Ізольовані особливі точки. Лишки

Нулі функції

Точка $z = z_0$ називається нулем функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці $z = z_0$, яка є нулем цієї функції, і не дорівнює тотожно нулю ні в якому околі точки z_0. Тоді всі коефіцієнти тейлорівського розкладу $f(z)$ з центром в z_0 не можуть дорівнювати 0, і цей розклад має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_n (z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + c_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \dots ,$$

де $c_n \neq 0$ і $n \geq 1$. Число n в цій формулі називають порядком нуля z_0.

Враховуючи, що коефіцієнти ряду Тейлора дорівнюють $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, можемо стверджувати, що порядок нуля співпадає з порядком молодшої відмінної від нуля похідної $f^{(n)}(z_0)$.

Звідси також випливає, що в околі свого нуля z_0 порядку n функція $f(z)$ може бути подана у вигляді

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

де

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - z_0) + c_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots ; \quad \varphi(z) = c_n \neq 0 ,$$

тобто функція $\varphi(z)$ – аналітична в точці z_0 і відмінна від нуля в цій точці.

Наприклад:

П1. В точці $z_0 = 0$ функція $f(z) = 1 - \cos z$ має нуль другого порядку, оскільки

$$f(z) = 1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots =$$

$$= z^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} + \dots \right)$$

П2. Функція $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$ має нулі першого порядку в точках $z = \dfrac{1}{\pi k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ та в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$. □

Ізольовані особливі точки

Точку z_0 називають ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо ця функція аналітична в деякому околі точки z_0 за виключенням самої точки z_0.

Отже, якщо z_0 – ізольована особлива точка, то існує виколотий окіл $0 < |z - z_0| < R$ («кільце» навколо z_0), в якому функція $f(z)$ аналітична. З попереднього параграфа випливає, що в цьому кільці функція $f(z)$ може бути подана у вигляді ряду Лорана. При цьому R – відстань від z_0 до найближчої іншої особливої точки, правильна частина ряду збігається в крузі $|z - z_0| < R$, а головна – скрізь, окрім точки $z = z_0$.

Розрізняють три типи ізольованих особливих точок в залежності від поведінки функції в їх околі.

Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ називається:

а) усувною особливою точкою, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \neq \infty$;

б) полюсом, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

в) істотно особливою точкою, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує.

Усувні особливі точки

Теорема 1. ○

Для того щоб ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ була усувною, необхідно і достатньо, щоб лоранівський розклад $f(z)$ в околі z_0 не містив головної частини, тобто $f(z)$ розкладалася в ряд Тейлора:

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+...+c_n(z-z_0)^n+... \text{ .} \bullet$$

Якщо припустити, що $f(z_0)=c_0$, то $f(z)$ буде аналітичною в крузі $|z-z_0|<R$ як сума степеневого ряду. Але за припущенням z_0 є особливою точкою $f(z)$, тоді або значення $f(z_0)$ не визначено, або $f(z_0)\neq c_0$. Однак ми можемо «усунути» цю особливість, поклавши $f(z_0)=c_0$. Це виправдовує термін «усувна» особлива точка.

Наприклад:

П1. Функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ не визначена при $z=0$. Але при $z\neq 0$ її можна подати у вигляді ряду

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-...+(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+...}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+... \text{ .}$$

Таким чином, $z=0$ є для функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ усувною особливою точкою. Звідси слідує також, що

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.$$

Якщо до визначити функцію $f(z)$, поклавши $f(0)=1$, то вона буде аналітичною і в точці $z=0$.

Полюси

Теорема 2. ○

Для того щоб ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ була полюсом, необхідно і достатньо, щоб головна частина лоранівського розкладу $f(z)$ в околі z_0 містила лише скінченну кількість членів:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+...+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+...,\ c_{-m}\neq 0 \text{ .} \bullet$$

При цьому номер m старшого від'ємного члена в цьому розкладі називають <u>порядком полюса</u> z_0.

Полюс першого порядку називають іще <u>простим полюсом</u>.

Теорема 3. ○

Функція $f(z)$, аналітична в деякому виколотому околі $0<|z-z_0|<R$, має полюс в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли функція

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

має нуль в цій точці. ●

В цьому твердженні передбачається, що в якості $g(z_0)$ приймається $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=0$ і, що функція $g(z)$ аналітична в деякому околі z_0 і тотожно не дорівнює в цьому околі 0.

Зауважимо також, що порядок полюса функції $f(z)$ дорівнює порядку нуля функції $g(z)$.

Теорема 4. ○

Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб у деякому виколотому околі $0<|z-z_0|<R$ цієї точки функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\psi(z),\ m\ge 1,$$

де $\psi(z)$ – аналітична в точці z_0 функція, причому $\psi(z_0)\ne 0$. ●

Наприклад:

П1. Функція $f(z)=\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z^2+1)(z+3)^3}$ має три полюси: $z_{1,2}=\pm i$ – першого порядку та $z_3=-3$ – третього порядку, оскільки ці точки є нулями відповідного порядку функції

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z^2+1)(z+3)^3}{(z-1)(z-2)}.$$

П2. Функцію $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$ можна подати у вигляді

$$f(z)=\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}=\frac{(z-i)(z+i)}{(z-i)^2(z+2i)(z-2i)}=\frac{(z-i)}{(z-i)^2}\psi_1(z).$$

У виколотому околі точки $z=i$ можемо записати

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\psi_1(z).$$

Отже, $z_1=i$ – полюс першого порядку функції $f(z)$.

Точки $z_{2,3}=\pm 2i$ також прості полюси цієї функції, оскільки

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}\psi_2(z),\ f(z)=\frac{1}{z+2i}\psi_3(z).$$

П3. З'ясуємо порядок полюса $z=0$ функції $f(z)=\dfrac{\sin^2 3z}{1-\dfrac{z^2}{2}-\cos z}$. Подамо функцію $f(z)$ у виколотому околі точки $z=0$ вигляді

$$f(z)=\frac{\sin^2 3z}{1-\dfrac{z^2}{2}-\cos z}=\frac{\left(3z-\dfrac{27z^3}{3!}+\dfrac{243z^5}{5!}-...\right)^2}{1-\dfrac{z^2}{2}-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+...\right)}=\frac{\left(3z-\dfrac{27z^3}{3!}+\dfrac{243z^5}{5!}-...\right)^2}{-\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+...}=$$

$$=\frac{\left(3z-\dfrac{27z^3}{3!}+\dfrac{243z^5}{5!}-...\right)^2}{-\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+...}=\frac{z^2\left(3-\dfrac{27z^2}{3!}+\dfrac{243z^4}{5!}-...\right)^2}{z^4\left(-\dfrac{1}{4!}+\dfrac{z^2}{6!}+...\right)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\left(3-\dfrac{27z^2}{3!}+\dfrac{243z^4}{5!}-...\right)^2}{-\dfrac{1}{4!}+\dfrac{z^2}{6!}+...}.$$

Отже, $z=0$ – полюс другого порядку функції $f(z)$. □

Істотно особливі точки

Теорема 5. ○

Для того щоб ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ була істотно особливою, необхідно і достатньо, щоб головна частина лоранівського розкладу $f(z)$ в околі z_0 містила нескінченну кількість членів:

$$f(z)=...+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+...+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+... .\ ●$$

Теорема 6. Сохоцького. ○

Якщо z_0 – істотно особлива точка функції $f(z)$, то для будь-якого комплексного числа A (скінченного чи нескінченного) можна знайти таку послідовність точок (z_n), яка збігається до z_0, що

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A. \bullet$$

Наприклад:

П1. Функція $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ має точку $z=0$ своєю істотно особливою точкою, оскільки лоранівський розклад $f(z)$, справедливий для всіх $z\neq 0$, має вигляд

$$e^{\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\ . \square$$

Лишки та їх застосування

Нехай z_0 – ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції $f(z)$. У виколотому околі цієї точки функція $f(z)$ може бути єдиним способом розкладена в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називається коефіцієнт c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ лоранівського розкладу $f(z)$ в околі точки z_0.

Позначають

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Коефіцієнти ряду Лорана можуть бути знайдені за інтегральними формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

де L – довільний замкнений контур, що лежить в кільці збіжності ряду і охоплює точку z_0.

Отже,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz,$$

де інтеграл обчислено в додатному напрямі по будь-якому замкненому контуру L, що охоплює єдину особливу точку $z=z_0$ і розташований в області аналітичності функції $f(z)$.

Зауважимо, що у випадку, коли z_0 є усувною особливою точкою, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$.

Взагалі, існує ряд випадків, коли можна вказати більш простий спосіб обчислення лишку, ніж застосування інтегральної формули.

1. Нехай точка z_0 є простим полюсом функції $f(z)$. Тоді в околі цієї точки має місце розклад

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots\ .$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(z-z_0)$ та перейдемо до границі при $z\to z_0$, отримаємо

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z).$$

В даному випадку функція $f(z)$ в околі точки z_0 може бути подана у вигляді відношення двох аналітичних функцій:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причому $\varphi(z_0)\neq 0$, а точка z_0 є нулем першого порядку функції $\psi(z)$, тобто

$$\psi(z)=\psi'(z_0)\cdot(z-z_0)+\frac{\psi(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\dots\,.$$

Підставимо вираз для функції $f(z)$ в попередню формулу для лишку, отримаємо

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot\frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)\cdot(z-z_0)+\frac{\psi(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\dots}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)+\frac{\psi(z_0)}{2}(z-z_0)+\dots}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Отже,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Наприклад:

П1. Розглянемо функцію $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$. Запишемо її у вигляді $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Особливі точки цієї функції $z_0=0$ і $z_1=\dfrac{\pi}{4}$.

В точці $z_0=0$ маємо $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z^2}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{4}{\pi}$. Тому $z_0=0$ – усувна особлива точка, значить $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

Точка $z_1=\dfrac{\pi}{4}$ є полюсом першого порядку. Тоді

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{16\sin\frac{\pi^2}{16}}{\pi^2}.\ \square$$

2. Нехай точка z_0 є полюсом порядку m функції $f(z)$. Тоді в околі цієї точки має місце розклад

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots+c_n(z-z_0)^n+\dots\,.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(z-z_0)^m$ та візьмемо похідну порядку $(m-1)$ від обох частин отриманої рівності. Перейдемо до границі при $z\to z_0$, остаточно отримаємо

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

Основна теорема про лишки

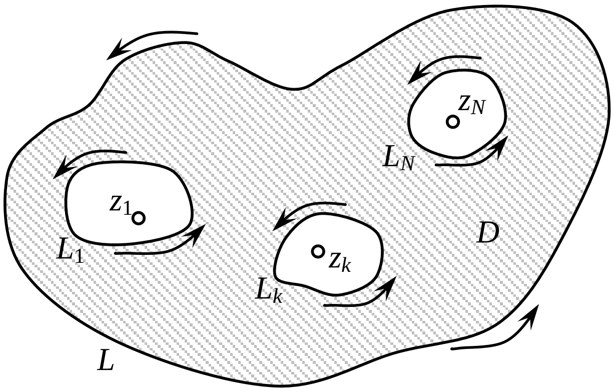
Теорема 7. Основна теорема про лишки. ○

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області D і неперервною на межі L області D, за винятком скінченного числа особливих точок $z_1,z_2,\dots,z_N\in D$, то

$$\oint_L f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).\ \bullet$$

Доведення. ►

Оточимо кожну з особливих точок z_k функції $f(z)$ замкненим контуром L_k, який не містить всередині інших особливих точок, окрім точки z_k. Всередині багатозв'язної області, що обмежена контуром L та всіма контурами L_k, функція $f(z)$ є всюди аналітичною. Тоді за теоремою Коші для багатозв'язної області маємо



$$\oint_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)\,dz.$$

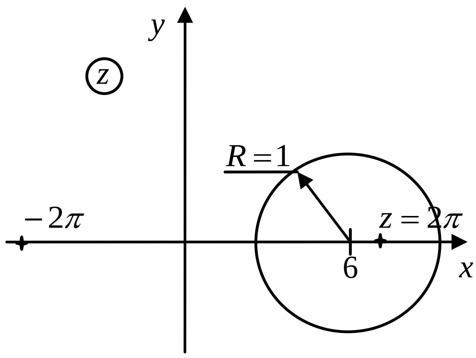
Оскільки

$$\oint_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

то звідси й випливає твердження теореми. ◄

Наприклад:

П1. Обчислимо інтеграл $\oint\limits_{|z-6|=1} \dfrac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$.



Оскільки $f(z)=\dfrac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}=\dfrac{\sin^3 z+2}{(z-2\pi)(z+2\pi)}$, то у внутрішніх точках круга $|z-6|\le 1$ розташована одна особлива точка підінтегральної функції $z=2\pi$.

Із того, що $\left.\left(\sin^3 z+2\right)\right|_{z=2\pi}= =\sin^3 2\pi+2=2\ne 0$ слідує, що точка $z=2\pi$ – полюс 1-го порядку.

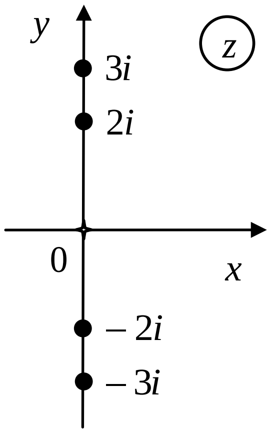
Оскільки підінтегральна функція аналітична у внутрішніх точках круга $|z-6|\le 1$ за виключенням особливої точки $z=2\pi$, то за теоремою про лишки можна записати $\oint\limits_{|z-6|=1} \dfrac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=2\pi} \dfrac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}$.

Обчислимо лишок в полюсі 1-го порядку $z=2\pi$:

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2} = \begin{vmatrix} \varphi(z)=\sin^3 z+2, \varphi(2\pi)=2; \\ \psi(z)=z^2-4\pi^2,\ \psi'(z)=2z, \psi'(2\pi)=4\pi \end{vmatrix} = \frac{\varphi(2\pi)}{\psi'(2\pi)} = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

Отже $\oint\limits_{|z-6|=1} \dfrac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz = 2\pi i \dfrac{1}{2\pi} = i$.

П2. Обчисліть інтеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.



Підінтегральна функція

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}=\frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+3i)(z-3i)}$$

у верхній півплощині має два полюси 1-го порядку $z_1=2i$ та $z_2=3i$.

Крім цього $z\cdot f(z)=\dfrac{z}{(z^2+4)(z^2+9)}\to 0$ при $z\to\infty$. Отже

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} + \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} \right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z^2+4)(z^2+9)} + \lim_{z\to 3i} \frac{z-3i}{(z^2+4)(z^2+9)} \right) = 2\pi i\left(\lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)(z^2+9)} + \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(z^2+4)(z+3i)} \right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{(2i+2i)((2i)^2+9)} + \frac{1}{((3i)^2+4)(3i+3i)} \right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4i\cdot 5} + \frac{1}{-5\cdot 6i} \right) = \frac{\pi}{30}.$$

□