Операційне числення

Операційне числення – це апарат інтегральних перетворень, який дозволяє замінити операції диференціювання та інтегрування функції дійсної змінної (відомої чи невідомої, заданої чи шуканої) на алгебраїчні операції з параметром перетворення.

Методи операційного числення являють собою своєрідний спосіб розв'язання різних математичних задач, в першу чергу диференціальних рівнянь.

Основну роль в операційному численні відіграє перетворення Лапласа.

Означення перетворення Лапласа

Перетворенням Лапласа заданої функції $f(t)$ дійсної змінної t називається перетворення, яке ставить у відповідність функції $f(t)$ функцію $F(p)$ комплексної змінної p, визначену за допомогою інтеграла

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt .$$

Природно, що цей невласний інтеграл має зміст (збігається) далеко не для кожної функції $f(t)$. Тому спочатку визначимо клас функцій, для яких це перетворення напевне може бути реалізоване.

Будемо розглядати функції $f(t)$, визначені на всій дійсній осі $-\infty<t<\infty$ і такі, що задовольняють умови:

1. $f(t)\equiv 0$ при $t<0$.
2. Функція $f(t)$ – кусково-неперервна при $t\ge 0$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі осі t функція $f(t)$ має не більше ніж скінченне число точок розриву першого роду.
3. Функція $f(t)$ має скінченний степінь росту при $t\to\infty$, тобто існують такі сталі $M>0$ і $\alpha>0$, що для всіх $t\ge 0$ виконується нерівність
$$|f(t)|\le Me^{\alpha t}.$$

Функцію $f(t)$, яка задовольняє вказані умови, будемо називати оригіналом, а її перетворення Лапласа, тобто функцію $F(p)$ – зображенням функції $f(t)$. Зв'язок між зображенням та відповідним оригіналом будемо позначати так:

$$f(t)\risingdotseq F(p) \text{ або } F(p)\fallingdotseq f(t).$$

Точну нижню межу α_0 значень α, при яких для даної функції $f(t)$ виконується умова

$$|f(t)|\le Me^{\alpha t},$$

називають показником росту функції $f(t)$, тобто

$$\alpha_0=\inf\alpha .$$

Відмітимо, що, зазвичай, для функцій, за допомогою яких списуються фізичні процеси, умови 1-3 виконуються.

Наприклад:

П1. Розглянемо функцію Хевісайда

$$\sigma_0(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

Тоді

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\,dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty=-\frac{0-1}{p}=\frac{1}{p},$$

причому інтеграл збігається, якщо $\operatorname{Re}p>0$. Отже,

$$\sigma_0(t)\risingdotseq\frac{1}{p},\ \operatorname{Re}p>0. \ \square$$

Зауважимо, що якщо для функції $g(t)$, що задовольняє умовам 2 і 3, не виконується умова 1, то для функції

$$f(t) = \sigma_0(t)g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ g(t), & t \ge 0 \end{cases}$$

умова 1 виконується, і, таким чином, ця функція є оригіналом. Наприклад, функції $\sigma_0(t)t$, $\sigma_0(t)e^t$, $\sigma_0(t)\cos t$ – оригінали.

Домовимося в подальшому опускати множник $\sigma_0(t)$ в записі функції, вважаючи ці функції рівними нулю при $t < 0$. Наприклад, замість $\sigma_0(t)t^2$, $\sigma_0(t)\sin t$ будемо писати відповідно t^2, $\sin t$.

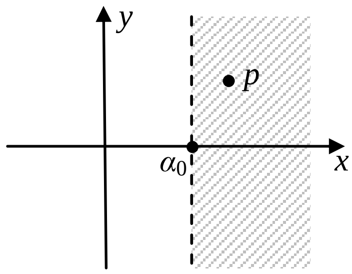
Наприклад:

П1. Знайдемо зображення функції $e^{\alpha t}$. Маємо інтеграл

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\,dt = -\left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\right|_0^\infty = -\frac{0-1}{p-\alpha} = \frac{1}{p-\alpha},\ \operatorname{Re} p > \alpha .$$

Отже

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}. \ \square$$



Теорема 1. ○

Для всякого оригінала $f(t)$ його зображення $F(p)$ є аналітичною функцією в півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, де α_0 – показник росту функції $f(t)$. ●

Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність.

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $g(t) \risingdotseq G(p)$, то для будь-яких чисел λ і μ

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \risingdotseq \lambda F(p) + \mu G(p).$$

Ця властивість випливає з означення перетворення Лапласа та лінійності інтеграла.

Наприклад:

П1. Знайдемо зображення тригонометричних та гіперболічних функцій.

З рівності $\sin \omega t = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ та формули $e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}$ випливає, що

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{p+i\omega-(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

отже,

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

З рівності $\cos \omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ отримаємо

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Аналогічно, користуючись формулами $\operatorname{sh} \omega t = \dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$ та $\operatorname{ch} \omega t = \dfrac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$, знаходимо

$$\operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}. \ \square$$

2. <u>Подібність</u>.

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для будь-якого $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Дійсно,

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}\alpha t} f(\alpha t)\, d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. <u>Диференціювання оригінала</u>.

Якщо $f(t)$, $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ – оригінали і $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$f'''(t) \risingdotseq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),$$
…………………………………………………
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$
…………………………………………………

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Дійсно, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = \begin{vmatrix} u = e^{-pt}; & du = -pe^{-pt}dt; \\ dv = f'(t)dt; & v = f(t) \end{vmatrix} = \left(e^{-pt} f(t)\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-pe^{-pt}\right)dt =$$

Якщо $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, де α_0 – показник росту функції $f(t)$, то підстановка верхньої межі $t = \infty$ в першому доданку дає нуль, тому

$$= 0 - f(0) + p\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Отже, $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$. Справедливість формули для довільного n доводиться по індукції.

Це одна з найважливіших властивостей перетворення Лапласа.

4. <u>Диференціювання зображення</u>.

Якщо $F(p) \fallingdotseq f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-t)^n f(t).$$

Наприклад:

П1. $(-t)^n \cdot 1 = (-1)^n t^n \risingdotseq \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \left(p^{-1}\right)^{(n)} = -1 \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-n) p^{-1-n} = (-1)^n n! \frac{1}{p^{n+1}}$. Отже,

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

П2. $(-t)^n \cdot e^{\alpha t} = (-1)^n t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \left(\frac{1}{p-\alpha}\right)^{(n)} = \left((p-\alpha)^{-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$. Отже,

$$t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

П3. $(-t)\sin \omega t \risingdotseq \left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \omega\left(-\frac{2p}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = -\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$. Отже,

$$t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

П4. $(-t)\cos\omega t \risingdotseq \left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)' = \dfrac{1\cdot(p^2+\omega^2) - p\cdot 2p}{(p^2+\omega^2)^2} = -\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. Отже,

$$t\cos\omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}\,.\ \square$$

5. <u>Інтегрування оригінала</u>.
Якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}\,.$$

Дійсно, якщо $f(t)$ – оригінал, то можна показати, що функція $g(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ також є оригіналом, причому $g'(t)=f(t)$, $g(0)=0$. Якщо $g(t)\risingdotseq G(p)$, то за властивістю 3 диференціювання оригінала маємо

$$f(t)=g'(t)\risingdotseq pG(p) \Rightarrow F(p)=pG(p) \Rightarrow G(p)=\frac{F(p)}{p}\,.$$

6. <u>Інтегрування зображення</u>.
Якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$ і якщо $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригінал, то

$$\frac{f(t)}{t}\risingdotseq \int_p^\infty F(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Наприклад:

П1. Знайдемо зображення інтегрального синуса $\operatorname{si} t = \int_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$. Оскільки,

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}\,,$$

то за властивістю 6 інтегрування зображення маємо

$$\frac{\sin t}{t}\risingdotseq \int_p^\infty \frac{1}{\zeta^2+1}\,d\zeta = \operatorname{arctg}\zeta\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p\,,$$

звідки за властивістю 5 інтегрування оригінала знаходимо

$$\operatorname{si} t \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}\,.\ \square$$

7. <u>Запізнення оригінала</u>.
Якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$ і $f(t)=0$ при $t<\tau$, де $\tau>0$, то

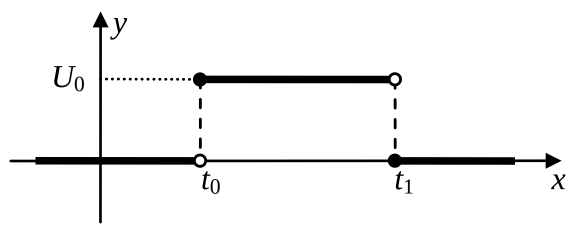
$$f(t-t_0)\risingdotseq e^{-pt_0}F(p)\,.$$

Дійсно, $f(t-t_0)\risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \int_0^\infty e^{-p(t-t_0)-pt_0} f(t-t_0)\,d(t-t_0) =$

$$= e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-p(t-t_0)} f(t-t_0)\,d(t-t_0) = e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-p(\tau)} f(\tau)\,d(\tau) = e^{-pt_0}F(p)\,.$$

Наприклад:

П1. Знайдемо зображення прямокутного імпульсу $f(t)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ U_0, & t_0\le t<t_1,\\ 0, & t\ge t_1,\end{cases}$ де $0<t_0<t_1$.



Запишемо функцію $f(t)$ за допомогою функції Хевісайда

$$f(t) = U_0\sigma_0(t-t_0) - U_0\sigma_0(t-t_1).$$

Скориставшись властивістю 1 лінійності та властивістю 7 запізнення оригінала отримаємо

$$f(t) \risingdotseq U_0 e^{-pt_0}\frac{1}{p} - U_0 e^{-pt_1}\frac{1}{p} = \frac{U_0}{p}\left(e^{-pt_0} - e^{-pt_1}\right). \ \square$$

8. <u>Зміщення зображення</u>.

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для будь-якого α

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha).$$

Дійсно,

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} f(t)\, dt = F(p-\alpha).$$

Наприклад:

П1. Знайдемо зображення функцій $e^{\alpha t}\cos\omega t$ та $e^{\alpha t}\sin\omega t$.

Оскільки $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ і $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то за властивістю 8 зміщення зображення отримаємо

$$e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2},\ e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}. \ \square$$

9. <u>Зображення згортки</u>.

<u>Згорткою функцій</u> f і g називається функція, яка позначається $f * g$ та визначається рівністю

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$(f * g)(t) \risingdotseq F(p)\, G(p).$$

Зауваження. ○

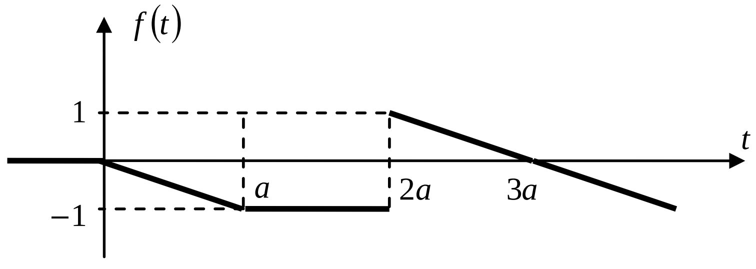
При знаходженні зображення кусково-лінійної (полігональної) функції використовують наступну формулу:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} e^{-p\tau_k}\left[\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right],$$

де τ_1, τ_2, …, τ_k – точки розриву функції $f(t)$ або $f'(t)$; $\alpha_k = f_+(\tau_k) - f_-(\tau_k)$ – стрибки функції в вузлах «з'єднання»; $\beta_k = f'_+(\tau_k) - f'_-(\tau_k)$ – стрибки похідної в вузлах «з'єднання». ●

Наприклад:

П1. За даним графіком оригіналу знайдемо зображення:



Для заданої функції $f(t)$ визначимо в точках розриву τ_k функцій $f(t)$ або $f'(t)$ стрибки функції α_k і стрибки похідної β_k:

$\tau_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -\dfrac{1}{a} - 0 = -\dfrac{1}{a}$;

$\tau_2 = a$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0 - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$;

$\tau_3 = 2a$, $\alpha_3 = 1 - (-1) = 2$, $\beta_3 = -\frac{1}{a} - 0 = -\frac{1}{a}$.

Звідси, скориставшись формулою зображення полігональної функції, знайдемо

$$F(p) = \sum_{k=1}^{3} e^{-p\tau_k}\left[\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right] = -\frac{1}{ap^2} + \frac{1}{ap^2}e^{-ap} + \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}. \ \square$$

Наведемо таблицю оригіналів і зображень, які часто зустрічаються в задачах.

	Оригінал	Зображення
1.	$\sigma_0(t)$ або 1	$\frac{1}{p}$
2.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
5.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7.	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
8.	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
9.	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
10.	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
11.	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
12.	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

Формула оберненого перетворення Лапласа

Теорема 2. Теорема Меліна. ○

Якщо $f(t)$ – оригінал і $F(p)$ – його зображення, то в кожній точці, де існує $f'(t)$, справедлива рівність

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp.$$

Інтеграл береться вздовж будь-якої прямої $\mathrm{Re}\,p = a > \alpha_0$, де α_0 – показник росту функції $f(t)$. ●

Цю формулу називають формулою обертання перетворення Лапласа або формулою Меліна.

Наслідок. ○

Оригінал $f(t)$ однозначно визначається за його зображенням $F(p)$ в усіх точках, де функція $f(t)$ диференційовна. ●

Безпосереднє застосування формули обертання перетворення Лапласа для відшукання оригіналів веде, як правило до складних обчислень. Тому досить часто для цього використовують теореми розкладання.

Теореми розкладання

Теорема 3. Перша теорема розкладання. ○

Нехай функція $F(p)$ аналітична в деякому кільці $|p| > R$ і $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$, а її розклад в цьому кільці в ряд Лорана має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}.$$

Тоді оригіналом функції $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n. \ ●$$

Наприклад:

П1. Знайдемо оригінал $f(t)$, якщо $F(p) = \sin\frac{1}{p}$. Маємо розклад

$$\sin\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3!\,p^3} + \frac{1}{5!\,p^5} - \dots,$$

тобто $F(p)$ задовольняє умови першої теореми розкладання (теореми 3). Тому

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!}\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!}\frac{t^4}{4!} - \dots . \ \square$$

Теорема 4. Друга теорема розкладання. ○

Нехай функція $F(p)$ аналітична в усій комплексній площині, за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок p_1, p_2, …, p_m, розташованих в півплощині $\operatorname{Re} p < \alpha_0$. Якщо $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ і $F(p)$ абсолютно інтегрована вздовж будь-якої вертикальної прямої $\operatorname{Re} p = \alpha$, $\alpha > \alpha_0$, то $F(p)$ є зображенням функції

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left(F(p)e^{pt}\right). \ ●$$

Наслідок 1. ○

Нехай функція $F(p)$ є нескоротний правильний раціональний дріб:

$$F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)},$$

де $A_n(p)$ і $B_m(p)$ – многочлени степеня n і m, причому $m > n$, і нехай

$$B_m(p) = (p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2}\dots(p-p_l)^{m_l},\ m_1 + m_2 + \dots + m_l = m,$$

тобто p_1, p_2, …, p_l – нулі знаменника $B_m(p)$ кратності m_1, m_2, …, m_l відповідно. Тоді оригінал, що відповідає зображенню $F(p)$ дорівнює

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left((p-p_k)^{m_k} F(p) e^{pt}\right). \ ●$$

Або, обчисливши похідну, отримаємо

Наслідок 2. ○

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{t^{m_k-j} e^{p_k t}}{(m_k-j)!\,(j-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\left((p-p_k)^{m_k} F(p)\right). \ ●$$

Зокрема,

Наслідок 3. ○

Якщо всі полюси $F(p)$ прості, тобто $B_m(p)=(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_m)$, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_n(p_k)}{B_m'(p_k)}e^{p_k t}. \bullet$$

Наприклад:

П1. Знайдемо оригінал за заданим зображенням: $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

1-й спосіб. Розкладемо дріб на суму найпростіших

$$F(p)=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}.$$

Визначаючи коефіцієнти, одержуємо $A=-1,\ B=1,\ C=1$. Отже,

$$F(p)=-\frac{1}{p+1}+\frac{p+1}{p^2+p+1}=-\frac{1}{p+1}+\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Оригінали для кожного із простих дробів знаходимо, використовуючи таблицю основних зображень та властивість 8 зміщення зображення:

$$\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t},\quad \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\risingdotseq e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\risingdotseq e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Звідси, скориставшись властивістю лінійності, знаходимо

$$f(t)=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

2-ий спосіб. Функція $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)\left(p-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(p-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}$ має прості полюси $p_1=-1$, $p_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $p_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Звідси за наслідком 3 з другої теореми розкладання маємо: $A(p)=p$; $B'(p)=\big((p+1)(p^2+p+1)\big)'=1\cdot(p^2+p+1)+(p+1)(2p+1)=$

$$=p^2+p+1+2p^2+3p+1=3p^2+4p+2;$$

$$f(t)=\frac{-1}{3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+2}e^{-1\cdot t}+\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2}e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2}e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i-3}++e^{-\frac{1}{2}t}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}\frac{-1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i-3}=$$

$$=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)+e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=$$

$$=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t. \square$$