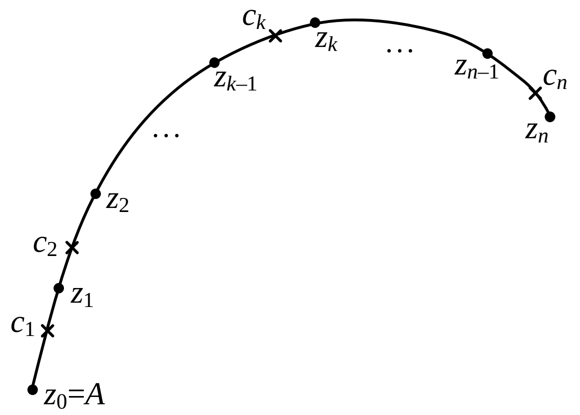
Інтегрування функції комплексної змінної. Теорема Коші. Інтегральна Формула Коші.

Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай в комплексній площині задана кусково-гладка крива L з початковою точкою A і кінцевою точкою B. І нехай в кожній точці z кривої L визначена функція $w = f(z)$.



Розіб'ємо криву L на частини точками $A = z_0,\ z_1,\ ...,\ z_{i-1},\ z_i,\ ...,\ z_n = B$.

В кожному елементі розбиття виберемо довільну точку $c_k \in z_{k-1}z_k$ $(k = 1,2,...,n)$ і утворимо <u>інтегральну суму</u>

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Позначимо $\lambda = \max|z_k - z_{k-1}|$.

Якщо існує границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$ і не залежить від способу розбиття кривої L на частини та вибору в них точок c_k, то цю границю називають <u>інтегралом функції $f(z)$ по кривій L</u> від точки A до точки B і позначають

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Теорема 1. Достатня ознака існування інтеграла. ○

Якщо функція $f(z)$ неперервна на кривій L, то $\int_L f(z)\,dz$. ●

Обчислення інтеграла

Нехай $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – неперервна функція комплексної змінної $z = x + iy$, визначена в області D і L – гладка крива, що лежить в D, і визначена рівнянням

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

або, що те саме, двома рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Напрямок на L відповідає зміні параметра t від α до β ($A = z(\alpha), B = z(\beta)$).

Інтеграл від функції $f(z)$ вздовж кривої L визначається так:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u+iv)\,(dx + idy) = \int_L (u\,dx + u\,idy + iv\,dx + iv\,idy) =$$

$$= \int_L (u\,dx + u\,idy + iv\,dx - v\,dy) = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy) =$$

$$= \int_\alpha^\beta (u(x(t),y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),y(t))\cdot y'(t))\,dt + i\int_\alpha^\beta (v(x(t),y(t))\cdot x'(t) + u(x(t),y(t))\cdot y'(t))\,dt.$$

Таким чином, з даної рівності видно, що інтеграл по комплексній змінній є сумою двох криволінійних інтегралів, і його обчислення зводиться до обчислення звичайних інтегралів.

Враховуючи, що $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, то останню рівність можна коротко записати так:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt.$$

З властивостей криволінійного інтеграла випливають властивості інтеграла функції комплексної змінної.

Властивості інтеграла ○

1. Лінійність інтеграла

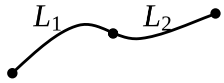
$$\int_L \left(Af(z)+Bg(z)\right)dz = A\int_L f(z)dz + B\int_L g(z)dz,$$ де A і B – константи.

2. Зміна орієнтації

$$\int_L f(z)dz = -\int_{-L} f(z)dz,$$

де $-L$ – протилежний напрямок обходу кривої L.

3. Адитивність інтеграла



$$\int_{L_1+L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

4. Оцінка інтеграла

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml,$$

де $|f(z)| \le M$; l – довжина дуги L. ●

Наприклад:

П1. Обчислимо інтеграл $\int_L \frac{dz}{z-z_0}$, де L – коло з центром в точці z_0, орієнтоване проти годинникової стрілки.

Запишемо рівняння L у формі $z = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \le t < 2\pi$, де ρ – радіус кола L. Тоді

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{(z_0+\rho e^{it})' dt}{z_0+\rho e^{it}-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

П2. Обчислимо інтеграл $\int_L (z-z_0)^n dz$ при цілому $n \ne -1$, якщо L – коло з центром в точці z_0, орієнтоване проти годинникової стрілки.

Маємо

$$\int_L (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (z_0+\rho e^{it}-z_0)^n (z_0+\rho e^{it})' dt = \int_0^{2\pi} \rho^n e^{\mathrm{int}} \cdot \rho i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t} dt = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$$= i\rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{i\rho^{n+1}}{i(n+1)}\left(e^{2\pi i(n+1)} - e^0\right) = \frac{i\rho^{n+1}}{i(n+1)}(1-1) = 0.$$ □

Теорема Коші

Теорема 2. Теорема Коші. ○

Якщо D – однозв'язна область площини z і $f(z)$ – однозначна аналітична в цій області функція, то для будь-якої замкненої кусково-гладкої кривої L, що лежить в області D, інтеграл вздовж L дорівнює 0, тобто

$$\oint_L f(z)\,dz = 0.$$ ●

Доведення. ►

Нехай крива L визначена рівняннями

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

і також $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тоді

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_L u\,dx - v\,dy + i\oint_L v\,dx + u\,dy.$$

За умовою теореми $f(z)$ – аналітична функція, тоді функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ мають неперервні частинні похідні, пов'язані умовами Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Застосуємо до кожного із доданків інтеграла формулу Гріна:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy .$$

Отримаємо

$$\oint_L u\, dx - v\, dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy = 0 ,$$

$$\oint_L v\, dx + u\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy = 0 .$$

Отже

$$\oint_L f(z)\, dz = 0 + i0 = 0 . \blacktriangleleft$$

Наслідками з цієї теореми є наступні твердження.

Наслідок. ○

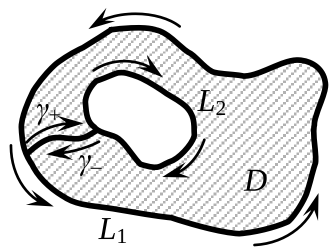
Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл від $f(z)$ не залежить від шляху інтегрування. Тобто, якщо криві L_1 і L_2 лежать в області D і мають спільний початок і кінець, то

$$\int_{L_1} f(z)\, dz = \int_{L_2} f(z)\, dz . \bullet$$

Теорема 3. ○

Нехай D – обмежена однозв'язна область з кусково-гладкою межею L і нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $D \cup L$, тоді

$$\oint_L f(z)\, dz = 0 . \bullet$$



Твердження цієї теореми залишається справедливим і для багатозв'язних областей. Нехай, наприклад, D – двозв'язна область обмежена кусково-гладким контуром $L = L_1 + L_2$ орієнтованим позитивно. З'єднаємо контури L_1 і L_2 гладкою кривою γ. Орієнтуємо γ двома протилежними способами: γ_+, γ_-. В результаті отримаємо нову область D' – однозв'язну, обмежену орієнтованим контуром $L_1 + \gamma_+ + L_2 + \gamma_-$.

Отже, якщо область D обмежена зовні контуром L_0 (орієнтованим проти годинникової стрілки), а з середини контурами $-L_1$, $-L_2$, …, $-L_n$ (орієнтованими за годинниковою стрілкою), то

$$\oint_{L_0} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{-L_k} f(z)\, dz = 0 .$$

Звідси

$$\oint_{L_0} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)\, dz .$$

Зокрема, при $n = 1$

$$\oint_{L_0} f(z)\, dz = \oint_{L_1} f(z)\, dz .$$

Наприклад:

П1. Якщо в задачах попереднього прикладу замінити коло L з центром в точці z_0 будь-яким замкненим кусково-гладким контуром L', що містить у своїй внутрішності точку z_0 і орієнований проти годинникової стрілки, то рівності збережуться. Тобто

$$\int_{L'} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i , \quad \int_{L'} (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n \neq -1). \square$$

Інтеграл і первісна

Аналітична функція $F(z)$ називається <u>первісною</u> для $f(z)$ в області D, якщо $F'(z)=f(z),\ z\in D$. Для аналітичних функцій $f(z)$ в D має місце аналог основної формули інтегрального числення.

Теорема 4. Формула Ньютона-Лейбніца. ○

Якщо $f(z)$ аналітична функція в однозв'язній області D, то вона має в цій області первісну $F(z)$, причому справедлива формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1)=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}. \bullet$$

Справедливість цієї теореми випливає з незалежності інтеграла аналітичної функції від форми шляху інтегрування. В такому разі вираз $f(z)dz$ є диференціалом деякої функції $F(z)$, яку можна знайти за формулою

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(t)\,dt + C.$$

Звідси випливає, що для аналітичних функцій справедливими залишаються звичайні формули інтегрування.

Наприклад:

П1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(z^2+5z+\sin\frac{z}{2}\right)dz=\left(\frac{z^3}{3}+\frac{5z^2}{2}-2\cos\frac{z}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}+\frac{5\pi^2}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}-(0+0-2\cos 0)=$

$$=\frac{\pi^3}{3}+\frac{5\pi^2}{2}+2. \square$$

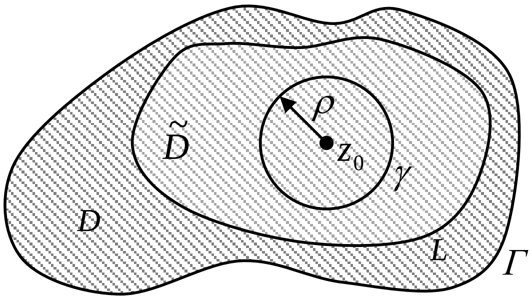
Інтегральна формула Коші

Теорема 5. ○

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, обмеженій замкненим контуром Γ, а z_0 – внутрішня точка цієї області. Нехай L – кусково-гладкий замкнений контур, що міститься в D і має точку z_0 у своїй внутрішності. Тоді має місце інтегральна формула Коші

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \bullet$$

Доведення. ►



Позначимо $\tilde{D}$ замкнену область обмежену контуром L і розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Функція $\varphi(z)$ аналітична в усіх точках області $\tilde{D}$, за виключенням точки $z=z_0$. Опишемо навколо точки z_0 додатно орієнтоване коло γ радіуса ρ. За теоремою 3 маємо

$$\oint_L \varphi(z)\,dz=\oint_\gamma \varphi(z)\,dz,$$

причому значення інтеграла

$$\oint_\gamma \varphi(z)\,dz=\oint_{|z-z_0|=\rho}\varphi(z)\,dz$$

насправді не залежить від ρ. З властивості 4 інтеграла маємо оцінку

$$\left|\oint_\gamma \varphi(z)\,dz\right|\le M_\rho\cdot l_\gamma,$$

де $l_\gamma = 2\pi\rho$ – довжина кола γ, а

$$M_\rho = \max_{z\in\gamma}|\varphi(z)| = \max_{z\in\gamma}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \max_{z\in\gamma}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{\rho} = \frac{1}{\rho}\max_{z\in\gamma}|f(z)-f(z_0)|.$$

Отже

$$\left|\oint_\gamma \varphi(z)\,dz\right| \le \frac{1}{\rho}\max_{z\in\gamma}|f(z)-f(z_0)|\cdot 2\pi\rho = 2\pi\max_{z\in\gamma}|f(z)-f(z_0)|.$$

Функція $f(z)$ аналітична, отже, неперервна на D, тому коли $\rho = |z-z_0| \to 0$, то $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) \to 0$, а значить і $\max\limits_{z\in\gamma}|f(z)-f(z_0)| \to 0$.

Значить $\lim\limits_{\rho\to 0}\left|\oint\limits_\gamma \varphi(z)\,dz\right| = 0$. Оскільки цей інтеграл не залежить від ρ, то остаточно маємо

$$\oint_\gamma \varphi(z)\,dz = 0, \text{ отже і } \oint_L \varphi(z)\,dz = 0.$$

Інтеграл в правій частині формули Коші запишемо у вигляді

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_L \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_L \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_L \varphi(z)\,dz + f(z_0)\oint_L \frac{dz}{z-z_0} = 0 + f(z_0)\cdot 2\pi i$$

(див. приклад до теореми 3).

Звідси

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \blacktriangleleft$$

Наприклад:

П1. Обчислимо інтеграл $\oint\limits_L \frac{\sin z}{z^2+1}dz$, якщо L – коло $|z-i|=1$ орієнтоване проти годинникової стрілки.

Заданий інтеграл можна записати у вигляді

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2+1}dz = \oint_L \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)}dz.$$

Точка $z = i$ знаходиться у внутрішності контуру L, а точка $z = -i$ лежить зовні цього контуру. Розглянемо функцію $f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$. Ця функція аналітична в області обмеженій контуром L, тому за формулою Коші маємо

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2+1}dz = \oint_L \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)}dz = \oint_L \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i\cdot f(i) = 2\pi i\cdot\frac{\sin i}{i+i} = \pi\sin i = \pi i\,\mathrm{sh}1. \ \square$$

Як і у випадку теореми Коші теорему 5 можна переформулювати так.

Теорема 6. ○

Нехай D – обмежена однозв'язна область з кусково-гладкою межею L і нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $\overline{D} = D\cup L$, а z_0 – внутрішня точка області D, тоді справедлива формула Коші

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \ \bullet$$

Зауваження 1. ○ Формула Коші залишається справедливою і у випадку, коли область D є багатозв'язною. Міркування при цьому аналогічні як для теореми 3. ●

Зауваження 2. ○ Якщо точка z_0 лежить зовні контуру L, то функція $\frac{f(z)}{z-z_0}$ аналітична в області D, і за теоремою Коші $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0$. ●