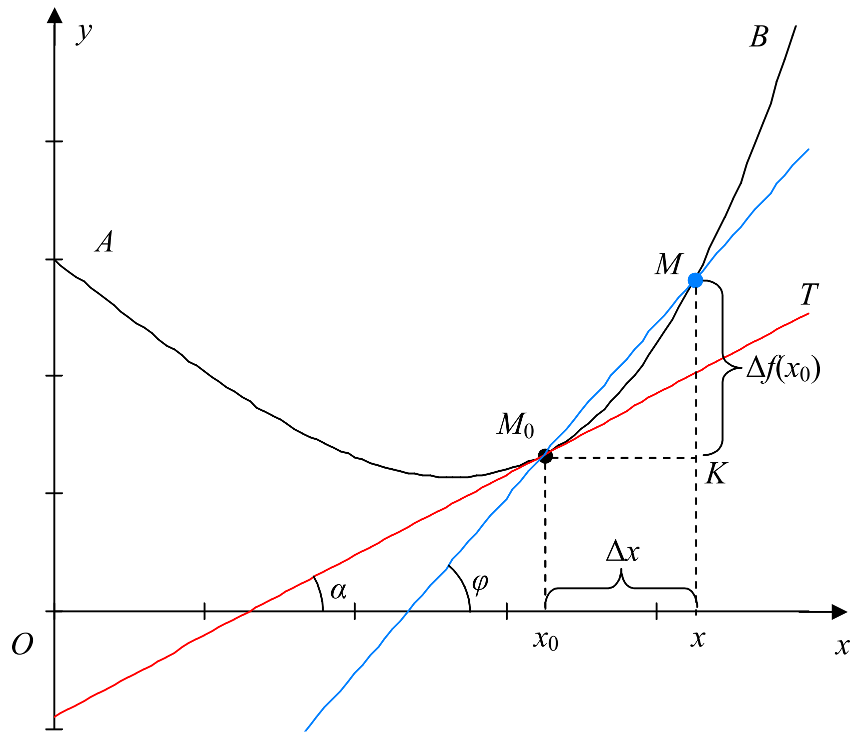
Похідна

Задачі, що приводять до поняття похідної.

1. Задача про дотичну.

Пряма M_0T, яка є граничним положенням січної M_0M, коли точка M вздовж кривої AB наближається до точки M_0, називається <u>дотичною</u> до кривої AB в точці M_0.



Позначимо кут $\angle MM_0K = \varphi$, тоді $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MK}{M_0K} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Нехай $M \to M_0$, тоді $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$, $\Delta f(x_0) \to 0$, $\varphi \to \alpha$, де α – кут нахилу дотичної.

Рівняння дотичної можна записати у вигляді $y = kx + b$, де кутовий коефіцієнт

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

2. Задача по швидкість рухомої точки.

Нехай матеріальна точка рухається по прямій за законом $S = S(t)$. Де S – шлях пройдений за час t.

Нехай M – положення точки в момент часу t, а M' – в момент часу $t + \Delta t$ і $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ – довжина шляху пройденого за час Δt. Відношення $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ в механіці називається величиною <u>середньої швидкості</u> руху на ділянці MM', а границя цього відношення при $\Delta t \to 0$ – величиною <u>миттєвої швидкості</u> в момент часу t:

$$V(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}.$$

Означення похідної.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і нехай x – точка цього околу, $x \neq x_0$.

Якщо відношення $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя називається <u>похідною</u> функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається $f'(x_0)$.

Таким чином

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В термінах приростів це означення можна переписати так

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тобто, похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ до приросту аргументу Δx в цій точці, коли $\Delta x \to 0$.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, то кажуть що функція $f(x)$ в точці x_0 має нескінченну похідну.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ не існує, то кажуть що похідна функції $f(x)$ в точці x_0 не існує.

Функція, яка має скінченну похідну в точці x_0, називається диференційовною в цій точці.

Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають диференціюванням цієї функції.

Геометричний та фізичний зміст похідної.

З означення похідної та описаних вище задач випливає наступне.

1. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ (або тангенс кута нахилу дотичної до кривої в даній точці до додатного напряму осі Ox) – це похідна $f'(x_0)$ в цій точці.

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

2. Миттєва швидкість $V(t)$ руху матеріальної точки в момент часу t є похідна переміщення $S(t)$.

$$V(t) = S'(t).$$

І взагалі, якщо функція $f(x)$ кількісно описує деякий фізичний чи хімічний процес, то похідна $f'(x)$ є швидкість зміни цього процесу.

Рівняння дотичної і нормалі.

З аналітичної геометрії відомо, що пряма l, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k, має рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Оскільки дотична до кривої $y = f(x)$ проходить через точку з координатами $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто $y_0 = f(x_0)$, і кутовий коефіцієнт її дорівнює $k = f'(x_0)$, то рівняння дотичної запишеться так

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

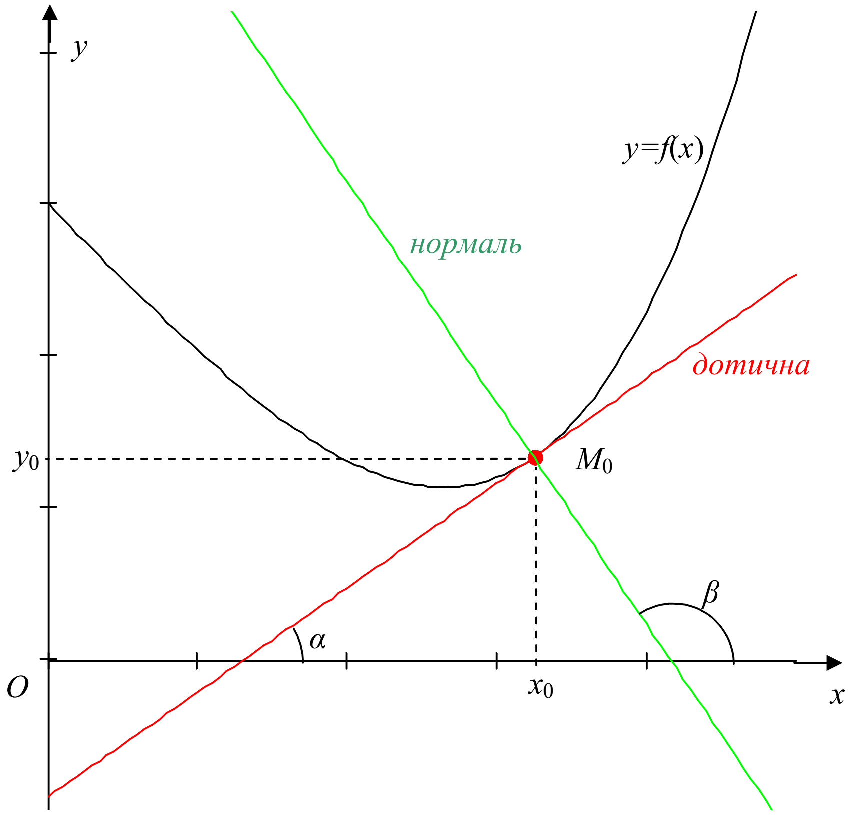
Нормаль до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ – це пряма перпендикулярна до дотичної до даної кривої в цій точці і така, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих пов’язані рівністю

$$k \cdot k' = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha \cdot (-\operatorname{ctg}\alpha) = -1.$$

Звідси маємо, що рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ запишеться так

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Односторонні похідні.

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 справа називається одностороння границя

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 зліва називається одностороння границя

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема 1. ○

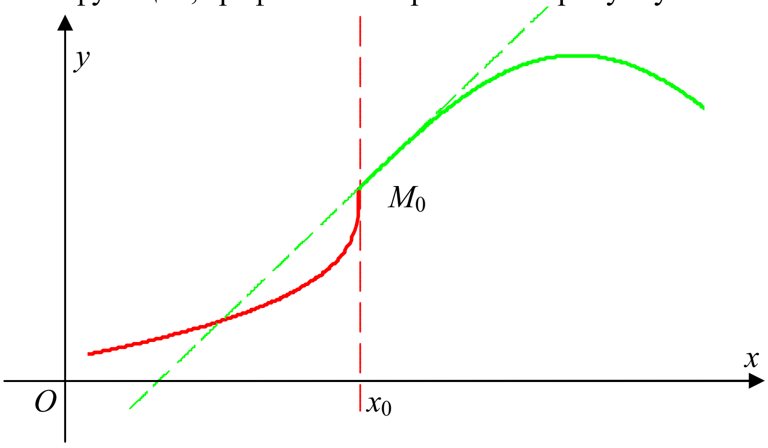
Для того щоб функція $f(x)$ мала похідну в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб в цій точці існувала похідна зліва та похідна справа і ці похідні були рівні між собою:

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).\ ●$$

Наприклад:

П1. Для функції, графік якої зображено на попередньому рисунку, умови теореми виконано, похідна функції $f(x)$ в точці x_0 існує. Геометрично це означає наступне. Дотичні, що утворюються при наближенні до точки M_0 зліва і справа співпадають між собою, отже існує дотична до кривої $y=f(x)$ в точці M_0 в звичайному розумінні.

П2. Розглянемо функцію, графік якої зображено на рисунку.



Для графіка даної функції дотична зліва в точці M_0 вертикальна. Це означає, що $f'_-(x_0)=\infty$.

А дотична справа утворює з віссю Ox кут $\dfrac{\pi}{4}$, це означає, що $f'_+(x_0)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$. Оскільки $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$, то похідна $f'(x_0)$ не існує. Не існує також і дотична до графіка функції в точці M_0.

Неперервність диференційовної функції.

Функція $f(x)$ називається <u>диференційовною в інтервалі</u> $(a;b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Теорема 2. ○

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці. ●

Доведення. ►

Нехай в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Запишемо приріст функції у вигляді $\Delta f(x_0)=\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x$. Тоді за теоремою про границю добутку маємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$.

А це й означає , що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0. ◄

Наслідок. ○

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то вона неперервна в цьому інтервалі. ●

Похідна суми, добутку і частки.

Теорема 3. ○

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в точці x, то в цій точці диференційовні функції $u(x)+v(x)$, $u(x)-v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x)\neq 0$), причому

$(u+v)'=u'+v'$; $(u-v)'=u'-v'$;

$(u\cdot v)'=u'v+uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. ●

Доведення. ►

Доведемо наприклад для частки. Позначимо $F(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Оскільки $\Delta u(x)=u(x+\Delta x)-u(x)$, то $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u(x)$. Аналогічно $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v(x)$. Тоді

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u(x)}{v(x)+\Delta v(x)}-\frac{u(x)}{v(x)}.$$

За означенням похідної маємо

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x)+\Delta u(x)}{v(x)+\Delta v(x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x)+\Delta u(x))\cdot v(x)-u(x)\cdot(v(x)+\Delta v(x))}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)\cdot\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+\Delta u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v(x)}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v(x)}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)\cdot\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v(x))\cdot v(x)}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$ ◄

Похідна складеної функції.

Теорема 4. ○

Якщо функція $\varphi(x)$ диференційовна в точці x, а функція $f(u)$ диференційовна в точці x, причому $\big(f(\varphi(x))\big)' = f'(u)\cdot\varphi'(x)$. ●

Похідна оберненої функції.

Теорема 5. ○

Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Якщо в точці $x \in (a;b)$ існує похідна $f'(x) \neq 0$, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ в точці $y = f(x)$ має похідну, причому

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)}. \bullet$$

Доведення. ►

Обернена функція $f^{-1}(y)$ визначена строго монотонна і неперервна на деякому проміжку $[A;B]$. Оскільки $x \in (a;b)$, то $y = (A;B)$, тоді $f^{-1}(y)$ неперервна в точці y, причому $\Delta x = \Delta f^{-1}(y) = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y) \neq 0$ внаслідок строгої монотонності.

Отримаємо

$$\frac{\Delta f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta f(x)} = \frac{1}{\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}}.$$

Перейдемо в цій рівності до границі

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}. \blacktriangleleft$$

Похідні основних елементарних функцій.

1) $c' = 0,\ c = const$;

2) $(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, ($\alpha$ – довільне число);

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, ($a > 0,\ a \neq 1$);

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ (x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$;

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z)$;

10) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ (x \neq \pi n,\ n \in Z)$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x| < 1)$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x| < 1)$;

13) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x},\ (x \neq 0)$.

Покажемо справедливість деяких формул диференціювання. ►

1) $c' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c-c}{\Delta x} = 0$;

2) $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$;

7) $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 2\cos x \cdot \frac{1}{2} = \cos x;$$

9) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ◄

Наприклад:

П1. $(c \cdot f(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot (f(x))' = 0 \cdot f(x) + c \cdot (f(x))' = c \cdot (f(x))'$.

Отже сталий множник можна виносити за знак похідної.

П2. $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$.

П3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

П4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

П5. $y = 3x^4 - 2x + \sin x - \operatorname{tg} x$;

$$y' = (3x^4 - 2x + \sin x - \operatorname{tg} x)' = 3(x^4)' - 2 \cdot x' + (\sin x)' - (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= 3 \cdot 4x^3 - 2 + \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = 12x^3 - 2 + \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

П6. $y = x^5 \operatorname{ctg} x$;

$$y' = (x^5 \operatorname{ctg} x)' = (x^5)' \operatorname{ctg} x + x^5 (\operatorname{ctg} x)' = 5x^4 \operatorname{ctg} x + x^5\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= x^4\left(\frac{5\cos x}{\sin x} - \frac{x}{\sin^2 x}\right) = x^4 \cdot \frac{5\cos x \sin x - x}{\sin^2 x}.$$

П7. $y=\dfrac{\sqrt{x}+\cos x}{e^x+\ln x}$;

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x}+\cos x}{e^x+\ln x}\right)'=\frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x\right)\left(e^x+\ln x\right)-\left(\sqrt{x}+\cos x\right)\left(e^x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(e^x+\ln x\right)^2}.$$

П8. $y=\sin(x^2+x-1)$;

$$y'=\left(\sin(x^2+x-1)\right)'=\cos(x^2+x-1)\cdot(x^2+x-1)'=\cos(x^2+x-1)\cdot(2x+1).$$

П9. $y=\cos^3\left(\sqrt{x}+2x+5\right)$;

$$y'=\left(\cos^3\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\right)'=3\cos^2\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\cdot\left(\cos\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\right)'=$$
$$=3\cos^2\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\cdot\sin\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2x+5\right)'=$$
$$=3\cos^2\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\cdot\sin\left(\sqrt{x}+2x+5\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\right).$$

Похідна функції, заданої параметрично.

Нехай задано залежність змінних x і y від параметра t, що змінюється в проміжку $(\alpha;\beta)$:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in(\alpha;\beta).$$

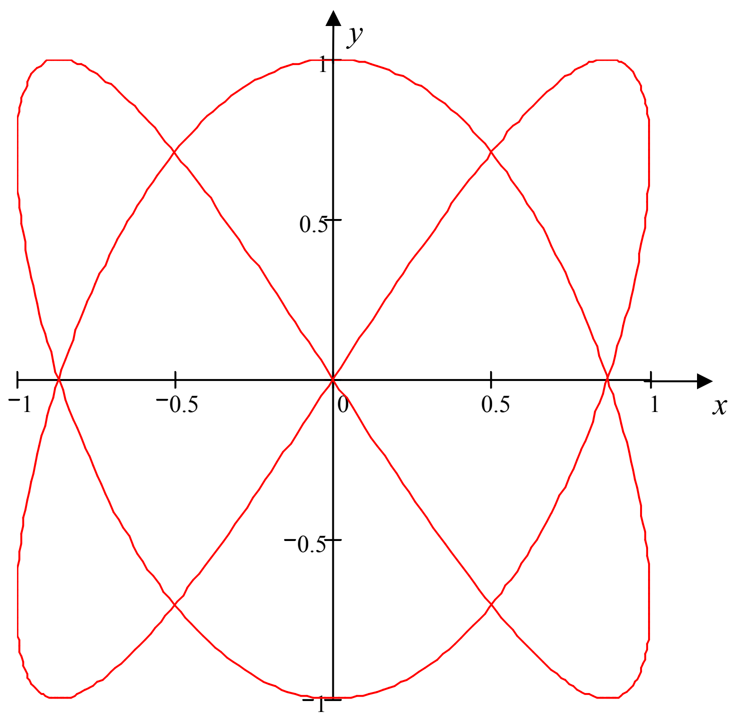
Нехай функція $x=\varphi(t)$ має обернену $t=\varphi^{-1}(x)=\lambda(x)$. Тоді, утворивши складену функцію від функцій $y=\psi(t)$ та $t=\lambda(x)$, можемо отримати залежність змінної y від x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x))=\psi(\lambda(x)).$$

Залежність величини y від величини x, задана через залежність кожної з них від параметра t називається функцією заданою параметрично.

Наприклад:

П1. Функція $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\sin 2t, \end{cases}$ $t\in[0;2\pi)$ має графік



Теорема 6. ○

Нехай функції $x=\varphi(t)$ і $y=\psi(t)$ визначені в деякому околі точки t_0 і диференційовні в t_0, причому $\varphi'(t_0)\neq 0$. Якщо функція $x=\varphi(t)$ строго монотонна в цьому околі точки t_0, то параметрично задана функція $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ в точці $x_0=\varphi(t_0)$ має похідну, причому

$$y'_x(x_0)=\frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)}. \bullet$$

Доведення. ►

За умов теореми в околі точки t_0 визначена обернена функція $t=\varphi^{-1}(x)$.

За теоремою 5 про похідну оберненої функції маємо

$$t'_x=\left(\varphi^{-1}(x_0)\right)'=\frac{1}{\varphi'_t(t_0)}.$$

За теоремою 4 про похідну складеної функції

$$y'_x(x_0)=\left(\psi(\varphi^{-1}(x))\right)'=\psi'_t(t_0)\cdot\left(\varphi^{-1}(x_0)\right)'=\psi'_t(t_0)\cdot\frac{1}{\varphi'_t(t_0)}=\frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)}. \blacktriangleleft$$

Наприклад:

П1. Знайти похідну функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x=\ln(\operatorname{ctg} t),\\ y=1/\cos^2 t.\end{cases}$$

Розв'язання:

$y'_x=\dfrac{y_t'}{x_t'}$. Знайдемо y_t' і x_t'.

$$y_t'=\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)'=(\cos^{-2}t)'=-2\cos^{-3}t\cdot(\cos t)'=-2\cos^{-3}t\cdot(-\sin t)=\frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

$$x_t'=(\ln(\operatorname{ctg} t))'=\frac{1}{\operatorname{ctg} t}\cdot(\operatorname{ctg} t)'=-\frac{1}{\operatorname{ctg} t\cdot\sin^2 t}=-\frac{1}{\cos t\cdot\sin t},$$

$$y'_x=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{2\sin t\cdot\cos t\cdot\sin t}{\cos^3 t\cdot(-1)}=-2\operatorname{tg}^2 t.$$

П2. Знайти y_x', якщо функція задана параметрично

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$

Розв'язання:

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\operatorname{tg} t.$$

Похідна неявно заданої функції.

Нехай задано рівняння виду $F(x,y)=0$, де $F(x,y)$ – функція двох змінних x і y. Якщо при кожному фіксованому значенні x із деякої множини D, існує значення y таке, що пара чисел (x,y) задовольняє дане рівняння, то кажуть, що рівняння $F(x,y)=0$ визначає на множині D <u>неявну функцію</u> $y=\Phi(x)$.

В деяких випадках рівняння $F(x,y)=0$ можна розв'язати відносно змінної y і отримати залежність $y=\Phi(x)$ у явному вигляді.

Наприклад:

П1. Нехай дано рівняння $xe^y+\ln(x)-1=0$. З нього можна отримати залежність $e^y=\dfrac{1-\ln(x)}{x}$. Звідси $y=\ln\left(\dfrac{1-\ln(x)}{x}\right)$. І нарешті $y=\ln(1-\ln x)-\ln x$.

Однак такий явний вираз y через x з використанням лише елементарних функцій можна отримати далеко не з будь-якого рівняння $F(x,y)=0$.

Наприклад:

П1. Хоча рівняння $e^{xy}+x\cos y=0$ визначає деяку залежність y від x, але виразити її «у явному вигляді» не вдається.

Для того щоб знайти похідну y'_x функції $y=\Phi(x)$ заданої неявно рівнянням $F(x,y)=0$ необхідно знайти похідну лівої і правої частини рівності, вважаючи, що x – вільна змінна, а y – функція $y=\Phi(x)$ від x (проміжний аргумент). Після чого необхідно виразити y' з отриманої рівності. Зауважимо, що y' буде виражатися як функція змінних x і y.

Наприклад:

П1. Знайти похідну функції, яка задана неявно

$$y^2+2xy+4=0.$$

Розв'язання:

$(y^2+2xy+4)'=(0)'$, $2yy'+(2x)'y+2xy'+(4)'=0$, $2yy'+2y+2xy'=0$,

$$y'(2y+2x)+2y=0,\quad y'=-\frac{2y}{2y+2x},\quad y'=-\frac{2y}{2(y+x)}=-\frac{y}{y+x}.$$

П2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції заданої неявно рівнянням

$$e^{xy}+x\cos y=0$$

в точці $(-1;0)$.

Розв'язання:

Диференціюючи ліву і праву частину рівняння отримаємо:

$$e^{xy}(xy)'_x+(x\cos y)'_x=0;$$

$$e^{xy}(y+xy')+\cos y-x\sin y\cdot y'=0;$$

$$e^{xy}y+e^{xy}xy'+\cos y-x\sin y\cdot y'=0;$$

Доданки, що містять y' залишаємо зліва, а всі інші переносимо вправо:

$$y'(xe^{xy}-x\sin y)=-ye^{xy}-\cos y,$$

звідки

$$y'=-\frac{ye^{xy}+\cos y}{x(e^{xy}-\sin y)}.$$

В точці $(-1;0)$, тобто при $x_0=-1$ і $y_0=0$, маємо

$$y'_0=-\frac{0\cdot e^{-1\cdot 0}+\cos 0}{-1\cdot(e^{-1\cdot 0}-\sin 0)}=-\frac{0+1}{-(1-0)}=-\frac{1}{-1}=1.$$

Тому рівняння дотичної таке:

$$y-0=1\cdot(x-(-1)) \text{ або } y=x+1,$$

а рівняння нормалі

$$y-0=-\frac{1}{1}\cdot(x-(-1)) \text{ або } y=-x-1.$$

Логарифмічне диференціювання.

Якщо функція визначена через операції множення, ділення та піднесення до степеня елементарних функцій, то при знаходженні похідної даної функції буває зручно перейти від явного виразу $y = f(x)$ залежності y від x до неявного у вигляді $\ln y = \ln f(x)$. Цей прийом диференціювання називають логарифмічним диференціюванням.

Наприклад:

Знайдемо похідну функції $y = \dfrac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

Прологарифмуємо обидві частини цієї рівності, отримаємо:

$$\ln y = \ln \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}};$$

$$\ln y = \ln x^3 + \ln(x^2+1) + \ln e^x - \ln(x-1) - \ln\sqrt{3x+5};$$

$$\ln y = 3\ln x + \ln(x^2+1) + x - \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(3x+5).$$

Продиференціюємо обидві частини отриманої рівності

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 3\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x+5}\cdot 3;$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{6x+10}.$$

Звідси

$$y' = y\cdot\left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{6x+10}\right);$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\cdot\left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{6x+10}\right).$$

Похідна степенево-показникового виразу.

Прийом логарифмічного диференціювання зручно застосовувати до так званих степенево-показникових функцій виду $y = (u(x))^{v(x)}$.

А саме:

$$\ln y = \ln(u(x))^{v(x)};$$

$$\ln y = v(x)\cdot\ln(u(x));$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'(x)\cdot\ln(u(x)) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x);$$

$$y' = y\cdot\left(v'(x)\cdot\ln(u(x)) + \frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right);$$

$$y' = (u(x))^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\ln(u(x)) + \frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right).$$

Наприклад:

Знайти похідну степенево-показникової функції

$$y = (\ln x)^{e^x}.$$

Розв'язання:

$y = (\ln x)^{e^x}$, $\ln y = e^x \ln(\ln x)$, $\dfrac{y'}{y} = (e^x)'\ln(\ln x) + e^x(\ln(\ln x))'$, $\dfrac{y'}{y} = e^x \ln(\ln x) + e^x\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$,

$y' = y\cdot e^x\left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{x\ln x}\right)$, $y' = (\ln x)^{e^x}\cdot e^x\cdot\left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{x\ln x}\right)$.

Диференціал.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Надамо аргументу приросту Δx так, щоби точка $x = x_0 + \Delta x$ належала цьому околу. Розглянемо приріст функції

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Якщо приріст функції $\Delta f(x_0)$ в точці x_0 можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x,$$

де $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x_0,\Delta x) = 0$ і число $A(x_0)$ не залежить від Δx, то функцію називають <u>диференційовною</u> в точці x_0.

Другий доданок цієї формули є нескінченно малою вищого порядку порівняно з першим доданком:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x}{A(x_0)\cdot\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(x_0,\Delta x)}{A(x_0)} = \frac{0}{A(x_0)} = 0,$$

тому перший доданок складає головну частину приросту функції.

Головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ в точці x_0 називається <u>диференціалом</u> цієї функції в точці x_0 і позначається $df(x_0)$. Таким чином:

$$df(x_0) = A(x_0)\cdot\Delta x.$$

Наприклад:

Розглянемо приріст функції $f(x) = 3x^2 + x - 1$. Маємо

$$\Delta f(x) = 3(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 1 - (3x^2 + x - 1) = 3x^2 + 6x\cdot\Delta x + 3\Delta x\cdot\Delta x + x + \Delta x - 1 - 3x^2 - x + 1 =$$
$$= 6x\cdot\Delta x + 3\Delta x\cdot\Delta x + \Delta x = \underbrace{(6x+1)}_{A}\Delta x + \underbrace{3\Delta x}_{\alpha}\cdot\Delta x = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,$$

тобто $A = 6x + 1$, а $\alpha = 3\Delta x$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0}3\Delta x = 0$, то функція диференційовна в кожній точці x числової прямої, а диференціал $df(x) = (6x+1)\Delta x$.

Раніше ми назвали функцію диференційовною в точці x_0, якщо вона має в цій точці скінчену похідну. Покажемо, що ці означення еквівалентні.

Теорема 7. ○

Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в цій точці існує похідна $f'(x_0)$. Причому, якщо функція $f(x)$ диференційовна, то $A(x_0) = f'(x_0)$. ●

Доведення. ►

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то її приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Поділимо цю рівність на Δx, отримаємо

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0) + \alpha(x_0,\Delta x).$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\big(A(x_0) + \alpha(x_0,\Delta x)\big),$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}A(x_0) + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x_0,\Delta x) = A(x_0) + 0 = A(x_0).$$

Отже в цьому випадку існує похідна $f'(x_0) = A(x_0)$.

Нехай тепер існує похідна $f'(x_0) = A(x_0)$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0)$. Ця рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - A(x_0)\right) = 0$, тобто

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - A(x_0) = \alpha(x_0, \Delta x),$$

де $\alpha(x_0, \Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$.

Помножимо цю рівність на Δx, отримаємо

$$\Delta f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Теорема доведена повністю. ◄

Виходячи з доведеної теореми формулу диференціала можна записати у вигляді

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Якщо диференціалом незалежної змінної x назвати за означенням диференціал функції $f(x) = x$, то

$$dx = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Тоді диференціал запишеться так

$$df(x_0) = f'(x_0) dx,$$

звідси

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx},$$

тобто похідна функції в точці x_0 дорівнює відношенню диференціала цієї функції в точці x_0 до диференціала аргументу.

Наприклад:

Знайдемо диференціал функції $y = arctg\ x$. Отримаємо

$$dy = (arctg\ x)' \cdot dx = \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

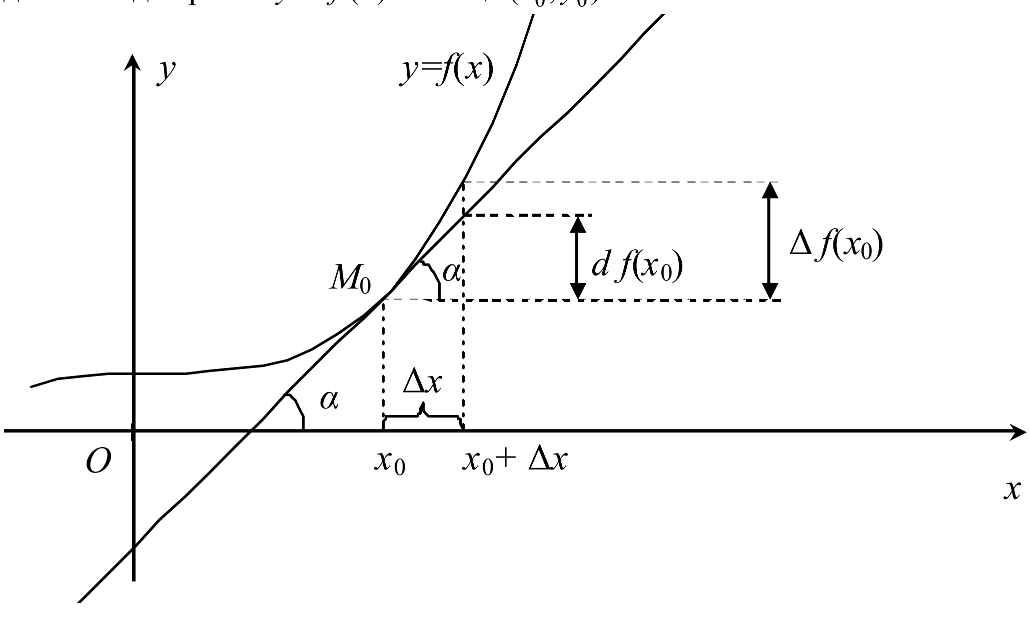
Геометричний зміст диференціала.

Розглянемо рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з координатами $(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В лівій частині цього рівняння знаходиться приріст ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$, що відповідає приросту аргументу $x - x_0 = \Delta x$. Тоді в правій частині знаходиться вираз $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$.

Таким чином, диференціал $df(x_0)$ функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$.



Механічний зміст диференціала.

Диференціал виражає той шлях, який би пройшла матеріальна точка від моменту часу t_0 за час Δt, якби з цього моменту вона рухалась рівномірно і прямолінійно зі сталою швидкістю $V = S'(t_0)$, де $S = S(t)$ – закон руху матеріальної точки.

Звідси

$$dS(t) = S'(t)\Delta t = V(t)\Delta t .$$

Наближені обчислення за допомогою диференціала.

Оскільки диференціал є головною частиною приросту функції $f(x)$ в точці x_0, то при досить малому Δx можна говорити про наближену рівність

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$$

або по іншому

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot \Delta x .$$

Звідси

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x ,$$

де $x = x_0 + \Delta x$.

Цю формулу називають <u>формулою наближених обчислень за допомогою диференціала</u>.

Наприклад:

Обчислимо наближено за допомогою диференціала $\sqrt[3]{27{,}54}$.

Покладемо $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 27{,}54$, $x = x_0 + \Delta x = 27 + 0{,}54$, $x_0 = 27$, $\Delta x = 0{,}54$.

Застосуємо формулу $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$.

$y' = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(27) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \dfrac{1}{27}$, $y(27) = \sqrt[3]{27} = 3$,

$y(27{,}54) \approx 3 + \dfrac{1}{27}0{,}54 = 3{,}02.$

Інваріантність форми диференціала.

Якщо x – незалежна змінна, а $f(x)$ – диференційовна функція від x, то

$$df(x) = f'(x)dx .$$

Припустимо тепер, що $x = \varphi(t)$ – диференційовна функція від t. Тоді складена функція $y = f(\varphi(t))$ матиме похідну, яка дорівнює $y'_t = f'_x(x)\cdot\varphi'(t)$. Диференціал цієї функції запишеться у вигляді

$$dy = y'_t dt = f'_x(x)\cdot\underbrace{\varphi'(t)dt}_{d\varphi(t)} = f'_x(x)\underbrace{d\varphi(t)}_{dx} = f'(x)dx .$$

Отже вигляд формули диференціала

$$df(x) = f'(x)dx$$

залишається незмінною (інваріантною) не залежно від того чи являється x незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією змінної t. Цю властивість називають інваріантністю форми диференціала.

Похідні і диференціали вищих порядків.