Елементарні функції комплексної змінної

Задача полягає в тому, щоби маючи в розпорядженні лише операції додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел, відомі нам з попереднього параграфа означити елементарні функції комплексної змінної, такі як $\sin z$, $\cos z$. Причому, необхідно, щоб для випадку, коли число z є дійсним числом значення функції комплексної змінної співпадало із значенням відповідної дійсної функції.

Степенева функція для натурального показника визначається так:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}.$$

Функції e^z, $\cos z$, $\sin z$ визначають за допомогою рядів

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$n = 0,1,2,\ldots\ .$$

Відповідно виникає питання збіжності цих рядів. Розглянемо відповідні означення і факти.

Комплексне число A називається границею послідовності комплексних чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n > N(\varepsilon) : |z_n - A| < \varepsilon .$$

Послідовність, яка має границю називається збіжною.

Комплексний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається збіжним, якщо збіжна послідовність його частинних сум $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$.

Комплексний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ збігається в точці z_0, якщо в цій точці збігається послідовність частинних сум $S_N(z_0) = \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n$.

Для комплексних рядів справедлива *ознака Д'Аламбера.* ○

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ збігається в тих точках z, для яких $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| < 1$. ●

Наприклад:

П1. Застосуємо цю ознаку до ряду $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$.

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}| \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

отже даний ряд збігається при будь-якому $z \in C$. Аналогічно можна показати, що на всій комплексній площині збігаються також і ряди для функцій $\cos z$, $\sin z$. □

За означенням $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Гіперболічні функції визначаються так:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Логарифмічна функція визначається як обернена до показникової:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i, \ k \in Z,$$

де $\ln|z|$ – натуральний логарифм дійсного числа $|z|$. Вираз $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ називають головним значенням логарифма комплексного числа.

Інші обернені функції визначаються рівностями:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - z}{1 + z}.$$

Загальна степенева функція z^α (α – довільне фіксоване комплексне число) визначається рівністю

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \ z \neq 0.$$

Вираз $e^{\alpha \ln z}$ називають головним значенням степеневої функції.

Загальна показникова функція a^z ($a \neq 0$) визначається рівністю

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Вираз $e^{z \ln a}$ називають головним значенням показникової функції.

Експоненціальна форма комплексного числа.

Підставимо в ряд, що визначає функцію e^z, замість z вираз iz. Отримаємо:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \ldots \ .$$

Тепер додамо до ряду

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

ряд для $\sin z$ помножений на i

$$i \sin z = iz - i\frac{z^3}{3!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots \ .$$

Маємо

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \ldots \ .$$

Порівнюючи ряди для e^{iz} та $\cos z + i \sin z$ отримаємо рівність

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

З цієї формули випливає, що функція e^z періодична з періодом $2\pi i$, тобто $e^{z + 2\pi k i} = e^z, k \in Z$.

Підставимо в цю рівність замість z вираз $-z$. Отримаємо:

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z.$$

Додавши ці рівності маємо: $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$. Звідки

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Віднявши ті самі рівності маємо: $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$. Звідки

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Поклавши в рівності $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ число z рівним дійсному числу φ отримаємо *формулу Ейлера*: ○

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}\,. \bullet$$

Враховуючи дане співвідношення запис комплексного числа можна подати у вигляді

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}\,.$$

Цей запис називають <u>експоненціальною формою комплексного числа</u>.

В експоненціальній формі зручно виконувати множення, ділення та піднесення комплексних чисел до степеня:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\ z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}\,.$$

Наприклад:

П1. Подамо в алгебраїчній формі число $\sin(2+3i)$.

$$\sin(2+3i) = \frac{e^{i(2+3i)} - e^{-i(2+3i)}}{2i} = \frac{e^{2i-3} - e^{-2i+3}}{2i} = \frac{e^{2i}e^{-3} - e^{-2i}e^{3}}{2i} =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{-3}(\cos 2 + i\sin 2) - e^{3}(\cos 2 - i\sin 2)\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-3}\cos 2 + e^{-3}i\sin 2 - e^{3}\cos 2 + e^{3}i\sin 2)\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left((e^{-3} - e^{3})\cos 2 + i(e^{3} + e^{-3})\sin 2\right) = i\frac{e^{3} - e^{-3}}{2}\cos 2 + \frac{e^{3} + e^{-3}}{2}\sin 2 = i\,\mathrm{sh}\,3\cos 2 + \mathrm{ch}\,3\sin 2 =$$

$$= \sin 2\,\mathrm{ch}\,3 + i\cos 2\,\mathrm{sh}\,3\,.$$

П2. Подамо в алгебраїчній формі число $\mathrm{ch}(2+3i)$.

$$\mathrm{ch}(2+3i) = \frac{e^{2+3i} + e^{-(2+3i)}}{2} = \frac{e^{2+3i} + e^{-2-3i}}{2} = \frac{e^{2}e^{3i} + e^{-2}e^{-3i}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2}(\cos 3 + i\sin 3) + e^{-2}(\cos 3 - i\sin 3)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2}\cos 3 + e^{2}i\sin 3 + e^{-2}\cos 3 - e^{-2}i\sin 3)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((e^{2} + e^{-2})\cos 3 + i(e^{2} - e^{-2})\sin 3\right) = \frac{e^{2} + e^{-2}}{2}\cos 3 + i\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\sin 3 = \mathrm{ch}\,2\cos 3 + i\,\mathrm{sh}\,2\sin 3\,.$$

П3. Подамо в алгебраїчній формі число $\mathrm{Ln}(2+3i)$.

$$|\,2+3i\,| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,,\ \mathrm{Arg}(2+3i) = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi k\,,\ k \in Z\,.$$

$$\mathrm{Ln}(2+3i) = \ln|\,2+3i\,| + i\,\mathrm{Arg}(2+3i) = \ln\sqrt{13} + i\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi k\right) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z\,.$$

П4. Подамо в алгебраїчній формі число $(1+i)^{2+3i}$.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,,\ \mathrm{Arg}(1+i) = \mathrm{arctg}\frac{1}{1} + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,,\ k \in Z\,.$$

$$(1+i)^{2+3i} = e^{(2+3i)\,\mathrm{Ln}(1+i)} = \exp\left((2+3i)\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)\right) = \exp\left((2+3i)\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(2\cdot\frac{1}{2}\ln 2 + 2i\cdot\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + 3i\cdot\frac{1}{2}\ln 2 + 3i\cdot i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\ln 2 + i\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + \frac{3}{2}\ln 2\right) - 3\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \exp\left(\ln 2 - \frac{3\pi}{4} - 6\pi k + i\left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right)\right) =$$

$$= e^{\ln 2 - \frac{3\pi}{4} - 6\pi k}\cdot e^{i\left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right)} = e^{\ln 2 - \frac{3\pi}{4} - 6\pi k}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right)\right) =$$

$$= -e^{\ln 2 - \frac{3\pi}{4} - 6\pi k}\sin\left(\frac{3}{2}\ln 2\right) + ie^{\ln 2 - \frac{3\pi}{4} - 6\pi k}\cos\left(\frac{3}{2}\ln 2\right).\ \square$$