Функція комплексної змінної. Неперервність та диференційованість функції комплексної змінної

Поняття функції комплексної змінної

Нехай D деяка множина точок комплексної площини. Якщо кожному значенню z із D за деяким правилом поставлено у відповідність одне або кілька значень w, то кажуть що на множині D задана <u>функція комплексного змінного</u> і записують

$$w = f(z).$$

Змінну z при цьому називають незалежною змінною або <u>аргументом</u>, а w – залежною змінною або <u>функцією</u>. Якщо кожному значенню z відповідає тільки одне значення w, то функцію $w = f(z)$ називають <u>однозначною</u>; в іншому випадку кажуть, що $f(z)$ – багатозначна функція.

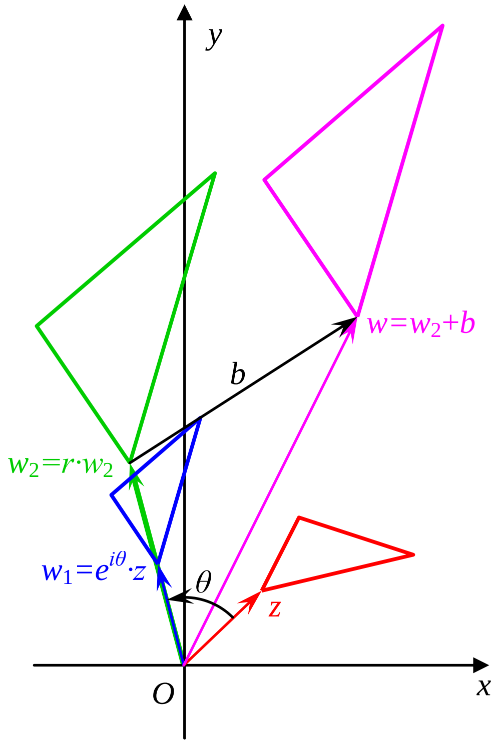
Множину D називають <u>областю визначення</u> функції. Множину E всіх точок w, що відповідають точкам z із D за функцією $w = f(z)$, називають <u>областю значень</u> функції. Таким чином функція $w = f(z)$ здійснює відображення множини D на множину E.

В деяких випадках вдається вказати геометричний зміст такого відображення.

Наприклад:

П1. Розглянемо лінійну функцію $w = az + b$. Запишемо в експоненціальній формі $z = \rho e^{i\varphi}$, $a = re^{i\theta}$. Тоді $w = re^{i\theta} \cdot \rho e^{i\varphi} + b = r\rho e^{i(\varphi+\theta)} + b$. Цю функцію можна розглядати як суперпозицію трьох функцій: $w_1 = e^{i\theta} \cdot z = e^{i\theta} \cdot \rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi+\theta)}$, $w_2 = r \cdot w_1$, $w = w_2 + b$. Перша з них геометрично означає поворот на кут θ, друга – розтяг (гомотетію) з коефіцієнтом r (стиснення при $r < 1$), а третя – паралельне перенесення на вектор b.

Областю визначення лінійної функції є вся комплексна площина і областю значень також є вся комплексна площина. Отже, лінійна функція $w = az + b$ здійснює перетворення комплексної площини, яке полягає в послідовному виконанні повороту, гомотетії та паралельного перенесення. □



Функцію $z = \varphi(w)$, яка здійснює зворотне відображення множини E на D, називають <u>оберненою</u> до функції $w = f(z)$.

Наприклад:

П1. Функція обернена до лінійної функції $w = az + b$ запишеться так $z = \dfrac{w-b}{a}$. □

Запишемо аргумент функції $w = f(z)$ в алгебраїчній формі $z = x + iy$. Аналогічно і значення функції можна записати у вигляді $w = u + iv$, тоді

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ (x;y) \in D,$$

де $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ – дійсні функції двох дійсних змінних x і y. Отже, задання комплексної функції $w = f(z)$ еквівалентно заданню двох дійсних функції $u = u(x,y)$ та $v = v(x,y)$.

Графік функції комплексної змінної

Із сказаного випливає, що графіком функції комплексної змінної є деяка множина точок з координатами (x, y, u, v) у чотиривимірному просторі $Oxyuv$. Пряма геометрична побудова такого об'єкта в звичайному тривимірному просторі неможлива. Існує кілька методів геометричної ілюстрації функцій комплексної змінної, які дозволяють обійти цю проблему:

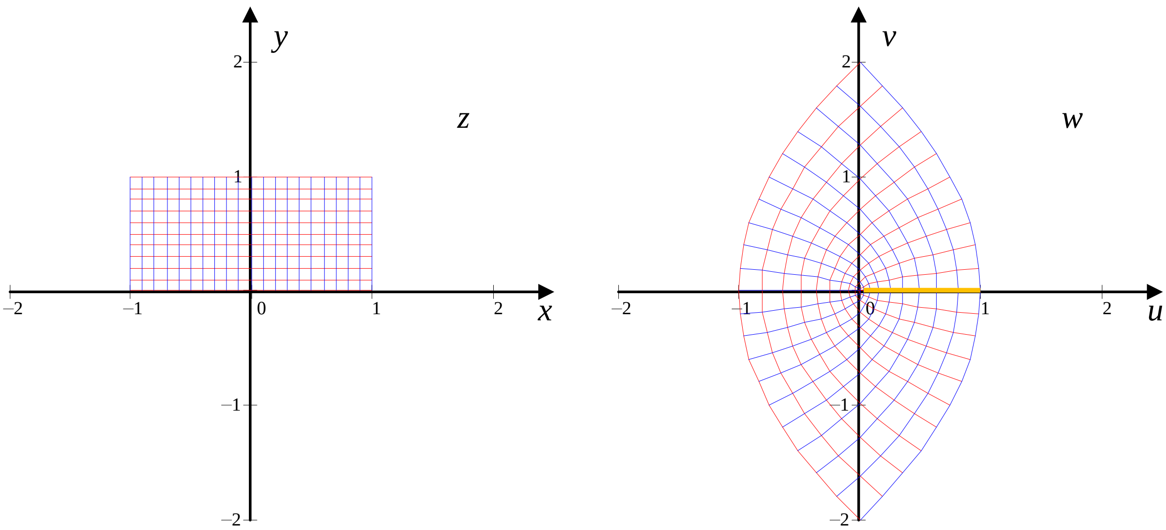
1. Область визначення функції D в площині z покривають сіткою кривих (частіше за все координатною сіткою) та будують образи цих кривих при відображенні $w = f(z)$ в області значень E на площині w.
2. Окремо будують два тривимірні графіка для функцій $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$.
3. Будують графік модуля функції $|w| = |f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$.

Наприклад:

П1. Розглянемо функцію $w = z^2$. В експоненціальній формі запишемо $w = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$. Отже, при даному відображенні $\varphi = \arg z$ подвоюється, а модуль ρ підноситься до квадрату. Точки з аргументами $0 \le \varphi < -\pi$ (верхня півплощина z) взаємно однозначно відображаються на точки всієї площини w.

Аргументи точок, для яких $-\pi \le \varphi < 0$, запишемо у вигляді $\varphi = -\pi + \alpha$, де $0 \le \alpha < -\pi$, тоді для цих точок $w = \rho^2 e^{2i(-\pi+\alpha)} = \rho^2 e^{-2\pi i + 2i\alpha} = \rho^2 e^{2i\alpha}$, оскільки $2\pi i$ період експоненціальної функції. Таким чином, точки з аргументами $\varphi = -\pi + \alpha$ (нижня півплощина) мають ті самі образи, що й точки з аргументами $\varphi = \alpha$ (верхня півплощина).

Рисунок ілюструє відображення координатної сітки прямокутника $[-1;1] \times [0; i]$ площини z на область площини w. При цьому промені $[0;+\infty)$ і $[0;-\infty)$ площини z зливаються в один промінь $[0;+\infty)$ площини w.



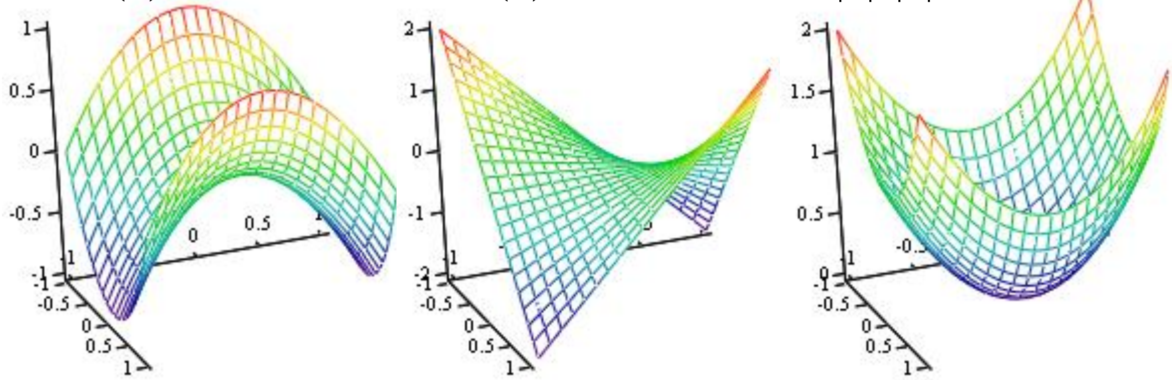
Нижче наведено графіки поверхонь $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ та $|w| = |f(z)|$ для функції $f(z) = z^2$. В алгебраїчній формі маємо:

$z = x + iy$, $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$;

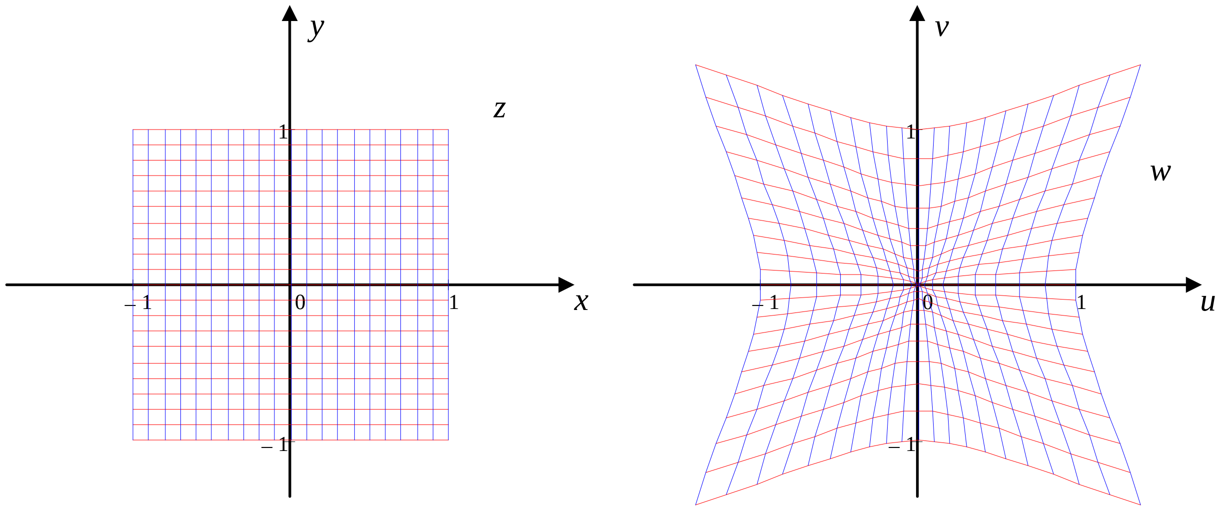
$u = \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$, $v = \mathrm{Im}(z^2) = 2xy$ – гіперболічні параболоїди,

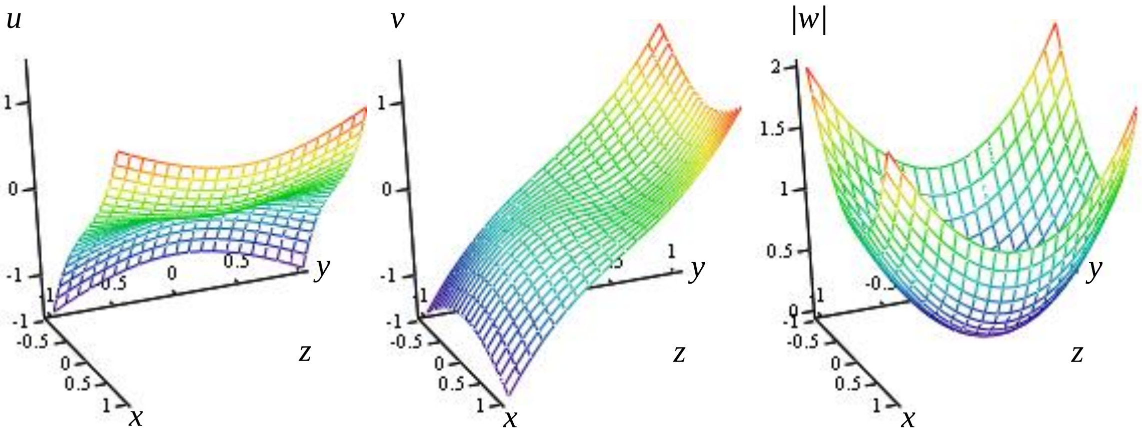
$|w| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} = \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = x^2 + y^2$ – еліптичний параболоїд обертання.

u=Re(z^2) v=Im(z^2) $|w|$=$|z^2|$



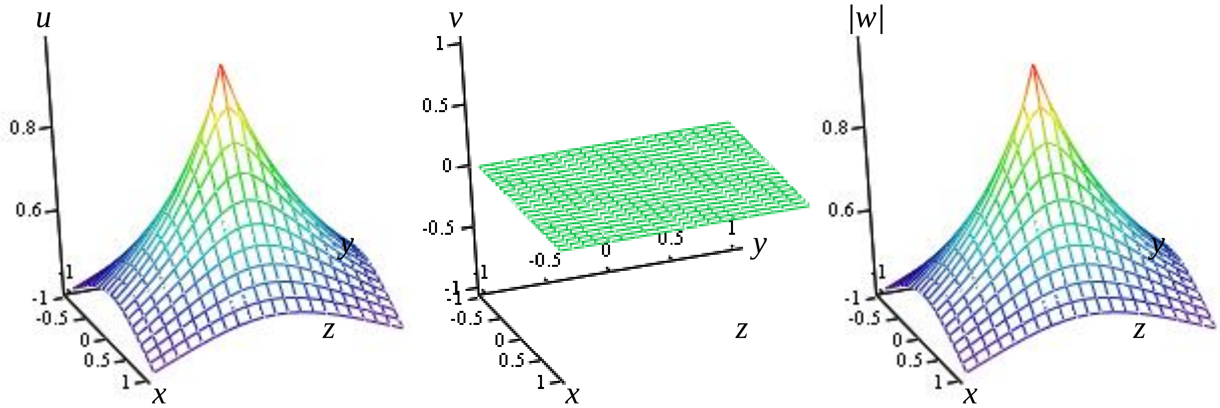
П2. Виконаємо аналогічні побудови для функції $w = |z| \cdot z$. В експоненціальній формі маємо: $w = \rho^2 e^{i\varphi}$. Отже, дана функція змінює модуль числа аналогічно до функції з попереднього прикладу, не змінюючи при цьому його аргументу.



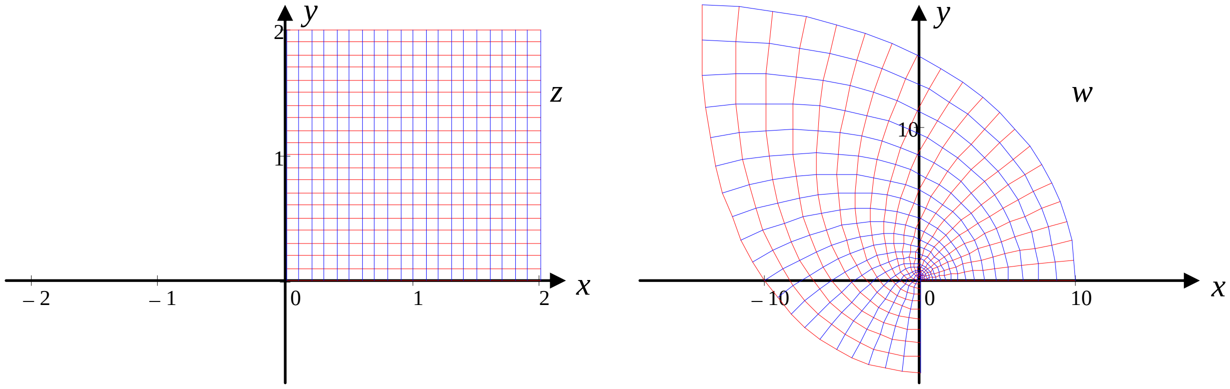


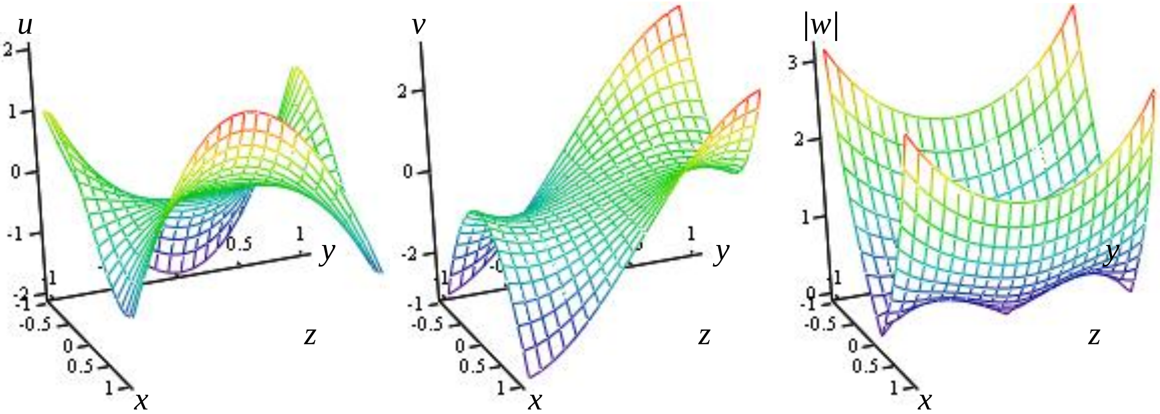
П3. Розглянемо функцію $w = \dfrac{1}{1+|z|}$. Область значень цієї функції є проміжок дійсної осі $(0;1]$, тому вся координатна сітка площини стискається у відрізок, тому перший спосіб геометричної ілюстрації не є інформативним.

Оскільки уявна частина функції тотожно дорівнює нулю, то графік модуля функції співпадає з графіком дійсної частини.



П4. $w = z^3 + z$.





□

Функція $f(z)$ називається <u>однолистою</u> в області D, якщо в різних точках z цієї області вона набуває різних значень. З цього означення випливає, що функція, обернена до однолистої є однозначною. Якщо, крім того, сама функція $f(z)$ однозначна, то вона встановлює взаємно однозначне відображення між точками області визначення D та області значень E.

Границя і неперервність функції комплексної змінної

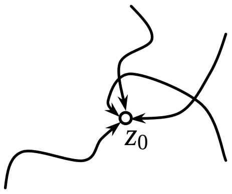
Число A називається <u>границею</u> функції $f(z)$ в граничній точці z_0 області визначення D, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon ,$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх точок z із проколотого δ-околу: $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Пишуть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Границя в комплексній області не залежить від способу наближення z до z_0. Тому існування границі функції комплексної змінної є вимогою більш сильною ніж у випадку функції дійсної змінної.



Якщо $A = a + bi$, то рівність $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ еквівалентна двом рівностям $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b$.

Для комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ мають місце *властивості* аналогічні до відповідних властивостей дійсних функцій ○

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z) \pm g(z)\right) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z), \qquad \lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot g(z)\right) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \quad \left(\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0\right). \bullet$$

Ці формули потрібно розуміти в тому сенсі, що якщо існують границі в їх правих частинах, то існують і границі в лівих частинах і виконуються відповідні рівності.

Нехай функція $f(z)$ визначена на множині D і точка $z_0 \in D$. Функція $f(z)$ називається <u>неперервною</u> в точці z_0, якщо

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ця рівність еквівалентна двом рівностям

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0), \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0),$$

тобто неперервність функції $w = f(z)$ в точці z_0 еквівалентна неперервності функцій $u = u(x,y)$ та $v = v(x,y)$ в точці (x_0, y_0).

З властивостей границь випливає також

Теорема 1. ○

Якщо $f(z)$, $g(z)$ комплексні функції неперервні в точці z_0, то $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ та $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, $g(z) \neq 0$ неперервні функції в цій точці. ●

Введемо поняття приростів. Позначимо

$\Delta z = z - z_0$ – <u>приріст аргументу</u>, тоді

$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ – <u>приріст функції</u> в точці z_0.

Умова неперервності функції в точці z_0 *на мові приростів* запишеться так: ○

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0,$$

тобто функція $f(z)$ неперервна в точці z_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу Δz відповідає нескінченно малий приріст функції Δw. ●

Функція $w = f(z)$ називається <u>неперервною в області</u> D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Основні теореми дійсного аналізу про неперервні функції зберігаються в комплексній області. Наведемо лише наступну.

Теорема 2. ○

Якщо функція $w = f(z)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то

1) вона обмежена в цій області, тобто існує таке стале число c, що $|f(z)| \le c \;\; \forall z \in D$;
2) $f(z)$ набуває в цій області свого найменшого та найбільшого по модулю значення. ●

Похідна функції комплексної змінної

Нехай $w = f(z)$ – однозначна функція комплексної змінної, визначена в деякому околі точки z_0, і точка $z = z_0 + \Delta z$ належить цьому околу. Якщо існує скінченна границя

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то вона називається <u>похідною</u> функції $f(z)$ в точці z_0. При цьому функція $w = f(z)$ називається <u>диференційованою</u> в точці z_0.

Знову підкреслимо, що значення границі $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ в означенні похідної не залежить від способу прямування точки $z = z_0 + \Delta z$ до точки z_0, тобто прямування Δz до нуля. Тому вимога диференційовності функції $f(z)$ в точці z_0 накладає важливі вимоги на поведінку дійсної і умовної частини цієї функції, які називають *умови Коші-Рімана або Д'Аламбера-Ейлера*.

Теорема 3. ○

Якщо функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ має похідну в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ мають в точці $(x_0;y_0)$ частинні похідні першого порядку, які пов'язані умовами Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \; \bullet$$

Доведення. ►

Нехай $f(z)$ в точці z_0 має похідну $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$. Тоді при будь-якому способі прямування $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ до нуля має існувати границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ рівна одному й тому ж числу $f'(z_0)$.

Покладемо $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 = \Delta x$. Тоді

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Покладемо $\Delta z = 0 + i \cdot \Delta y = \Delta y$. Тоді

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i \cdot \Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i \cdot \Delta y} \right) =$$

$$= -i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Порівнюючи результати маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отже, виконуються рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \; ◄$$

Теорема 4. ○

Якщо функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ мають в точці $(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні першого порядку, пов'язані умовами Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ має в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ похідну. ●

Доведення. ►

Якщо функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ мають в точці $(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні, то вони диференційовні в точці $(x_0;y_0)$. Отже, їх повні прирости в точці $(x_0;y_0)$ можна подати у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \xi(x,y), \qquad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta(x,y),$$

де $\lim\limits_{|\Delta z| \to 0} \frac{\xi(x,y)}{|\Delta z|} = 0$, $\lim\limits_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta(x,y)}{|\Delta z|} = 0$, $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Запишемо тепер приріст функції $f(z)$ в точці z_0:

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \xi(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta(x,y) \right) = \quad \text{(перегрупуємо доданки)}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial u}{\partial x}}\Delta y + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{-\frac{\partial v}{\partial x}}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \xi(x,y) + i\eta(x,y) = \quad \text{(за умовами Коші-Рімана)}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \xi(x,y) + i\eta(x,y) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{\Delta y}{i} + \Delta x\right) + \xi(x,y) + i\eta(x,y) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \xi(x,y) + i\eta(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta z + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta z + \xi(x,y) + i\eta(x,y).$$

Поділимо цю рівність на Δz, отримаємо:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\xi(x,y)}{\Delta z} + i\frac{\eta(x,y)}{\Delta z}.$$

Перейдемо в цій рівності до границі

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \underbrace{\frac{\xi(x,y)}{\Delta z}}_{\downarrow\, 0} + i\underbrace{\frac{\eta(x,y)}{\Delta z}}_{\downarrow\, 0}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, існує границя

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0),$$

що доводить диференційовність функції $f(z)$ в точці z_0. ◄

Під час доведення теореми ми отримали вираз для похідної

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Використовуючи умови Коші-Рімана отримаємо також інші *вирази для знаходження похідної* диференційовної функції: ○

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \bullet$$

Якщо функція $f(z)$ у всіх точках деякої області D має неперервну похідну, то таку функцію називають <u>аналітичною</u> в області D.

З теореми 3 і теореми 4 випливає, що необхідною і достатньою умовою аналітичності функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в області D є існування в цій області неперервних частинних похідних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$, пов'язаних умовами Коші-Рімана.

Наприклад:

П1. З'ясуємо диференційовність функції $w = z^2$. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy;\ u = \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2,\ v = \mathrm{Im}(z^2) = 2xy.$$

Знайдемо частинні похідні функцій u і v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - y^2)'_x = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - y^2)'_y = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = (2xy)'_x = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = (2xy)'_y = 2x.$$

На всій площині xOy маємо рівності $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$, отже функція $w = z^2$ аналітична на всій комплексній площині.

П2. З'ясуємо диференційовність функції $w = |z|\cdot z$. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$w = |z|\cdot z = \sqrt{x^2+y^2}\cdot(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot x + i\sqrt{x^2+y^2}\cdot y;\ u = \sqrt{x^2+y^2}\cdot x,\ v = \sqrt{x^2+y^2}\cdot y.$$

Знайдемо частинні похідні функцій u і v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot x + \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot x = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Умови Коші-Рімана не виконуються, отже функція $w=|z|\cdot z$ не диференційовна. □

Властивості аналітичних функцій

Означення похідної функції комплексної змінної дозволяє перенести на аналітичні функції ряд властивостей диференційованих функцій дійсної змінної.

Теорема 5. ○

Якщо $f(z)$ і $g(z)$ – аналітичні функції в області D, то сума, добуток і частка (в точках, де $g(z)\neq 0$) цих функцій є також аналітична функція в області D, причому

$$\big(f(z)\pm g(z)\big)'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$\big(f(z)\cdot g(z)\big)'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z)\neq 0). \text{ ●}$$

Теорема 6. ○

Якщо $w=g(z)$ – аналітична функція в області D площини z, а в області значень E функції $g(z)$ на площині w визначена аналітична функція $\omega=f(w)$, то складена функція $F(z)=f(g(z))$ аналітична в області D, причому $F'(z)=f'(w)\cdot g'(z)$. ●

Теорема 7. ○

Якщо в області D задана аналітична функція $w=f(z)$, причому $|f'(z)|\neq 0$, то в області E значень функції $f(z)$ визначена обернена функція $z=\varphi(w)$, яка є аналітичною функцією змінної w, і має місце співвідношення

$$f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}. \text{ ●}$$

Теорема 8. ○

Функції z^n $(n\in N)$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ аналітичні на всій комплексній площині C. Функція $\operatorname{tg} z$ аналітична в усіх точках $z\in C$, $z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$. Функція $\operatorname{th} z$ аналітична в усіх точках $z\in C$, $z\neq\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)i, k\in Z$. Для функцій $\operatorname{Ln} z$, a^z, z^α можна вибрати однозначну гілку, яка є аналітичною в околі кожної точки $z\neq 0$. ●

Доведення. ►

Для функції $w=z^n$ обчислимо похідну за означенням

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^n+nz^{n-1}\Delta z+n\cdot(n-1)z^{n-2}\Delta z^2+...+\Delta z^n-z^n}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(nz^{n-1}+n\cdot(n-1)z^{n-2}\Delta z+...+\Delta z^{n-1}\right)=nz^{n-1}.$$

Отже, $(z^n)'=nz^{n-1}$.

Функції e^z, $\sin z$, $\cos z$ визначені за допомогою рядів, збіжних на всій комплексній площині. Похідні цих функцій можна знайти почленним диференціюванням відповідних рядів

$$(e^z)'=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+...\right)'=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+...=e^z,$$

$$(\cos z)'=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...\right)'=-z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+...=-\sin z,$$

$$(\sin z)' = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!}\ldots\right)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \cos z.$$

За теоремою 5 знайдемо похідні функцій $\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}$, $\mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}$:

$$(\mathrm{tg}\, z)' = \frac{1}{\cos^2 z},\ (\mathrm{ctg}\, z)' = -\frac{1}{\sin^2 z},\ (\mathrm{sh}\, z)' = \mathrm{ch}\, z,\ (\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh}\, z,\ (\mathrm{th}\, z)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z},\ (\mathrm{cth}\, z)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 z}.$$

За теоремою 6 знайдемо:

$$(\mathrm{Ln}\, z)' = \frac{1}{z},\ (a^z)' = a^z \ln a,\ (z^\alpha)' = \alpha z^{a-1}.\ ◄$$

<u>Похідна *k*-го порядку</u> функції $f(z)$ позначається $f^{(k)}(z)$ і визначається рівністю:

$$f^{(k)}(z) = \left(f^{(k)}(z)\right)'.$$

Теорема 9. ○

Функція $f(z)$ аналітична в області D має в цій області похідні всіх порядків

$$f'(z),\ f''(z),\ f'''(z),\ \ldots,\ f^{(k)}(z),\ \ldots\ .\ ●$$

Спряжені гармонічні функції

Нехай функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналітична в області D, тоді для всіх точок області D виконуються умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дійсні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$, що задовольняють на області D умовам Коші-Рімана, називають <u>спряженими</u> одна до одної на D.

Аналітична в області D функція має в цій області похідні всіх порядків, тому функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ мають в області D неперервні частинні похідні будь-якого порядку.

Продиференціюємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ по змінній x, а рівність $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ по змінній y. Отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

За теоремою про мішані похідні $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, тому додавши отримані рівності маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Отриману рівність називають <u>рівнянням Лапласа</u>.

Аналогічно можна отримати рівність

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Дійсна функція $u(x,y)$, яка має в області D неперервні частинні похідні другого порядку, що задовольняють рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, називається <u>гармонічною</u> в області D. Позначимо вираз $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, його називають <u>оператор Лапласа</u>. Тоді рівняння Лапласа для функції u запишеться так: $\Delta u = 0$.

Таким чином, дійсна і уявна частини диференційовної в області D функції є в цій області спряженими гармонічними функціями.

Теорема 10. ○

Для будь-якої гармонічної в зв'язній області D функції $u(x,y)$ існує єдина з точністю до довільної сталої, спряжена до $u(x,y)$ на області D функція $v(x,y)$ така, що

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

аналітична на D. ●

Доведення. ►

Нехай $u(x,y)$ гармонічна на D. Позначимо $-\dfrac{\partial u}{\partial y}=P(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=Q(x,y)$.

З рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

А це означає, що вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $v(x,y)$, і для цієї функції виконуються рівності

$$\frac{\partial v}{\partial x}=P(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отже, існує функція $v(x,y)$ спряжена до $u(x,y)$. З точністю до сталого доданка функція $v(x,y)$ може бути знайдена за допомогою криволінійного інтеграла

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C,$$

причому цей інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування $L\in D$, що з'єднує точки (x,y) і (x_0,y_0). ◄

Оскільки вказаний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, то вибравши шлях у вигляді ламаної, ланцюги якої паралельні координатним осям, отримаємо робочу формулу

$$v(x,y)=\int_{(x_0;y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C=-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt+C.$$

Аналогічно, якщо задана уявна частина $v(x,y)$ аналітичної функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то її дійсна частина може бути відновлена за формулою

$$u(x,y)=\int_{(x_0;y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+C=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial y}(t,y_0)dt-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)dt+C.$$

Якщо в задачі задано значення $f(x_0+iy_0)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)$, то з усіх первісних необхідно відібрати ту, що задовольняє вказану умову. В результаті останні формули набувають вигляду

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt,\quad u(x,y)=u(x_0,y_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial y}(t,y_0)dt-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)dt.$$

Наприклад:

П1. Відновимо аналітичну функцію $f(z)=u+iv,$ якщо

$$u=x^3-3xy^2-x,\ f(0)=0.$$

Впевнимося, що функція $u(x,y)$ є гармонічною.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2-1,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x.$$

Звідси слідує, що $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-6x=0$, тобто функція $u(x,y)$ гармонічна і $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$.

Використаємо формулу:

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt.$$

З умови задачі $f(0)=0$ слідує, що $x_0=0,\ y_0=0,\ \operatorname{Im} f(0)=0$. Тоді розрахункова формула для даної задачі набуде вигляду:

$$v(x,y)=0+\int_0^x -6t\cdot 0dt+\int_0^y(3x^2-3t^2-1)dt=\left.\left(3x^2t-\frac{3t^2}{3}-t\right)\right|_0^y=3x^2y-y^3-y.$$

Отже $f(z)=(x^3-3xy^2-x)+i(3x^2y-y^3-y),\ z=x+iy.$ Групуючи відповідні доданки, остаточно отримаємо:

$$f(z)=x^3-3xy^2+3x^2iy-iy^3-(x+iy)=z^3-z.\ \square$$

Геометричний зміст похідної

Нехай функція $w=f(z)$ визначена в деякому околі S точки z_0 і диференційовна в цій точці, причому $f'(z_0)\neq 0$.

Надамо аргументу z_0 приросту $\Delta z=\rho e^{i\varphi}$, причому так, щоби точка $z=z_0+\Delta z$ належала околу S.

Тоді значення функції $w_0=f(z_0)$ отримає приріст Δw.

За допомогою функції $w=f(z)$ окіл S площини z перейде в деяку область S' площини w. Область S' складається із всіх точок $w=w_0+\Delta w$, де приріст Δw відповідає всім можливим приростам Δz.

Із означення похідної випливає

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\Leftrightarrow\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z_0)\right)=0\Leftrightarrow\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z_0)=\alpha(\Delta z),\ \lim_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0,$$

звідси

$$\Delta w=f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z,\ \alpha(\Delta z)\to 0\ (\Delta z\to 0).$$

Другий доданок правої частини цієї формули $\alpha(\Delta z)\Delta z$ прямує до нуля при $\Delta z\to 0$ швидше ніж перший доданок $f'(z_0)\Delta z$, якщо $f'(z_0)\neq 0$. Тому перший член є головним, називається <u>диференціалом</u> функції $w=f(z)$ і позначається $df(z_0)=f'(z_0)\Delta z$. Таким чином, при досить малих Δz з точністю до нескінченно малих вищого порядку порівняно з Δz можемо записати наближену рівність

$$\Delta w\approx f'(z_0)\Delta z.$$

Запишемо число $f'(z_0)$ в показниковій формі:

$$f'(z_0)=re^{i\theta}.$$

Тоді отримаємо

$$\Delta w\approx f'(z_0)\Delta z=re^{i\theta}\cdot\rho e^{i\varphi}=r\rho e^{i(\varphi+\theta)}.$$

Звідси маємо

$$|\Delta w|\approx r\rho=r\cdot|\Delta z|,\quad \operatorname{Arg}(\Delta w)\approx\varphi+\theta=\operatorname{Arg}(\Delta w)+\theta.$$

Таким чином, щоб уявити куди переводиться функцією $w=f(z)$ точка $z=z_0+\Delta z$ необхідно: 1) перенести круг S і розмістити його з центром в точці w_0; 2) повернуть круг на кут $\theta=\arg f'(z_0)$; 3) розтягнути його в $r=|f'(z_0)|$ раз. Кожна точка $z=z_0+\Delta z$ при цьому перейде в деяку точку, яку потім необхідно змістити на величину $\alpha(\Delta z)\Delta z$ – нескінченно малу вищого порядку ніж Δz.

Нехай γ_1 і γ_2 – гладкі криві, що виходять з точки z_0 і нехай дотичні до цих кривих утворюють з віссю Ox кути α_1 і α_2. Тоді образи цих кривих γ_1' і γ_2' на площині w виходять з точки w_0 і мають дотичні, які утворюють з віссю Ox кути $\alpha_1=\alpha_1'+\theta$ і $\alpha_2=\alpha_2'+\theta$.

Звідси випливає, що $\alpha_2' - \alpha_1' = \alpha_2 - \alpha_1$, тобто відображення, яке здійснює функція $w = f(z)$, зберігає кути із збереженням напрямку їх відліку.

Крім того, дане відображення здійснює в кожній точці z_0, де $f'(z_0) \neq 0$, розтяг, який не залежить від напрямку.

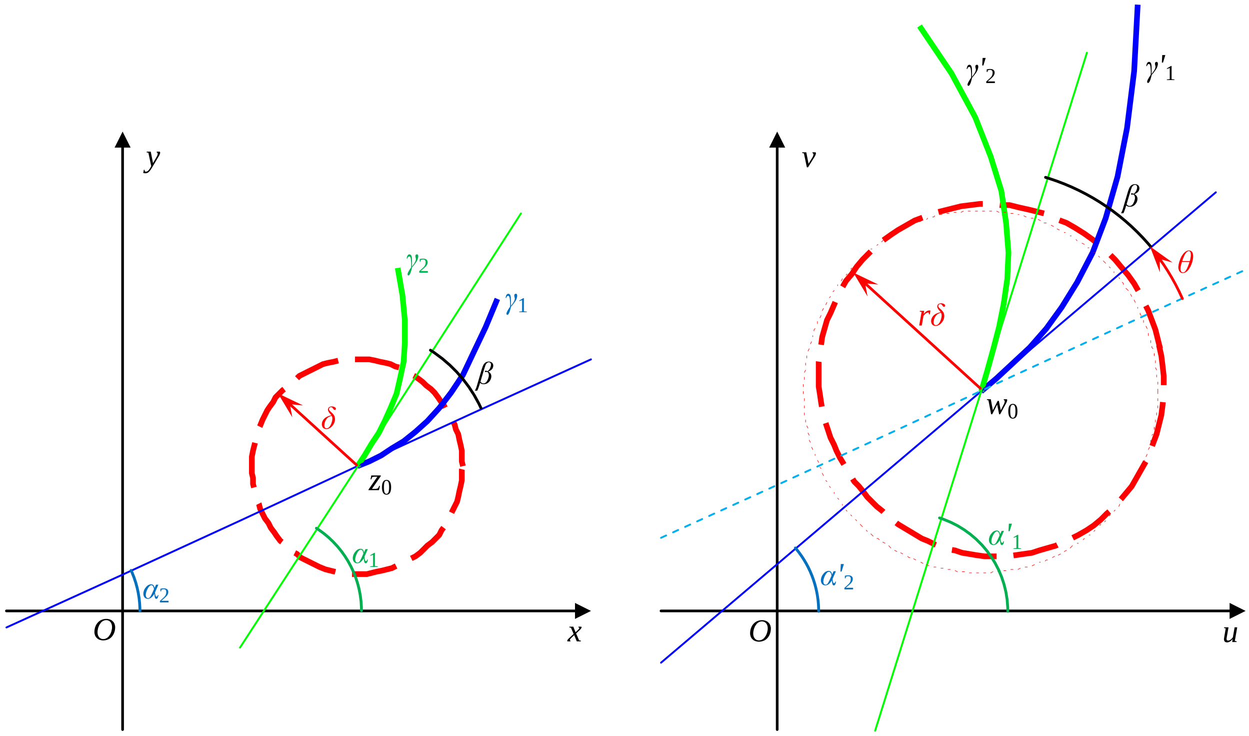
Відображення, яке (з точністю до нескінченно малої вищого порядку) має властивість збереження кутів та постійності розтягів називається конформним відображенням.

Таким чином нами доведена

Теорема 11. ○

Відображення за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$ є конформним в усіх точках z, де $f'(z) \neq 0$. ●

При цьому $\theta = \arg f'(z_0)$ визначає кут повороту в околі точки z_0, а величина $r = |f'(z_0)|$ – коефіцієнт розтягу.



Зауваження. --

Перейшовши в рівності

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z, \ \ \alpha(\Delta z) \to 0 \ \ (\Delta z \to 0)$$

до границі при $\Delta z \to 0$, отримаємо, що $\Delta w \to 0$ коли $\Delta z \to 0$. Це означає, що диференційовна в точці z_0 функція $w = f(z)$ неперервна в цій точці. --