Комплексна площина. Крива і область на комплексній площині

Нехай $z = x + iy$ – комплексне число. Цьому числу можна поставити у взаємно однозначну відповідність точку $M(x; y)$ площини xOy, яку називають <u>комплексною площиною</u> C.

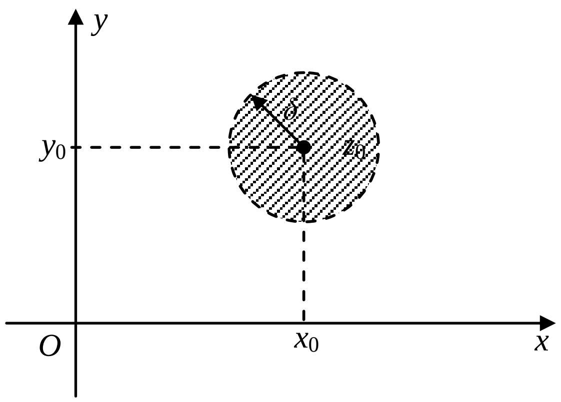
<u>Відстань між двома точками</u> $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ визначається рівністю

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = | z_2 - z_1 |,$$

яка співпадає з формулою довжини вектора $\overline{M_1M_2}$ з кінцями $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$.

Тому справедливою залишається *нерівність трикутника*: ○

$$\| z_1 | - | z_2 \| \leq | z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_2 |. \ \bullet$$



Нерівність виду $|z - z_0| < \delta$, $\delta > 0$, можна переписати у вигляді

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta .$$

Дана нерівність визначає внутрішність круга радіуса δ з центром в точці z_0. Таким чином, нерівність $|z - z_0| < \delta$ визначає <u>δ-окіл точки</u> z_0.

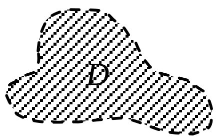
Точка z_0 називається <u>внутрішньою точкою множини</u> D, якщо існує окіл точки z_0, який міститься в множині D.

Множина, що складається лише з внутрішніх точок називається <u>відкритою</u>.

Наприклад:

П1. δ-окіл точки z_0 – відкрита множина.

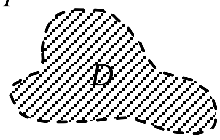
П2. Комплексна площина – відкрита множина.

П3. 

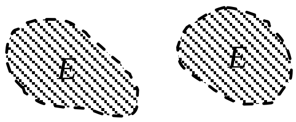
– відкрита множина. □

Множина D називається <u>зв'язною</u>, якщо будь-які дві точки $z_1, z_2 \in D$ можна з'єднати ламаною L, що повністю міститься в D.

Наприклад:

П1. 

– зв'язна множина.

П2. 

– не зв'язна множина. □

Відкрита зв'язна множина називається <u>областю</u>.

Точка z_0 називається <u>граничною точкою</u> області D, якщо в довільному δ-околі точки z_0 знайдуться точки, які належать області D.

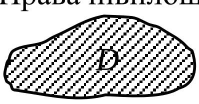
Множина, яка містить всі свої граничні точки називається <u>замкненою</u>.

Наприклад:

П1. Круг $|z - z_0| \leq R$ – замкнена множина.

П2. Комплексна площина – замкнена множина.

П3. Права півплощина $\operatorname{Re} z \geq 0$ – замкнена множина.

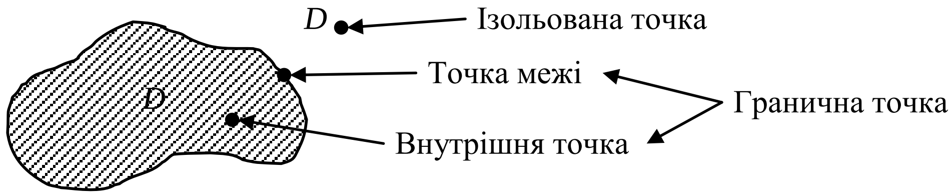
П4. 

– замкнена множина. □

Точка z_0 називається межовою точкою області D, якщо в довільному δ-околі точки z_0 знайдуться точки, які належать області D і такі, що даній області не належать. Сукупність всіх межових точок називається межею області D і позначається ∂D.

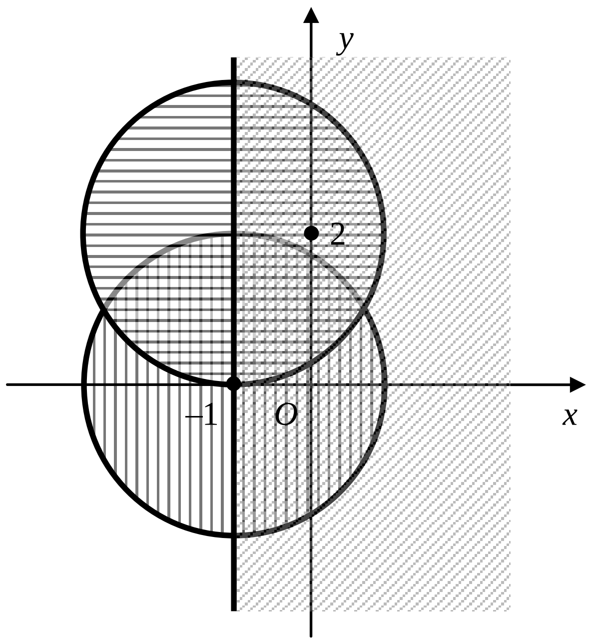
Область разом з своєю межею називають замкненою областю. Замкнена область є замкненою множиною.

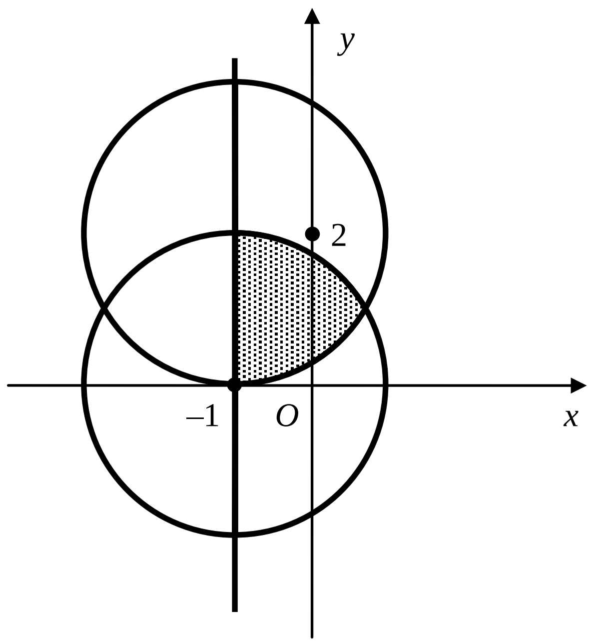
Точка $z_0 \in D$ називається ізольованою точкою множини D, якщо існує окіл цієї точки, який не містить жодної точки з D окрім самої точки z_0.



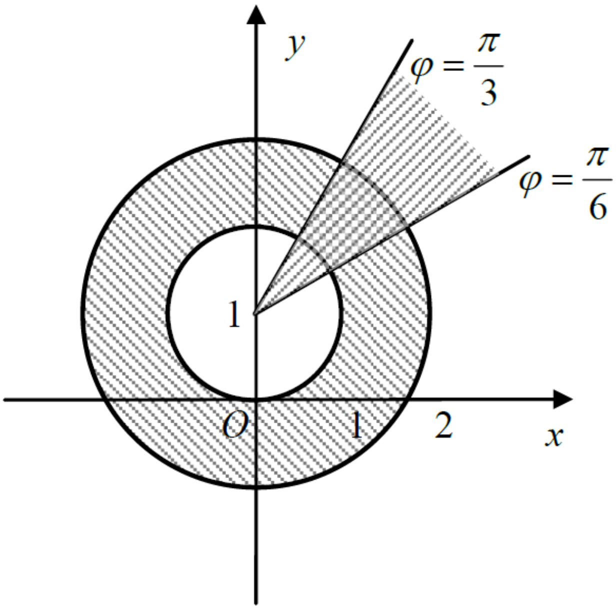
Наприклад:

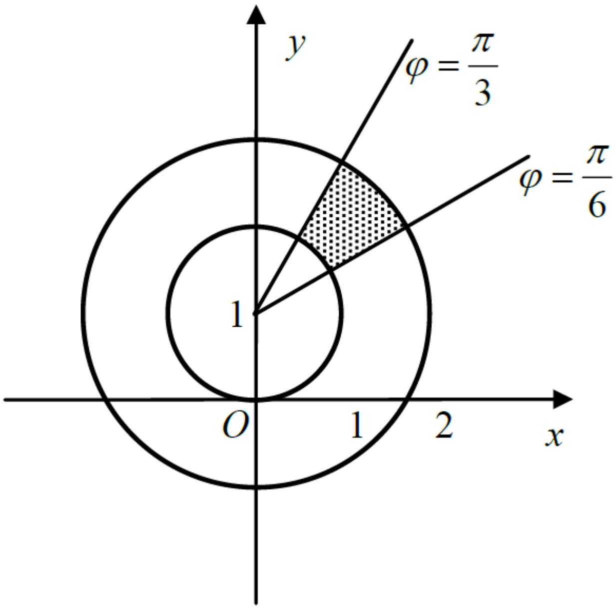
П1. $|z+1| \le 2, |z+1-2i| \le 2, \operatorname{Re} z \ge -1.$





П2. $1 \le |z-i| \le 2, \frac{\pi}{6} \le \arg(z-i) \le \frac{\pi}{3}.$

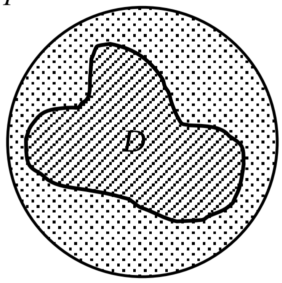




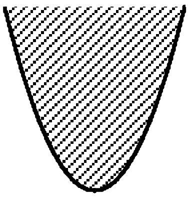
□

Множина називається <u>обмеженою</u>, якщо існує круг скінченного радіуса, який повністю містить цю множину.

Наприклад:



П1. – обмежена область.

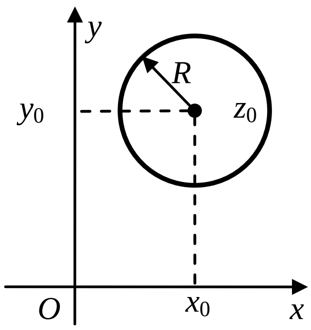


П2. – необмежена область. □

<u>Кривою</u> L називається множина точок площини C, яку можна подати як образ відрізка $[\alpha;\beta]$ при неперервному відображенні:

$$z = z(t) = x(t) + y(t)i, \quad \alpha \le t \le \beta .$$

Наприклад:



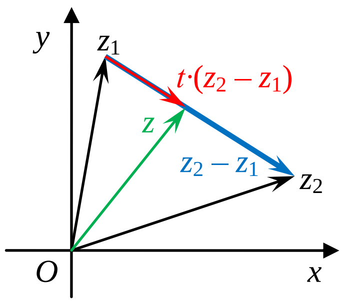
П1. Розглянемо $|z - z_0| = R$ – коло радіуса R з центром в точці z_0. Запишемо цю криву в параметричній формі. Параметричні рівняння кола:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R\cos t, \\ y(t) = y_0 + R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0;2\pi).$$

Отже, маємо:

$$z = x(t) + y(t)i = x_0 + R\cos t + i\cdot(y_0 + R\sin t) =$$

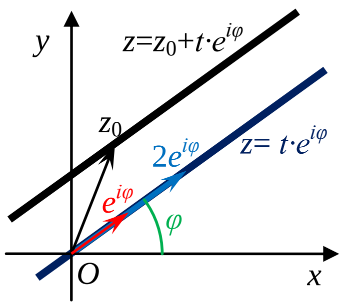
$$= x_0 + y_0 i + R\cos t + iR\sin t = z_0 + R\cdot e^{it}, \; t \in [0;2\pi).$$



П2. Рівняння прямолінійного відрізка, що сполучає точки z_1 і z_2 можна отримати так: $z = z_1 + t\cdot(z_2 - z_1)$, $t \in [0;1]$. Тоді

$$z = (1-t)\cdot z_1 + t\cdot z_2, \; t \in [0;1].$$

Зауважимо, що знявши обмеження на t, тобто, поклавши $t \in (-\infty;+\infty)$, отримаємо рівняння прямої, що проходить через точки z_1 і z_2.



П3. Рівняння прямої, що проходить через точку z_0 і утворює з дійсною віссю кут φ запишеться так:

$$z = z_0 + t\cdot e^{i\varphi}, \; t \in (-\infty;+\infty).$$

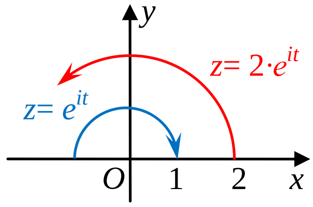
Дійсно, радіус вектор точки $e^{i\varphi}$ є одиничний вектор, що утворює з віссю Ox кут φ. Множення цього вектора на дійсне число t видовжує цей вектор з коефіцієнтом t, утворюється пряма з відповідним кутом нахилу, яка проходить через початок координат. Додавання числа z_0 паралельно переносить всі точки прямої на вектор z_0.

П4. Рівняння параболи $y = x^2$ в параметричній формі запишеться так $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$ Отже, маємо $z = t + i\cdot t^2$, $t \in (-\infty;+\infty)$. □

Вказавши в параметричному рівнянні кривої $z=z(t)$ напрямок зміни параметра можна задати не лише траєкторію, а й напрямок руху по кривій.

Наприклад:

П1. Рівняння $z=2\cdot e^{it}$, $t_1=0$, $t_2=\dfrac{3\pi}{4}$ визначає дугу кола радіуса 2, яку точка z проходить у додатному напрямку (проти годинникової стрілки).



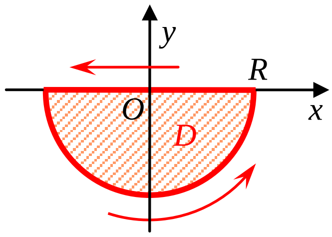
П2. А рівняння $z=e^{it}$, $t_1=\pi$, $t_2=0$ визначає дугу кола радіуса 1, яку точка z проходить у від'ємному напрямку (за годинниковою стрілкою). □

Якщо крива незамкнена, то <u>додатним напрямком</u> на ній вважають той, що відповідає зростанню параметра t. Протилежний напрямок називають <u>від'ємним</u>.

Якщо замкнена крива L є межею області D, тобто $L=\partial D$, то <u>додатним</u> називають той напрямок руху по кривій, при якому область D залишається від спостерігача увесь час зліва. Замкнену криву називають також <u>контуром</u>.

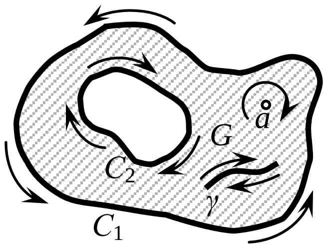
Якщо D зв'язна область, то кількість неперервних кривих, з яких складається межа цієї області називається <u>порядком зв'язності</u>.

Наприклад:



П1. Область D, задана нерівностями $|z|\le R$, $\operatorname{Im} z\le 0$, є однозв'язна область, межа якої при обході в додатному напрямку запишеться так:

$$z=R\cdot e^{it},\ t_1=-\pi,\ t_2=0;\ z=t,\ t_1=R,\ t_2=-R.$$



П2. Межа, зображеної на рисунку області G, складається з двох неперервних замкнених кривих C_1, C_2, розрізу γ та точки a. Тобто

$$L=\partial G=C_1\cup C_2\cup\gamma\cup a.$$

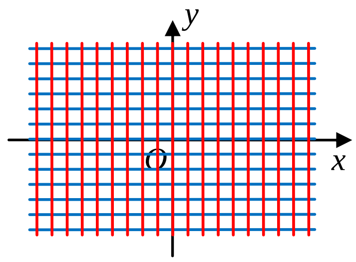
Таким чином дана область є 4-зв'язною.

Стрілочками на рисунку показано додатні напрямки обходу кривих. □

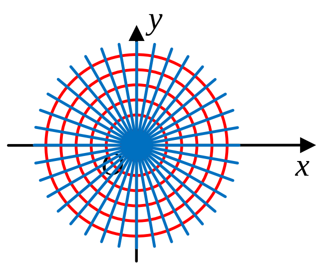
Якщо в системі координат зафіксувати одну координату, а іншу змінювати, отримаємо <u>координатну лінію</u>. Сімейства координатних ліній, що відповідають зміні однієї та іншої координати утворюють <u>координатну сітку</u>.

Наприклад:

П1. Для декартової системи координат координатна сітка складається із двох сімейств паралельних прямих, прямі різних сімейств при цьому перпендикулярні одна до одної.



П2. Для полярної системи координат координатна сітка складається із сімейства концентричних кіл (ρ постійне, φ змінюється), та сімейства променів випущених з початку координат (φ постійне, ρ змінюється).



□