# Множина комплексних чисел

**Поняття комплексного числа. Арифметична форма комплексного числа**

Розглянемо множину пар дійсних чисел $(a,b)$ (тобто декартів квадрат множини дійсних чисел $R \times R$). Введемо на цій множині операції додавання за правилом

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

та множення за правилом

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Множину всіх таких пар $z=(a,b)$, $a,b \in R$ з вказаними правилами виконання операцій додавання і множення називають <u>множиною комплексних чисел</u> і позначають $C$.

Властивості операцій додавання і множення комплексних чисел:

| | |
|---|---|
| 1. $z_1+z_2=z_2+z_1$. | Комутативність додавання |
| 2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$. | Асоціативність додавання |
| 3. $(0{,}0)+z=z$. | Властивість нуля |
| 4. $(a,b)+(-a,-b)=(0{,}0)$. | Властивість протилежного елемента |
| 5. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ | Комутативність множення |
| 6. $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ | Асоціативність множення |
| 7. $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ | Дистрибутивність |
| 8. $(1{,}0)\cdot z=z$ | Властивість одиниці |

Можна помітити, що пари виду $(a,0)$ при додаванні і множенні поводять себе як дійсні числа:

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0+0)=(a+c,0),$$
$$(a,0)\cdot(c,0)=(a\cdot c-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot c)=(a\cdot c,0).$$

Тому надалі комплексне число виду $(a,0)$ будемо ототожнювати з дійсним числом $a$, отже позначимо

$$(a,0)=a,\ \ a\in R.$$

Звідси випливає, що множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел.

Позначимо також комплексне число $(0{,}1)$ символом $i$, отже

$$(0{,}1)=i.$$

Тоді будь-яке комплексне число виду $(0,b)$ можна подати у вигляді

$$(0,b)=(b,0)\cdot(0{,}1)=bi.$$

Оскільки $(a,b)=(a,0)+(0,b)$, то маємо

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0{,}1)=a+bi.$$

Цей запис називають <u>алгебраїчною формою комплексного числа</u>. При цьому пишуть $\mathrm{Re}(a+bi)=a$ – <u>дійсна частина</u> комплексного числа, $\mathrm{Im}(a+bi)=b$ – його <u>уявна частина</u>.

За правилом множення комплексних чисел маємо

$$i^2=(0{,}1)\cdot(0{,}1)=(-1{,}0)=-1.$$

Ця рівність виражає <u>головну властивість символу</u> $i$.

Таким чином додавання і множення комплексних чисел в алгебраїчній формі здійснюється за правилами додавання і множення многочленів відносно символу $i$ з урахуванням умови $i^2=-1$.

*Наприклад:*

П1. $(3+2i)+(-4+5i)=3-4+(2+5)i=-1+7i$.

П2. $(3+4i)(2+5i)=3\cdot 2+3\cdot 5i+4i\cdot 2+4i\cdot 5i=$

$$=6+15i+8i+20i^2=6+23i-20=-14+23i.$$

П3. $-3i\cdot(7+i)=-3i\cdot 7-3i\cdot i=-21i-3i^2=-21i-3\cdot(-1)=3-21i$.

П4. $(3+2i)\cdot(3-2i)=3\cdot3+3\cdot(-2i)+2i\cdot3+2i\cdot(-2i)=$

$=9-6i+6i-4i^2=9-4\cdot(-1)=9+4=13$.

П5. $i^1=i$; $i^2=-1$; $i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$; $i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot(-1)=1$;

$i^{18}=i^{16}\cdot i^2=\left(i^4\right)^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$. □

Комплексні числа $z=a+bi$ та $\bar{z}=a-bi$, що відрізняються лише знаком уявної частини, називають комплексно спряженими. Добуток комплексно спряжених чисел є дійсним числом (див П3). Цей факт дозволяє виконувати ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі, домножуючи чисельник і знаменник дробу на спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

*Наприклад:*

П1. $\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{8+10i+12i-15}{16+25}=\frac{-7+22i}{41}=-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$.

П2. $\frac{3-2i}{7i}=\frac{(3-2i)(-i)}{7i\cdot(-i)}=\frac{-3i-2}{7}=\frac{-2-3i}{7}=-\frac{2}{7}-\frac{3}{7}i$. □

**Основна теорема алгебри**

Розширення множини дійсних чисел і введення до розгляду множини комплексних чисел виправдано наступним фактом.

*Основна теорема алгебри.* ○

Будь-який многочлен

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_{n-1}z+a_n$$

з комплексними коефіцієнтами $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ має принаймні один корінь на множині комплексних чисел при $n\geq1$. ●

*Наслідок.* ○

Всякий многочлен $P_n(z)$ має рівно $n$ коренів в $C$ з урахуванням їх кратності. ●

Це означає, що многочлен розкладається в добуток лінійних множників:

$$P_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n).$$

Комплексні числа $z_1$, $z_2$, …, $z_n$ є коренями многочлена $P_n(z)$, деякі з них можуть співпадати. Якщо $z_k$ зустрічається рівно $r_k$ раз, то записують

$$P_n(z)=(z-z_1)^{r_1}(z-z_2)^{r_2}...(z-z_n)^{r_n},$$

де числа $r_1$, $r_2$, …, $r_n$ називаються кратностями коренів $z_k$ ($k=1,2,...,n$). Даний розклад для кожного многочлена визначається однозначно з точністю до нумерації коренів.

*Наприклад:*

П1. $z^3+(8+i)z^2+(41+16i)z+40+73i=(z+2+3i)^2(z+4-5i)$.

П2. $z^4-(2+2i)z^3+4iz^2+(2-2i)z-1=(z-1)^2(z-i)^2$.

П3. $z^2-4z+13$.

$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot13=16-52=-36$;

$z_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{4-\sqrt{-36}}{2}=\frac{4-6i}{2}=2-3i$;

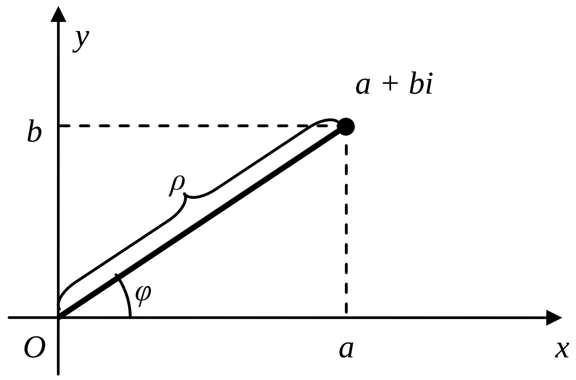
$z_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{4+\sqrt{-36}}{2}=\frac{4+6i}{2}=2+3i$;

$z^2-4z+13=(z-2+3i)(z-2-3i)$.

П4. $z^2+1=(z-i)(z+i)$. □

**Геометричне тлумачення комплексного числа**

Кожному числу $z = a + bi$ ставлять у відповідність точку $M(a;b)$ на декартовій площині $xOy$ або її радіус-вектор $\overline{OM}$. Вісь $Ox$ називають дійсною віссю, вісь $Oy$ – уявною віссю, площину $xOy$ – комплексною площиною і точку цієї площини ототожнюють з комплексним числом.




Перейдемо в комплексній площині до полярної системи координат з початком в точці $O$ та полярною віссю напрямленою вздовж $Ox$ $(0 \le \rho \le +\infty, -\infty \le \varphi \le +\infty)$, при цьому декартові координати точки $a$ і $b$ будуть пов'язані з полярними $\rho$ і $\varphi$ за допомогою формул

$$\begin{cases} a = \rho\cos\varphi; \\ b = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Враховуючи ці формули комплексне число можна записати у вигляді

$$z = a + bi = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Цей запис називається <u>тригонометричною формою комплексного числа</u>.

Число $\rho$ називають модулем комплексного числа і позначають $|z|$, а $\varphi$ – аргументом комплексного числа і позначають $\varphi = \arg z$.

Для $z \ne 0$ виконуються рівності

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Аргумент визначається неоднозначно: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in Z$, де $\arg z$ – головне значення аргументу числа $z$; $-\pi < \arg z \le \pi$.

*Теорема.* ○

При множенні комплексних чисел  і $z_2$ їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. ●

*Доведення.* ►

Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тоді

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\, i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\, i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \blacktriangleleft$$

*Наслідок 1.* ○

1) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 2) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$. ●

*Наслідок 2. Формула Муавра:* ○

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N. \bullet$$

*Наприклад:*

П1. Запишемо число $(1+i)^5$ в алгебраїчній формі.

$$z=1+i;\ \rho=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};\ \varphi=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4};\ z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$(1+i)^5=z^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4-4i.$$

П2. Запишемо число $(-2-3i)^7$ в алгебраїчній формі.

$z=-2-3i$; $\rho=|-2-3i|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$; число в 3-ій чверті, тому $\varphi=\arg(-2-3i)=\operatorname{arctg}\frac{-3}{-2}+\pi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; отже $z=\sqrt{13}\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)$.

$$(-2-3i)^7=z^7=\left(\sqrt{13}\right)^7\left(\cos 7\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\sin 7\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)=$$

$$=2197\sqrt{13}\left(\cos\left(7\pi+7\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\sin\left(7\pi+7\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)=2197\sqrt{13}\left(-\cos\left(7\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)-i\sin\left(7\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)=$$

$$=-2197\sqrt{13}\cos\left(7\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\left(-2197\sqrt{13}\sin\left(7\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right).\ \square$$

**Добування кореня з комплексного числа**

Коренем *n*-го степеня комплексного числа *z* називається комплексне число *w* таке, що $w^n=z$. Позначають: $w=\sqrt[n]{z}$. Із формули Муавра слідує, що:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k\in Z,$$

де $\sqrt[n]{\rho}$ – арифметичний корінь з модуля $\rho=|z|$ комплексного числа.

Корінь *n*-го степеня на комплексній площині має *n* різних значень, які можна отримати із даної формули при $k=0,1,2,3,\ldots,(n-1)$. Корені *n*-го степеня числа *z* розташовані на комплексній площині у вершинах правильного *n*-кутника. Зокрема:

$$\sqrt{z}=\begin{cases}\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right);\\ \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right).\end{cases}\qquad \sqrt[3]{z}=\begin{cases}\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right);\\ \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right);\\ \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right).\end{cases}$$

*Наприклад:*

П1. Знайдемо $\sqrt[3]{i}$. Маємо: $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1,\ \varphi=\frac{\pi}{2}$.

$$k=0,\ w_0=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2}{3}+i\sin\frac{\pi/2}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$k=1,\ w_1=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$k=2,\ w_2=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right)=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=0+(-1)\cdot i=-i.\square$$