Ряди в комплексній області. Ряд Лорана.

Нескінченна диференційовність аналітичної функції

Теорема 1. ○

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D, обмеженій кусково-гладкою межею L, і неперервна в $\overline{D} = D \cup L$, тоді в будь-якій внутрішній точки z_0 області D функція $f(z)$ має похідні всіх порядків $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, $f'''(z_0)$, …, $f^{(n)}(z_0)$, …, причому справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}} dz \quad (n = 1,2,\ldots). \bullet$$

Доведення. ▶

При виконанні умов теореми за формулою Коші для точок z_0 і z_1, що лежать у внутрішності області D, маємо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_1} dz.$$

Покажемо існування границі

$$f'(z_0) = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \left(\frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \frac{f(z)}{z_1 - z_0} \cdot \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \frac{f(z)}{z_1 - z_0} \cdot \frac{z - z_0 - (z - z_1)}{(z - z_1)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \frac{f(z)}{z_1 - z_0} \cdot \frac{z_1 - z_0}{(z - z_1)(z - z_0)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_0)} dz =$$

додамо і віднімемо під інтегралом вираз $\dfrac{f(z)}{(z - z_0)^2}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \left(\frac{f(z)}{(z - z_0)^2} + \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_0)} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \left(\frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_0)} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{z_1 \to z_0} \oint_L \frac{f(z)\overbrace{(z_1 - z_0)}^{\to 0}}{(z - z_1)(z - z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Отже,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

По індукції тоді можна показати, що

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}} dz. \blacktriangleleft$$

Нехай тепер λ – довільна кусково-гладка орієнтована крива, не обов'язково замкнена, і $\varphi(z)$ – неперервна функція, визначена вздовж кривої λ. Тоді вираз

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz$$

називається <u>інтегралом типу Коші</u>. Цей вираз визначає собою аналітичну функцію $F(z_0)$, визначену зовні кривої λ. Аналітичність функції $F(z_0)$ доводиться аналогічно до теореми 1.

Числові ряди

Нехай задана послідовність комплексних чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots$$

(коротко позначають (a_k)). Тоді вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

називають <u>числовим рядом з комплексними членами</u> або просто рядом.

Скінченну суму виду

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

називають <u>n-ою частинною сумою</u> ряду.

Ряд називають <u>збіжним</u>, якщо збіжна послідовність його частинних сум, тобто якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S при цьому називають <u>сумою ряду</u>. Для збіжного ряду $S = S_n + r_n$, де

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

називають n-им залишком ряду.

Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює ∞, то ряд називають <u>розбіжним</u>.

Теорема 2. ○

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, де $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються дійсні ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ \text{ і } \ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k . \ \bullet$$

Доведення. ►

Позначимо частинні суми

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ \text{ і } \ \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k ,$$

тоді $S_n = \sigma_n + i\tau_n$, і тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + i \lim_{n\to\infty} \tau_n .$$

Звідси і випливає справедливість теореми. ◄

Ця теорема дозволяє звести дослідження комплексних рядів до рядів дійсних. Зокрема, з неї легко випливає

Теорема 3. Необхідна умова збіжності ряду. ○

n-ий член будь-якого збіжного ряду прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \ \bullet$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ називають <u>абсолютно збіжним</u>, якщо збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Можна показати, що абсолютно збіжний ряд збігається, та має цілий ряд інших властивостей аналогічних до абсолютно збіжних рядів з дійсними членами (наприклад, такі ряди дозволяють довільну перестановку членів).

Таким чином, будь-яка достатня ознака збіжності додатного дійсного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ (наприклад, ознака Д'Аламбера чи ознака Коші) є водночас достатньою ознакою абсолютної збіжності комплексного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Функціональні ряди. Рівномірна збіжність

Нехай в області D визначена послідовність функцій комплексної змінної $\left(f_n(z)\right)$. Тоді вираз виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

називають функціональним рядом.

При фіксованому значенні $z_0 \in D$ даний ряд перетворюється на числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Якщо для кожного значення z_0 із області D відповідний числовий ряд збігається, то будемо казати, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається в області D. В цьому випадку його сума визначається в D як деяка функція $F(z)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ називається рівномірно збіжним в області D до функції $F(z)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати номер $N(\varepsilon)$, такий що для будь-якої точки z із D і для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left| F(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon .$$

Відмітимо, що у випадку рівномірної збіжності номер N залежить лише від ε і не залежить від z в усій області D.

Теорема 4. Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності. ○

Якщо існує збіжний дійсний числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, такий, що члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ задовольняють нерівності $\left| f_n(z) \right| < c_n$ для всіх $z \in D$ і для всіх $n = 1,2,\ldots$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ в області D збігається абсолютно і рівномірно. ●

Властивості рівномірно збіжних рядів

Теорема 5. ○

Якщо функції $f_n(z)$ неперервні в області D, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається в цій області рівномірно до функції $F(z)$, то функція $F(z)$ – неперервна в області D. ●

Теорема 6. ○

Якщо функції $f_n(z)$ неперервні в області D, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається в цій області рівномірно до функції $F(z)$, то інтеграл функції $F(z)$ по довільній кусково-гладкій кривій L, що повністю лежить в області D, можна обчислювати почленним інтегруванням ряду

$$\int_L F(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)dz . \bullet$$

Теорема 7. Теорема Вейєрштрасса 1. ○

Нехай функції $f_n(z)$ аналітичні в області D, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збігається в будь-якій замкненій підобласті $\overline{D'}$ області D до функції $F(z)$. Тоді

1) $F(z)$ аналітична в області D;

2) похідну $F^{(k)}(z)$ можна отримати по членним диференціюванням ряду

$$F^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z);$$

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ рівномірно збіжний в будь-якій замкненій підобласті $\overline{D'}$ області D.

●

Теорема 8. Теорема Вейєрштрасса 2. ○

Нехай функції $f_n(z)$ аналітичні в області D обмеженій кусково-гладким контуром L і неперервні в $\overline{D}=D\cup L$. І нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збігається на L. Тоді ряд рівномірно збігається в $\overline{D}$. ●

Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots ,$$

де z – комплексна змінна, а c_n і z_0 – фіксовані комплексні числа. Постійні c_n називають коефіцієнтами, а z_0 – центром ряду.

Теорема 9. Теорема Абеля. ○

Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ збігається в точці $z_1 \neq z_0$, то він абсолютно збігається у всьому крузі $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, а в будь-якому замкненому крузі $|z-z_0|\le r$, де $r<|z_1-z_0|$, ряд збігається рівномірно. ●

Доведення. ►

За умовами теореми збігається числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n .$$

З необхідної умови збіжності ряду (теорема 3) тоді маємо, що $\lim_{n\to\infty} c_n(z_1-z_0)^n = 0$, а будь-яка збіжна послідовність обмежена, тому існує таке дійсне число M, що для всіх n

$$\left|c_n(z_1-z_0)^n\right| \le M .$$

Для точок замкненого круга $|z-z_0|\le r$ маємо:

$$\left|c_n(z-z_0)^n\right| = \left|c_n(z_1-z_0)^n\right| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \le M\cdot q^n \text{, де } q=\frac{r}{|z_1-z_0|}<1,$$

оскільки $r<|z_1-z_0|$. Отже, в точках цього круга члени ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ не перевищують членів збіжної геометричної прогресії із знаменником $0<q<1$. Тоді за ознакою Вейєрштрасса (теорема 4) даний степеневий ряд в точках круга $|z-z_0|\le r$ збігається абсолютно і рівномірно. Число r можна вибрати як завгодно близько до $|z_1-z_0|$, отже, ряд абсолютно збігається в будь-якій точці круга $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. ◄

Наслідок 1. ○

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ розбігається в точці $z_1 \neq z_0$, то він розбігається і в будь-якій точці z, для якої $|z-z_0|>|z_1-z_0|$. ●

Доведення. ►

Припустимо, що ряд збігається в якійсь точці z_2, для якої $|z_2 - z_0| > |z_1 - z_0|$. Тоді за теоремою Абеля він має збігатися і в точці z_1, що суперечить припущенню. ◄

Наслідок 2. ○

Для будь-якого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ існує скінченне чи нескінченне число R, таке, що в крузі $|z - z_0| < R$ ряд збігається, а зовні цього круга розбігається. ●

Таке число R будемо називати <u>радіусом збіжності</u> степеневого ряду, а круг $|z - z_0| < R$ – його <u>кругом збіжності</u>. Зауважимо, що на колі $|z - z_0| = R$ питання збіжності ряду залишається відкритим.

Наприклад:

П1. Геометрична прогресія $1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$ абсолютно збіжна в крузі $|z| < 1$, а в будь-якому замкненому крузі $|z| \le r$, де $0 < r < 1$, вона збігається рівномірно. При $|z| > 1$ прогресія розбігається.

Цей факт випливає з теореми Абеля, якщо пригадати, що прогресія збігається для всіх дійсних $z = q$, для яких $0 \le |q| < 1$ і розбігається при $|q| < 1$. Можна також довести, що

$$1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \frac{1}{1 - z}.$$

П2. Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ збігається лише в точці $z = 0$. Для будь-якого дійсного додатного $z = x$ маємо:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^n x^n} = \lim_{n \to \infty} nx = \infty,$$

і за радикальною ознакою Коші рід розбіжний. За наслідком 1 з теореми Абеля він не може збігатися і ні для якого комплексного $z \ne 0$.

П3. Степеневий ряд $1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$ за ознакою Д'Аламбера

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|z^{n+1}| \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z^n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

збігається при будь-якому комплексному z. □

Отже для довільного степеневого ряду можливі три випадки:

1) ряд збігається лише в своєму центрі, тоді радіус збіжності $R = 0$, а круг збіжності вироджується в точку $z = z_0$;
2) для деяких значень z ряд збігається, а для деяких ні, тоді $0 < R < \infty$.
3) ряд збігається для всіх комплексних z, тоді будемо вважати, що $R = \infty$, а круг збіжності являє собою всю комплексну площину.

З теореми Абеля (теорема 9) та тереми Вейєрштрасса (теорема 7) випливають також наступні наслідки.

Наслідок 3. ○

Всередині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції. ●

Наслідок 4. ○

Степеневий ряд всередині круга збіжності можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число раз, причому радіус збіжності отриманих рядів дорівнюватиме радіусу збіжності початкового ряду. ●

Наслідок 5. ○

Степеневий ряд є рядом Тейлора для своєї суми. ●

Доведення. ►

Дійсно. Нехай $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + ... + c_n(z - z_0)^n + ...$.

Продиференціюємо цю рівність почленно, отримаємо:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_2(z-z_0)^2 + \ldots + nc_n(z-z_0)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(z) = 2c_2 + 3\cdot 2c_2(z-z_0) + \ldots + n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2} + \ldots,$$

. . . .

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z-z_0) + \ldots\ .$$

. . . .

Покладаючи в цих рівностях $z = z_0$, отримаємо:

$f(z_0) = c_0$, $f'(z_0) = c_1$, $f''(z_0) = 2c_2$, …, $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$, … .

Звідси

$c_0 = f(z_0)$, $c_1 = \dfrac{f'(z_0)}{1!}$, $c_2 = \dfrac{f''(z_0)}{2!}$, …, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, … .

Підставляючи знайдені коефіцієнти запишемо ряд у вигляді

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots\ .$$

Степеневий ряд такого виду називають рядом Тейлора функції $f(z)$. ◄

Наслідок 6. ○

Радіус збіжності R степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ можна знайти за формулою $R = \dfrac{1}{\rho}$, де $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ або $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$. ●

Ряд Тейлора

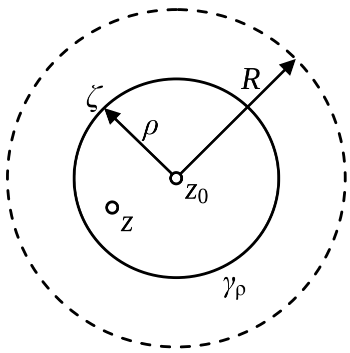
Отже степеневий ряд всередині круга збіжності визначає деяку аналітичну функцію. Природно поставити питання: чи можна функцію, аналітичну всередині деякого круга подати у вигляді суми степеневого ряду.

Теорема 10. ○

Функція $f(z)$, аналітична всередині круга $|z-z_0| < R$, може бути подана в цьому крузі збіжним степеневим рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, причому цей ряд визначається однозначно. ●

Доведення. ►

Виберемо довільну точку z всередині круга $|z-z_0| < R$ і побудуємо коло γ_ρ з центром в точці z_0 радіуса $\rho < R$, і таку, що містить точку z всередині. Очевидно, для будь-якої точки z даної області така побудова можлива. Оскільки точка z – внутрішня точка області $|z-z_0| < \rho$, в якій функція $f(z)$ є аналітичною, то за інтегральною формулою Коші маємо



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ .$$

Перетворимо підінтегральний вираз до вигляду

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\ .$$

Тут ми скористалися рівністю для суми геометричної прогресії, знаменник якої $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{z-z_0}{\rho} < 1$ для всіх точок z із внутрішності круга γ_ρ. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ збігається рівномірно по $\zeta \in \gamma_\rho$, оскільки члени цього ряду не перевищують членів збіжного числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{\rho^{n+1}}$ (ознака Вейєрштрасса).

Підставимо отриманий вираз в інтеграл і про інтегрувавши почленно, отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot (z-z_0)^n .$$

Позначивши $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, маємо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Оскільки вибрана точка z – довільна точка області, то даний ряд збігається всередині круга $|z-z_0| < R$. Отже, аналітична всередині круга $|z-z_0| < R$ функція $f(z)$ розкладається в цьому крузі в збіжний степеневий ряд.

Скориставшись формулами теореми 1 для похідних, коефіцієнти ряду запишемо у вигляді

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

Доведемо єдність розкладу. Припустимо існування іншого розкладу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n' (z-z_0)^n .$$

За наслідком 5 з теореми 9 цей ряд є рядом Тейлора для своєї суми, тому

$$c_n' = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = c_n .$$

Тим самим єдність коефіцієнтів розкладу доведена. ◄

Наведемо деякі Тейлорівські розклади елементарних функцій.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Дані ряди збігаються для всіх комплексних z і подані ними функції аналітичні на всій комплексній площині.

Головна гілка логарифмічної функції $\ln(1+z)$ аналітична при всіх z, що не лежать на промені $(-\infty;-1)$ дійсної осі, тому її ряд Тейлора

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots$$

збігається в крузі $|z| < 1$. В цьому ж крузі збігається розклад для головної гілки загальної степеневої функції

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} z^n + \ldots$$

Ряд Лорана

Ряд виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

де z_0 – фіксована точка комплексної площини, c_n – деякі фіксовані комплексні числа (коефіцієнти ряду), називають рядом Лорана.

З'ясуємо область збіжності цього ряду. Подамо його у вигляді суми двох рядів

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots$$

називають головною частиною, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots$$

називають правильною частиною ряду Лорана.

Областю збіжності ряду Лорана є спільна частина області збіжності його головної і правильної частини. Областю збіжності головної частини $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ є круг з центром в точці z_0 деякого радіуса R_1. Всередині круга збіжності цей ряд збігається до деякої аналітичної функції комплексної змінної

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n ,\ |z-z_0| < R_1 .$$

Для з'ясування області збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ зробимо заміну змінної, поклавши $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$. Тоді цей ряд набуває вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$, тобто являє собою звичайний степеневий ряд, збіжний всередині свого круга збіжності до деякої аналітичної функції $\varphi(\zeta)$ комплексної змінної ζ. Позначимо радіус збіжності отриманого степеневого ряду через $\frac{1}{R_2}$. Тоді

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n ,\ |\zeta| < \frac{1}{R_2} .$$

Повертаючись до старої змінної і $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$, отримаємо

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} ,\ |z-z_0| > R_2 .$$

Отже, областю збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ є область зовнішня до кола $|z-z_0| = R_2$.

Якщо $R_2 < R_1$, то існує спільна область збіжності цих рядів – кругове кільце $R_2 < |z-z_0| < R_1$, в якому ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ збігається до аналітичної функції

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n ,\ R_2 < |z-z_0| < R_1 .$$

Функція $f(z)$ має всі властивості суми степеневого ряду. Це означає, що ряд Лорана збігається всередині свого кільця збіжності до деякої функції $f(z)$, аналітичної у даному кільці.

Якщо $R_2 > R_1$, то головна і правильна частина ряду Лорана спільної області збіжності не мають. Отже, в такому випадку ряд Лорана ніде не збігається до якої-небудь функції.

Теорема 11. ○

Функція $f(z)$, аналітична в круговому кільці $R_2 <| z - z_0 |< R_1$, однозначно може бути подана в цьому кільці збіжним рядом Лорана. ●

Доведення теореми аналогічне до теореми 10, з тією особливістю, що інтегрування відбувається по двох колах, одне з яких охоплює вибрану точку z, а інше містить цю точку зовні себе. В доведенні використовується інтегральна формула Коші для багатозв'язної області.

Можна також показати, що коефіцієнти ряду Лорана можуть бути знайдені за інтегральними формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

де L – довільний замкнений контур, що лежить в кільці $R_2 <| z - z_0 |< R_1$ і містить точку z_0 всередині.

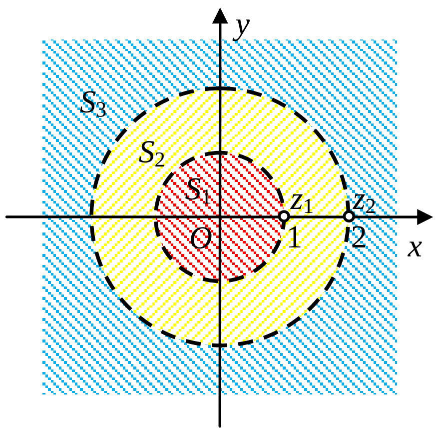
З теореми 11 випливає, що кільце збіжності ряду Лорана простягається до найближчої точки в якій функція $f(z)$ неаналітична. На межі цього кільця присутні як точки, в яких ряд збігається, так і точки, в яких він розбігається.

Наприклад:

П1. Знайдемо всі лоранівські розклади функції $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ по степенях z (з центром в точці $z_0 = 0$).

Знаменник дробу розкладається на множники у вигляді $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$, оскільки за теоремою Вієта корені многочлена: $z_1 + z_2 = 3$, $z_1 \cdot z_2 = 2$ $\Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = 2$.

Отже, функція $f(z)$ не існує, а значить і неаналітична в точках $z_1 = 1$ і $z_2 = 2$.



Побудуємо концентричні кола, що проходять через точки z_1 і z_2, з спільним центром в точці $z_0 = 0$. Ці кола розіб'ють площину на три області (кільця):

а) $S_1 = \{z : 0 \le | z |< 1\}$;

б) $S_2 = \{z : 1 <| z |< 2\}$;

в) $S_3 = \{z : 2 <| z |< \infty\}$.

Будемо вважати, що внутрішній радіус кільця S_1 дорівнює 0, а зовнішній радіус кільця S_3 дорівнює ∞.

У внутрішності кожного із цих кілець функція $f(z)$ аналітична, отже за теоремою 11 може бути подана у вигляді збіжного ряду Лорана. Розглянемо кожне кільце окремо. Але спочатку розкладемо дріб, що визначає функцію на елементарні дроби:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Будемо користуватися представленням для геометричної прогресії

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,\quad | z |< 1.$$

а) Кільце S_1.

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} =$$

В даному кільці $|z|<1$ і тим більше $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, тому кожен із дробів розкладається в збіжну геометричну прогресію. Тоді

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\ldots\right)+\left(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)z+\left(1-\frac{1}{8}\right)z^2+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\ldots\ .$$

б) Кільце S_2.

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=$$

В кільці S_2 маємо $1<|z|<2$, тому як і раніше $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, однак $|z|>1$, тому з знаменника другого дробу винесемо за дужки z і скористаємося тим, що тоді $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$. Отримаємо

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\ldots\right)-\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{z}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2-\ldots-\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\ldots\right)+\left(-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\ldots-\frac{1}{z^{n+1}}\ldots\right)=$$

$$=\ldots-\frac{1}{z^3}--\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2-\ldots-\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\ldots\ .$$

в) Кільце S_3.

В S_3 виконується нерівність $|z|>2$, тому із знаменників обох дробів виносимо за дужки z.

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{z}\right)^n+\ldots\right)-\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{z}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2-1}{z^2}+\frac{4-1}{z^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\ldots\ .$$

П2. Розкладемо в степеневий ряд функцію $\dfrac{1}{(1-z)^2}$. Дана функція неаналітична в точці $z_1=1$. Отже маємо розглядати два кільця: $S_1=\{z:0\le|z|<1\}$ і $S_2=\{z:1<|z|<\infty\}$.

В кільці S_1 для геометричної прогресії маємо $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$, а в S_2:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\ldots\ .$$

Продиференціюємо ці ряди. Тоді в S_1 отримаємо

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}+\ldots,$$

а в S_2:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}+\frac{3}{z^4}+\ldots\ .\ \square$$