Застосування теорії функції комплексної змінної в задачах радіо та електротехніки

1. Ряди Фур'є в комплексній формі.

Нехай T-періодична дійсна функція $s(t)$ може бути подана у вигляді суми збіжного ряду Фур'є

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

де $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, а коефіцієнти ряду обчислені за формулами

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt,\ a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos k\omega_1 t\,dt,\ b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin k\omega_1 t\,dt.$$

Візьмемо k-ий доданок цього ряду і застосуємо до нього формули

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

в результаті отримаємо:

$$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t = a_k\frac{e^{ik\omega_1 t}+e^{-ik\omega_1 t}}{2} + b_k\frac{e^{ik\omega_1 t}-e^{-ik\omega_1 t}}{2i} =$$

$$= \frac{a_k}{2}e^{ik\omega_1 t} + \frac{a_k}{2}e^{-ik\omega_1 t} - \frac{ib_k}{2}e^{ik\omega_1 t} + \frac{ib_k}{2}e^{-ik\omega_1 t} = \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ik\omega_1 t} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ik\omega_1 t} = c_k e^{ik\omega_1 t} + c_{-k}e^{-ik\omega_1 t}.$$

Отже $c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}$ (вважаємо $b_0 = 0$), звідси

$$c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)(\cos k\omega_1 t - i\sin k\omega_1 t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-ik\omega_1 t}\,dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)(\cos k\omega_1 t + i\sin k\omega_1 t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{ik\omega_1 t}\,dt.$$

Ці рівності можна записати у вигляді однієї формули

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-ik\omega_1 t}\,dt,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а <u>ряд Фур'є</u> при цьому запишеться <u>в комплексній формі</u> так

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}.$$

При цьому амплітуди гармоніки $\omega_k = k\cdot\omega_1$ обчислюються за формулами

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2\,|\,c_k\,|,\ k = 1, 2, \ldots,$$

а фази за формулами

$$\varphi_k = \arg c_k,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Знаючи амплітуди і фази гармонік, ряд Фур'є можна записати у вигляді

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

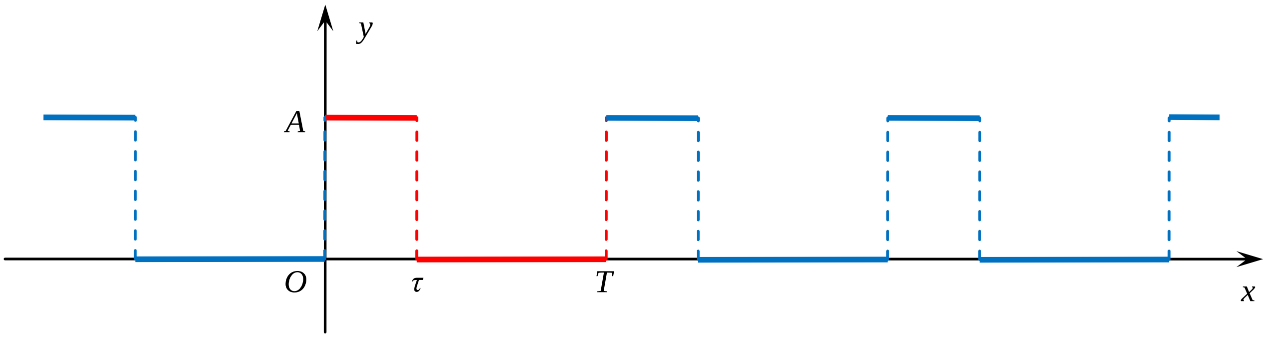
Коефіцієнти c_k і c_{-k} є комплексно спряженими числами. Коефіцієнти дійсного ряду виражаються через них наступним чином

$$a_k = c_k + c_{-k},\ b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Наприклад:

П1. Розглянемо послідовність прямокутних імпульсів з періодом T тривалістю τ. На одному періоді маємо функцію:

$$s(t)=\begin{cases}A, & 0\le t\le\tau,\\ 0, & \tau<t<T.\end{cases}$$



Обчислимо коефіцієнти Фур'є для функції $s(t)$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-ik\omega_1 t}\,dt=\frac{1}{T}\int_0^\tau Ae^{-ik\omega_1 t}\,dt=\frac{1}{T}\cdot\frac{A}{-ik\omega_1}e^{-ik\omega_1 t}\Big|_0^\tau=\frac{1}{T}\cdot\frac{Ai}{k\omega_1}\left(e^{-ik\omega_1\tau}-1\right)=$$

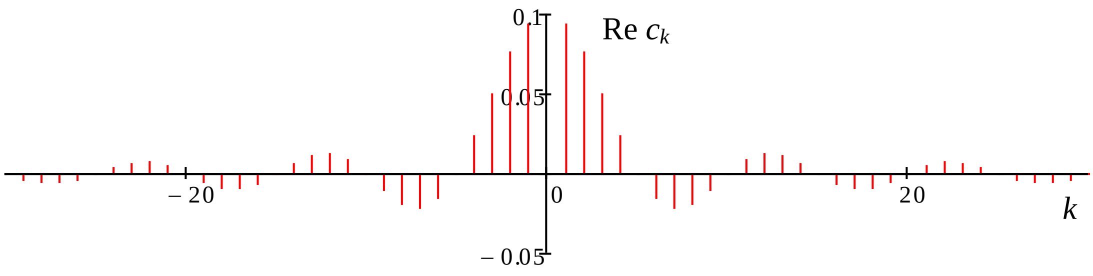
$$=\frac{1}{T}\cdot\frac{Ai}{k\frac{2\pi}{T}}\left(e^{-ik\frac{2\pi}{T}\tau}-1\right)=\frac{Ai}{2\pi k}\left(e^{-\frac{2\pi k}{q}i}-1\right),\ k=\pm1,\pm2,\ldots,$$

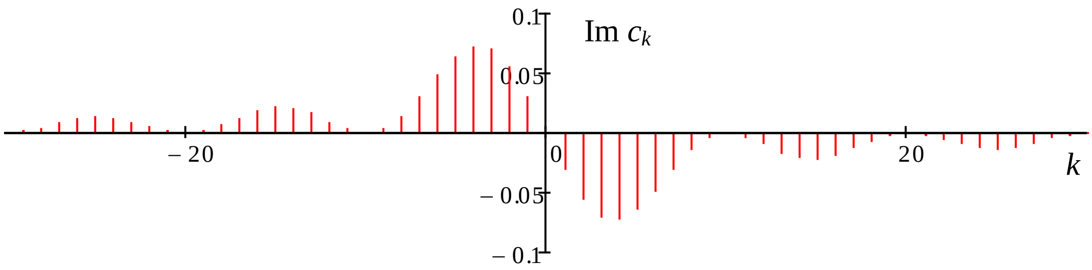
$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^\tau A\,dt=\frac{A}{T}\tau=\frac{A}{q}.$$

де $q=\dfrac{T}{\tau}$ – називають скважністю послідовності. Ряд Фур'є запишеться у вигляді

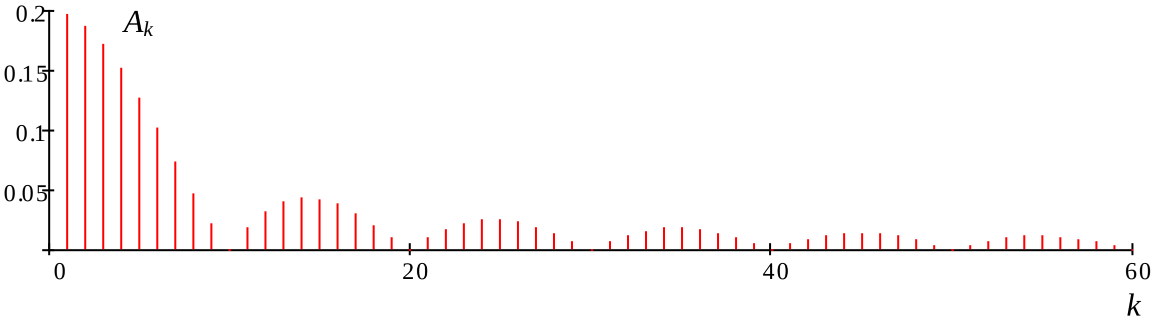
$$s(t)=\frac{A}{q}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\frac{Ai}{2\pi k}\left(e^{-\frac{2\pi k}{q}i}-1\right)e^{\frac{2\pi ki}{T}t}.$$

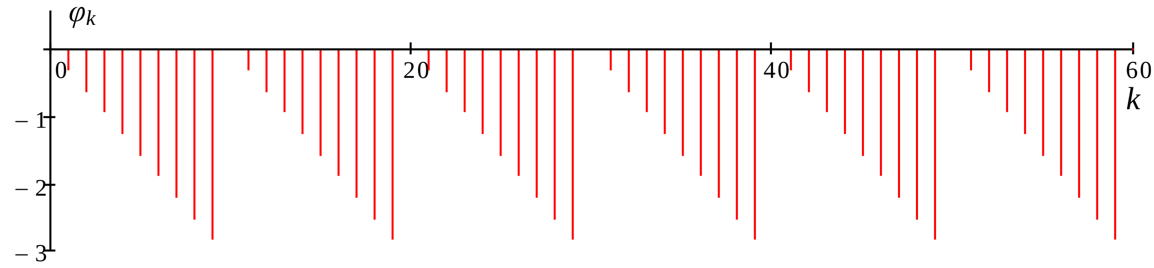
На наступних рисунках зображено дійсну та уявну частину коефіцієнтів Фур'є для функції $s(t)$ при $T=1$, $\tau=\dfrac{1}{10}$, $A=1$.



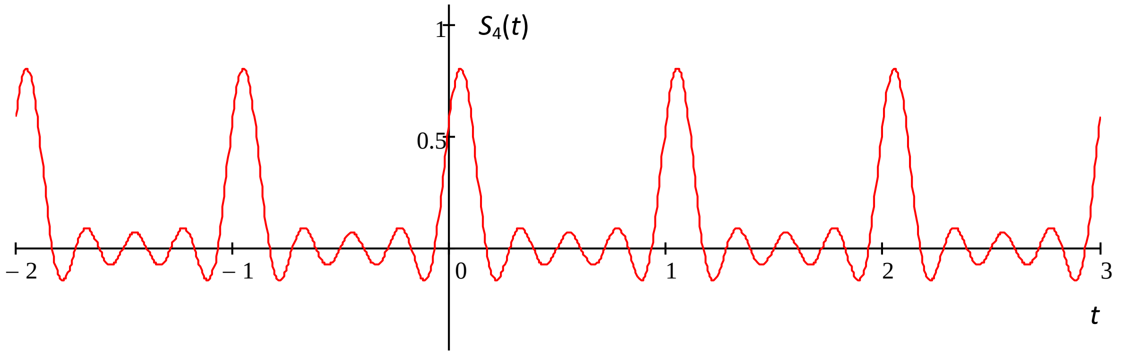


Можемо тепер знайти амплітудний та фазовий спектр функції $s(t)$:





Побудуємо графік частинної суми ряду Фур'є $S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\omega_1 t}$ при $n=4$:



Структура ряду Фур'є в комплексній формі дозволяє зобразити періодичний сигнал у вигляді нескінченної суми векторів, що обертаються на комплексній площині.

Побудова відбувається наступним чином. З початку координат випускають вектор c_0. Потім у формулі $s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik\omega_1 t}$ покладають $t=0$ і будують суми векторів

$$c_+ = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots,$$

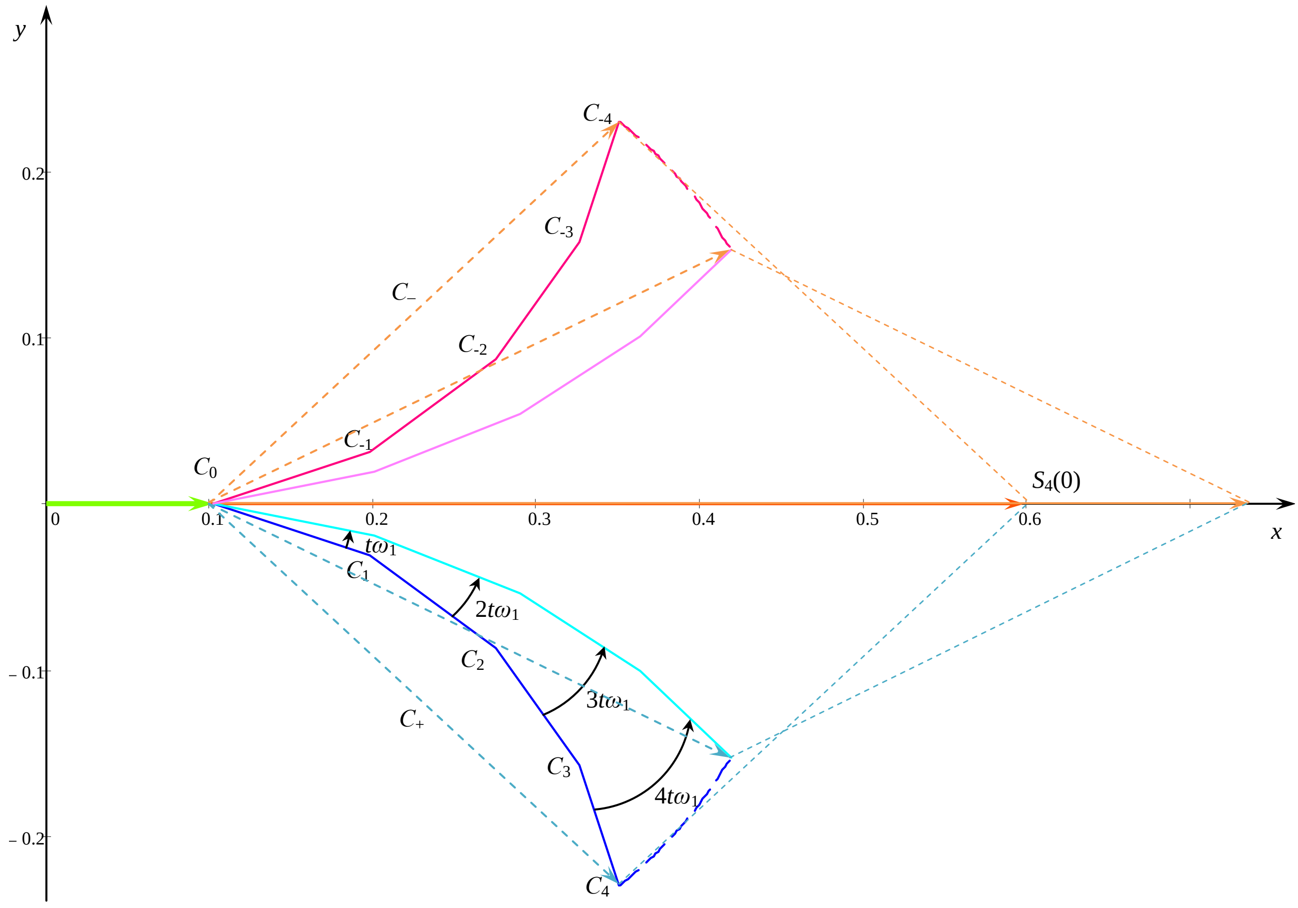
$$c_- = c_{-1} + c_{-2} + c_{-3} + c_{-4} + \ldots,$$

які відповідають вкладу доданків з додатними та від'ємними частотами. Якщо ряд Фур'є збігається, то кожна з цих сум зображується вектором скінченної довжини.

Коефіцієнти з додатними та від'ємними частотами комплексно спряжені, тому вектор $c_+ + c_-$ завжди дійсний. Сума $c_0 + c_+ + c_-$ утворює вектор, який відповідає $s(0)$ – значенню сигналу в початковий момент часу.

В подальшому картина трансформується – вектори c_1, c_2, c_3, … обертаються в додатному напрямку з кутовими швидкостями ω_1, ω_2, ω_3, …, а вектори c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, … обертаються з тими ж швидкостями, але в протилежному напрямку. Кінець результуючого вектора в кожний момент часу визначає поточне значення сигналу $s(t)$.

На рисунку зображено відповідні побудови для частинної суми ряду $S_4(t)$.



□

2. Перетворення Фур'є в комплексній формі.

Перетворення Фур'є є інструментом спектрального аналізу неперіодичних сигналів.

Нехай $s(t)$ неперіодична кусково-гладка абсолютно інтегрована на всій числовій осі функція. Аналогічно до попередніх міркувань розглянемо функцію

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

Ця функція є аналогом коефіцієнтів Фур'є для періодичної функції і називається <u>спектральною щільністю</u> функції $s(t)$. Перехід від функції $s(t)$ до функції $S(\omega)$ називають <u>прямим перетворенням Фур'є</u>.

Аналогом ряду Фур'є являється вираз <u>оберненого перетворення Фур'є</u>

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega t}d\omega\,.$$

Модуль спектральної щільності $|S(\omega)|$ називають <u>амплітудним спектром</u>, а її аргумент $\arg(S(\omega))$ – <u>фазовим спектром</u>.

Наприклад:

П2. Розглянемо експоненціальний імпульс $s(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ Ae^{-at}, & t\ge 0,\end{cases}$ $a>0$.

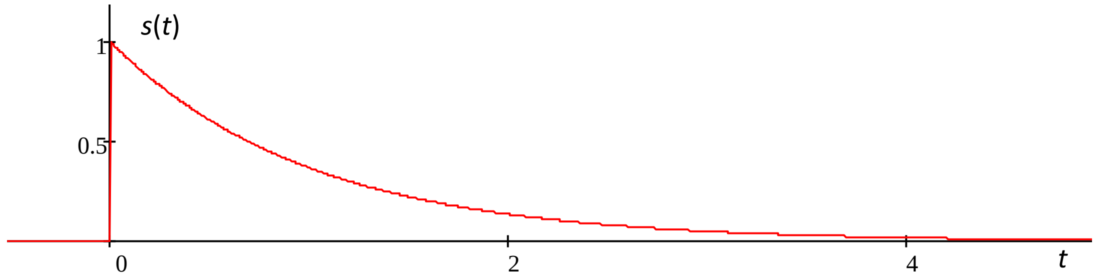
Розрахуємо для нього перетворення Фур'є

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}Ae^{-at}e^{-i\omega t}dt=A\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\omega)t}dt=\frac{A}{-(a+i\omega)}e^{-(a+i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{A}{-(a+i\omega)}(0-1)=\frac{A}{a+i\omega}\,.$$

Проілюструємо отримані результати при $A=1$, $a=1$.

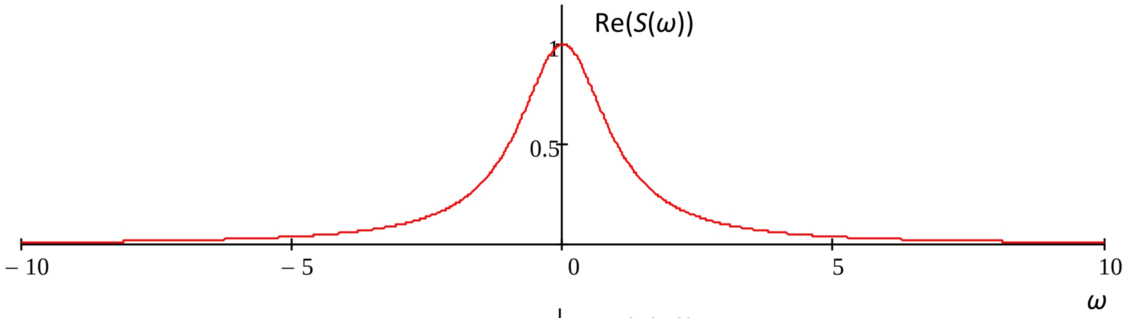
Початкова функція $s(t)$ має наступний графік

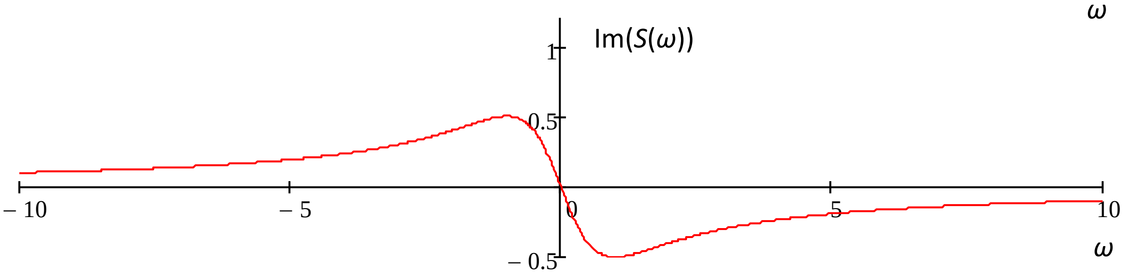


Дійсна і уявна частини спектральної щільності мають вигляд

$$\mathrm{Re}(S(\omega)) = \mathrm{Re}\left(\frac{A}{a+i\omega}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{A(a-i\omega)}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{Aa}{a^2+\omega^2},$$

$$\mathrm{Im}(S(\omega)) = \mathrm{Im}\left(\frac{A(a-i\omega)}{a^2+\omega^2}\right) = -\frac{A\omega}{a^2+\omega^2}.$$

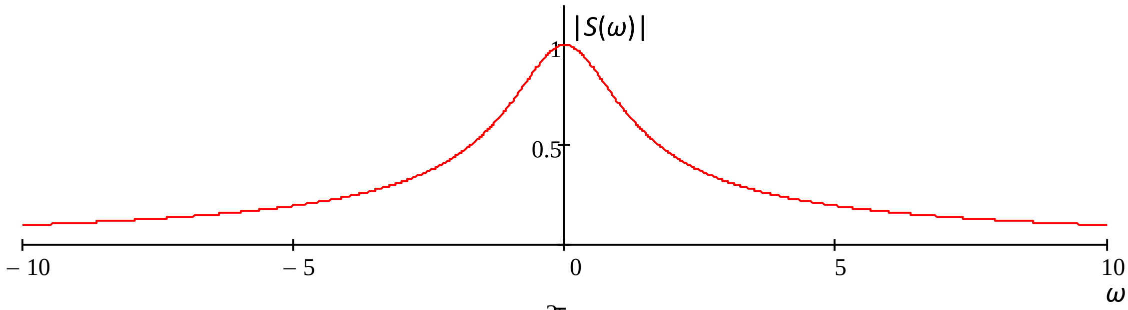


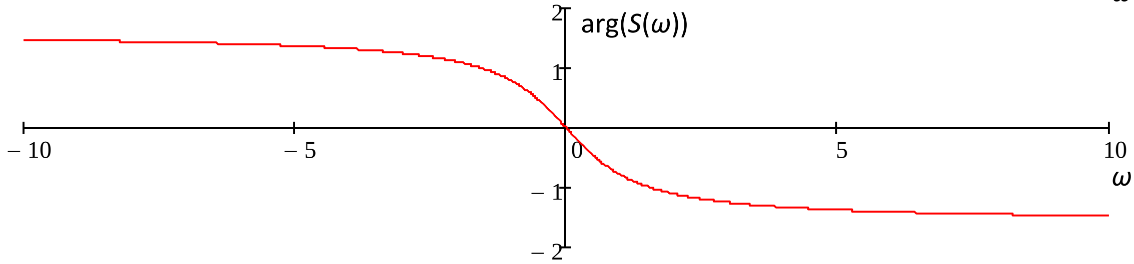


Знайдемо тепер амплітудний та фазовий спектри.

$$|S(\omega)| = \sqrt{\frac{A^2a^2}{(a^2+\omega^2)^2} + \frac{A^2\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \frac{A\sqrt{a^2+\omega^2}}{a^2+\omega^2} = \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}},$$

$$\arg(S(\omega)) = \mathrm{arctg}\left(\frac{-\dfrac{A\omega}{a^2+\omega^2}}{\dfrac{Aa}{a^2+\omega^2}}\right) = -\mathrm{arctg}\,\omega.$$





□

3. Математична модель стаціонарної лінійної динамічної системи.

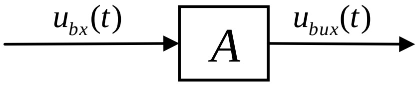
Радіотехнічний пристрій незалежно від свого призначення та рівня складності являє собою систему, тобто сукупність фізичних об'єктів, між якими існують певні зв'язки. В структурі системи прийнято виділяти вхід, на який подається початковий сигнал, та вихід, з якого знімають перетворений сигнал.

Вхідний сигнал $u_{bx}(t)$ і вихідний сигнал $u_{bux}(t)$ (або відгук системи) є деякими функціями часу t.

Закон зв'язку між сигналами $u_{bx}(t)$ і $u_{bux}(t)$ називають системним оператором A, результатом дії якого на сигнал $u_{bx}(t)$ є сигнал. Записують так:

$$u_{bux}(t) = Au_{bx}(t).$$

Якщо внутрішні процеси в системі нас не цікавлять, то кажуть, що система подана як «чорний ящик» і схематично зображують її так



Математичною моделлю системи називають сукупність системного оператора A та двох множин: допустимих вхідних і допустимих вихідних сигналів.

Систему називають стаціонарною, якщо її вихідна реакція не залежить від того, в який момент часу надходить вхідний сигнал. Якщо A – оператор стаціонарної системи, то

$$u_{bux}(t + t_0) = Au_{bx}(t + t_0)$$

при будь-якому значенні t_0. Стаціонарні системи називають також системами з постійними в часі параметрами.

Якщо ця умова не виконується, то систему називають нестаціонарною.

Якщо для будь-яких допустимих вхідних сигналів $u_{bx1}(t)$ і $u_{bx2}(t)$ та довільних дійсних чисел α_1 і α_2 виконується рівність

$$A\left(\alpha_1 u_{bx1}(t) + \alpha_2 u_{bx2}(t)\right) = \alpha_1 A u_{bx1}(t) + \alpha_2 A u_{bx2}(t),$$

то систему називають лінійною.

Якщо дана умова не виконується, то систему називають нелінійною.

Якщо характерний розмір системи (наприклад, найбільша довжина з'єднувальних провідників) є багато меншою довжини хвилі, то систему називають зосередженою.

Властивості зосереджених ланцюгів слабко залежать від конфігурації з'єднувальних провідників, тому для опису таких ланцюгів використовують абстрактні моделі, які називають принциповими схемами.

Систему називають динамічною, якщо поточне значення вихідного сигналу залежить не лише від поточного значення вхідного сигналу, а й від значень сигналу в попередні моменти часу.

Надалі будемо розглядати стаціонарні лінійні динамічні системи з зосередженими параметрами. Зв'язок між вхідним і вихідним сигналом в таких системах може бути виражений у вигляді диференціального рівняння

$$a_n \frac{d^n u_{bux}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{bux}}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} u_{bux}}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{du_{bux}}{dt} + a_0 u_{bux} =$$

$$= b_m \frac{d^m u_{bx}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{bx}}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} u_{bx}}{dt^{m-2}} + \ldots + b_1 \frac{du_{bx}}{dt} + b_0 u_{bx}.$$

При цьому має виконуватись нерівність $m \le n$. Число n називають порядком системи.

З фізичних міркувань початкові умови цього диференціального рівняння як правило нульові:

$$u_{bux}(0) = u'_{bux}(0) = \ldots = u_{bux}^{(n-1)}(0) = 0.$$

Будемо вважати, що всі допустимі вхідні сигнали системи є оригіналами.

Припустимо, що

$$u_{bx}(t) \risingdotseq U_{bx}(p) \text{ і } u_{bux}(t) \risingdotseq U_{bux}(p).$$

За цих умов знайдемо перетворення Лапласа від обох частин рівняння

$$a_n p^n U_{bux} + a_{n-1} p^{n-1} U_{bux} + a_{n-2} p^{n-2} U_{bux} + \ldots + a_1 p U_{bux} + a_0 U_{bux} =$$
$$= b_m p^m U_{bx} + b_{m-1} p^{m-1} U_{bx} + b_{m-2} p^{m-2} U_{bx} + \ldots + b_1 p U_{bx} + b_0 U_{bx}$$

або

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0\right) U_{bux} =$$
$$= \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + b_{m-2} p^{m-2} + \ldots + b_1 p + b_0\right) U_{bx}.$$

Функція, яка є відношенням зображень вихідного та вхідного сигналів

$$H(p) = \frac{U_{bux}(p)}{U_{bx}(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + b_{m-2} p^{m-2} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0},$$

називається передаточною функцією системи або операторним коефіцієнтом передачі.

Якщо ця функція відома, то пошук вихідної реакції системи на вхідний сигнал $u_{bx}(t)$ розбивається на три етапи

1. Знаходження зображення вхідного сигналу.
2. Обчислення зображення вихідного сигналу $U_{bux}(p) = H(p) U_{bx}(p)$.
3. Знаходження оригіналу для вихідного сигналу $U_{bux}(p) \fallingdotseq u_{bux}(t)$.

Передаточна функція повністю характеризує систему.

Підставляючи в передаточну функцію уявний аргумент $p = i\omega$ отримаємо частотний коефіцієнт передачі

$$K(\omega) = H(i\omega).$$

Функцію $|K(\omega)|$ називають <u>амплітудно-частотною характеристикою</u> (АЧХ) системи, а функцію $\arg(K(\omega))$ – <u>фазочастотною характеристикою</u> (ФЧХ). Функцію, яка є оригіналом для передаточної функції $h(t) \risingdotseq H(p)$ називають <u>імпульсною характеристикою системи</u>. За властивістю зображення згортки маємо основну властивість імпульсної характеристики

$$u_{bux}(t) = \int_0^t h(\tau) u_{bx}(t-\tau)\, d\tau.$$

Розкладемо чисельник і знаменник передаточної функції на множники

$$H(p) = \frac{b_m (p - z_1)(p - z_2)(p - z_3)\ldots(p - z_m)}{a_n (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)\ldots(p - p_n)}.$$

Тут $k = \dfrac{b_m}{a_n}$ – коефіцієнт підсилення системи, z_i – нулі передаточної функції, p_i – її полюси.

Для дійсних систем нулі і полюси є або дійсними числами або утворюють пари комплексно-спряжених чисел. В теорії систем доводять, що система є стійкою тоді і тільки тоді, коли всі полюси її передаточної функції лежать в лівій півплощині (мають від'ємну дійсну частину).

Наприклад:

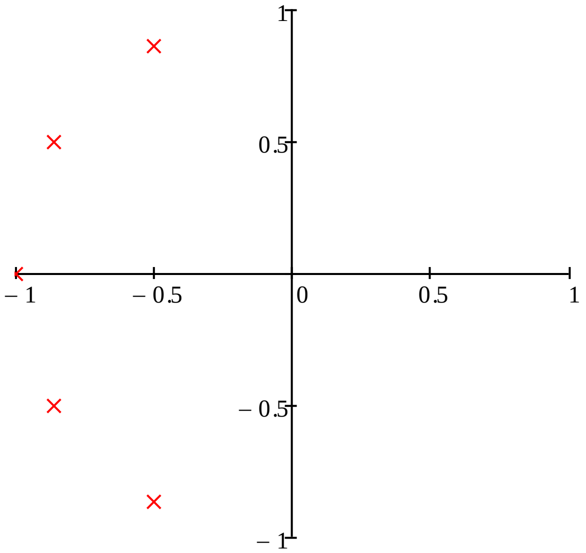
П3. Розглянемо <u>фільтр Баттерворта</u>. Передаточна функція цього фільтра не має нулів, а полюси рівномірно розташовані в лівій половині одиничного кола. Для фільтра п'ятого порядку знайдемо положення полюсів за формулою

$$p_k = e^{i\frac{\pi(k+4)}{6}}, \; k = 0,1,\ldots,4.$$

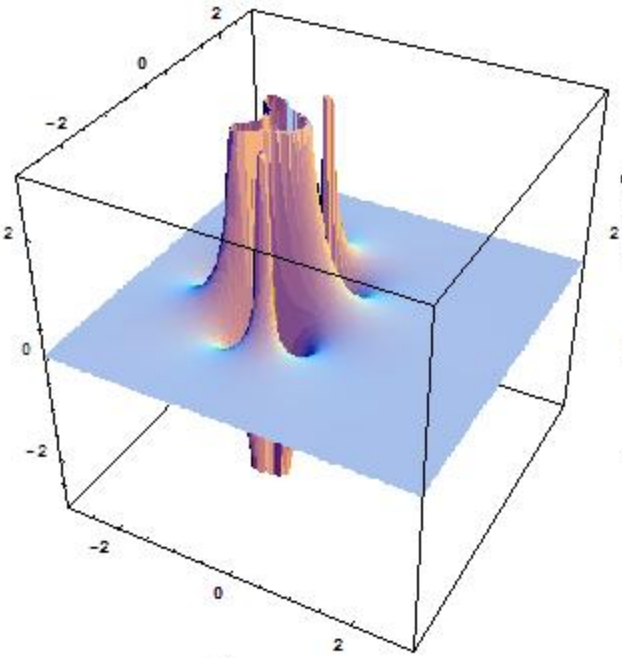
Тоді передаточна функція

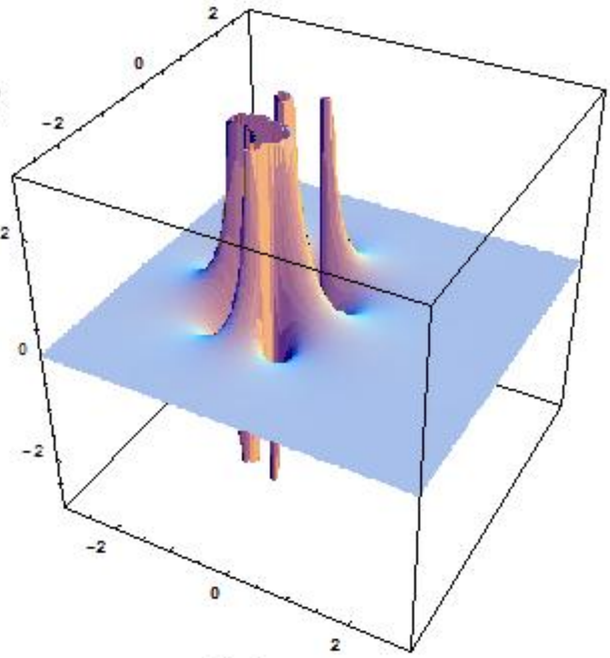
$$H(p) = \prod_{k=0}^{4} \frac{1}{p - p_k}.$$

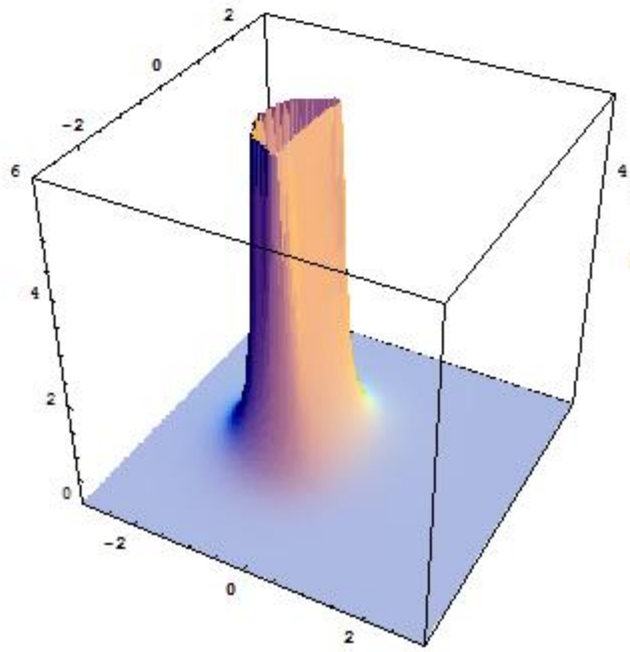
На рисунку зображено карту нулів і полюсів передаточної функції (нулів немає).

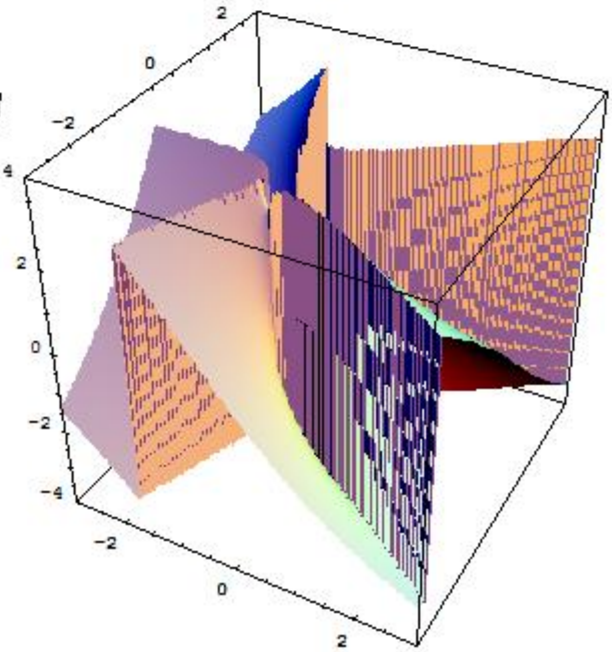


Наведемо тепер дійсну та уявну частину передаточної функції фільтра Баттерворта, а також модуль і аргумент цієї функції

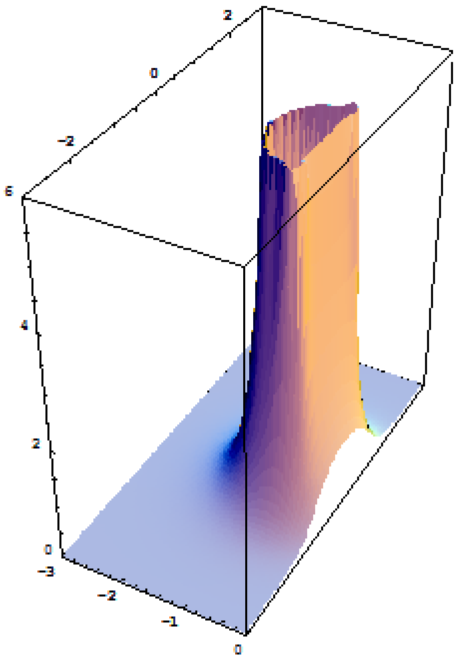


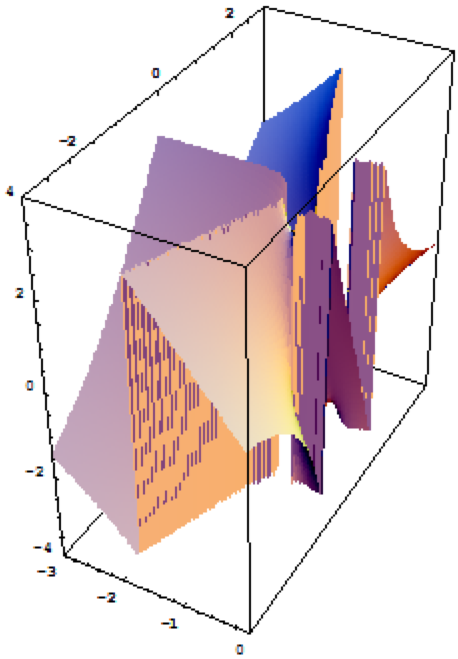




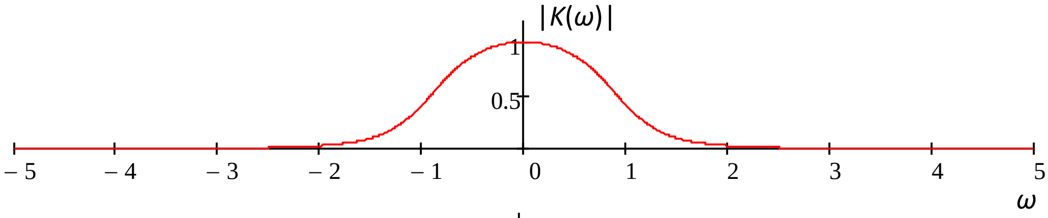


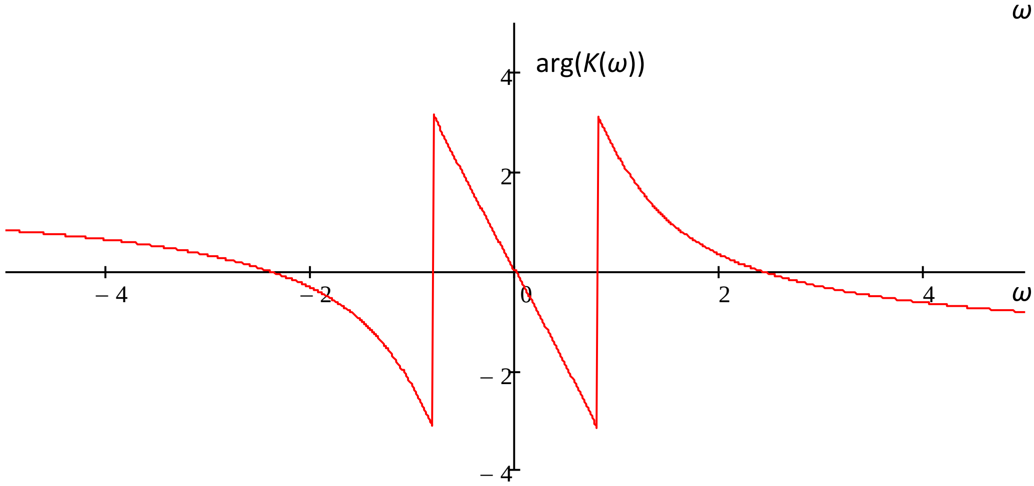
Переріжемо тепер поверхні модуля і аргументу вертикальними площинами вздовж уявної осі.





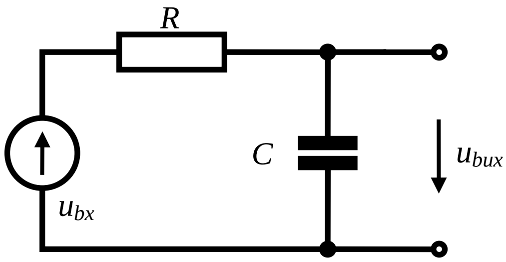
Криві в перерізах являють собою АЧХ та ФЧХ фільтра.





П4. Розглянемо тепер приклад відшукання відгуку системи операторним методом.

Нехай дано RC-ланцюг виду Г-подібного чотириполюсника, на вхід якого подано джерело ЕРС $u_{bx}(t)$. Вихідним сигналом слугує напруга на конденсаторі $u_{bux}(t) = u_C(t)$.



Контакти конденсатора є водночас контактами виходу системи, тому враховуючи математичну модель конденсатора маємо силу струму, яка проходить через нього

$$I(t) = C\frac{du_{bux}}{dt}.$$

Оскільки всі елементи кола з'єднані послідовно, то така сама сила струму спостерігається і в резисторі. Тоді падіння напруги на резисторі за законом Ома

$$u_R(t) = R \cdot I(t) = RC\frac{du_{bux}}{dt}.$$

За другим законом Кірхгофа сума падіння напруг на елементах контуру дорівнює ЕРС в цьому контурі. Звідси

$$u_R(t) + u_C(t) = u_{bx}(t).$$

Підставляючи відповідні вирази отримаємо диференціальне рівняння

$$RC\frac{du_{bux}}{dt} + u_{bux} = u_{bx},$$

яке є математичною моделлю даної системи.

Отже, RC-ланцюг є стаціонарною лінійною динамічною системою 1-го порядку. Найважливішим параметром цієї системи є $\tau = RC$. З цим позначенням математична модель ланцюга остаточно набуде вигляду

$$\tau\frac{du_{bux}}{dt} + u_{bux} = u_{bx};\ u_{bux}(0) = 0.$$

Знайдемо передаточну функцію системи. Для цього перейдемо до зображень в лівій і правій частині рівняння

$$\tau p U_{bux}(p) + U_{bux}(p) = U_{bx}(p),\ (\tau p + 1)U_{bux}(p) = U_{bx}(p),\ H(p) = \frac{U_{bux}(p)}{U_{bx}(p)} = \frac{1}{1+\tau p}.$$

Нехай на вхід системи діє прямокутний імпульс ЕРС тривалості T з амплітудою U_0. За допомогою функції Хевісайда вхідний сигнал можна записати так

$$u_{bx}(t) = U_0(\sigma(t) - \sigma(t-T)).$$

Зображенням цієї функції буде

$$U_{bx}(p) = U_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-pT}\right) = \frac{U_0}{p}(1 - e^{-pT}).$$

Знайдемо зображення вихідного сигналу

$$U_{bux}(p) = H(p)U_{bx}(p) = \frac{1}{1+\tau p}\cdot\frac{U_0}{p}(1-e^{-pT}) = \frac{U_0}{p(1+\tau p)} - \frac{U_0}{p(1+\tau p)}e^{-pT}$$

Розкладемо дріб $\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$ на суму елементарних дробів.

$$\frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p} = \frac{A(1+\tau p) + Bp}{p(1+\tau p)} = \frac{A + \tau Ap + Bp}{p(1+\tau p)};$$

$$\begin{cases}\tau A + B = 0,\\ A = 1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = 1,\\ B = -\tau.\end{cases}$$

Отже,

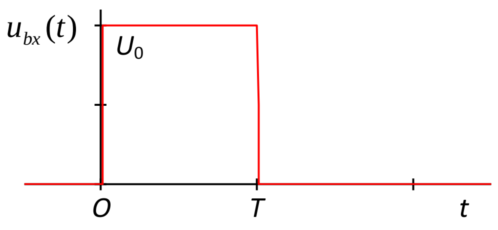
$$\frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau},$$

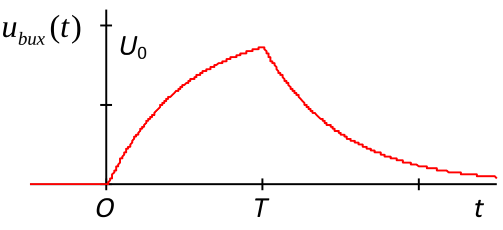
а значить

$$U_{bux}(p) = U_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau}\right) - U_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau}\right)e^{-pT}.$$

За допомогою таблиці знайдемо оригінал для зображення $U_{bux}(p)$. Отримаємо

$$u_{bux}(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\sigma(t) - U_0(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}})\sigma(t-T).$$





□