

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Збірник завдань до виконання
розрахунково-графічної роботи
для студентів економічних спеціальностей

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
протокол №13 від 19.05.04 р.

Черкаси ЧДТУ 2004

Математичне програмування: Збірник завдань до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів економічних спеціальностей (Укл. С.І. Півненко. – Черкаси: ЧДТУ, 2004)

Укладачі:	Півненко С.І.
Відповідальний редактор	Кондратьєва О.М.
Рецензент	Ламзіна Т.Б.

Збірник містить завдання для розрахунково-графічної роботи з розділу "Математичне програмування", призначений для студентів економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

Передмова	4
Розділ I. Лінійне програмування.....	5
Тема 1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса-Жордана.....	5
Завдання 1.....	5
Тема 2. Математичні моделі економічних задач.....	7
Завдання 2.....	7
Тема 3. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	17
Завдання 3.....	17
Тема 4. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	21
Завдання 4.....	21
Тема 5. Двоїсті задачі. Теореми двоїстості.....	24
Завдання 5.....	24
Завдання 6.....	27
Завдання 7.....	27
Тема 6. Цілочислове програмування.....	38
Завдання 8.....	38
Тема 7. Транспортні задачі.....	41
Завдання 9.....	41
Розділ II. Нелінійне програмування.....	47
Тема 1. Дробово-лінійне програмування.....	47
Завдання 1.....	47
Тема 2. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування.....	50
Завдання 2.....	50
Тема 3. Квадратичне програмування.....	54
Завдання 3.....	54
Тема 4. Сітьове планування.....	57
Завдання 4.....	57
Тема 5. Динамічне програмування.....	61
Завдання 5.....	61
Література	62

Передмова

Збірник завдань до виконання розрахунково-графічної роботи з математичного програмування складений відповідно до програми з цієї дисципліни для технічних вузів.

Даний збірник завдань має своєю метою активізувати самостійну роботу студентів і сприяти більш глибокому засвоєнню розділу вищої математики “Математичне програмування”.

Збірник завдань складається з двох розділів: лінійне програмування і нелінійне програмування.

Розділ "Лінійне програмування" містить дев'ять завдань по темах: “Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса-Жордана”, “Математичні моделі економічних задач”, “Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування ”, “Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування ”, “Двоїсті задачі, теореми двоїстості”, “Цілочислове програмування”, “Транспортні задачі”.

Розділ “Нелінійне програмування” містить п’ять завдань по темах: “Дробово-лінійне програмування”, “Графічний метод розв’язування задач нелінійного програмування”, “Квадратичне програмування”, “Сітьове планування”, “Динамічне програмування”.

Кожне завдання має 30 варіантів. Підібрані для самостійної роботи задачі дають можливість відпрацьовувати техніку розв’язання основних задач лінійного програмування і деякого класу задач нелінійного програмування. Збірник завдань рекомендований для використання студентами економічних спеціальностей денної форми навчання. Завдання, розміщені в цьому збірнику, можуть бути використані також для проведення практичних занять та для оцінювання знань по кредитно-модульній системі.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Розділ І. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема 1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса-Жордана

Завдання 1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса-Жордана, використовуючи таблиці Гаусса.

1.1.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = -1. \end{cases}$$

1.2.
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

1.3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = -1. \end{cases}$$

1.4.
$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 3, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = -1. \end{cases}$$

1.5.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = -1. \end{cases}$$

1.6.
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 1, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

1.7.
$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

1.8.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

1.9.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$

1.10.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

1.11.
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 2. \end{cases}$$

1.12.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

1.13.

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = -2. \end{cases}$$

1.15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

1.17.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

1.19.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = -1. \end{cases}$$

1.21.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = -2. \end{cases}$$

1.23.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 2. \end{cases}$$

1.25.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

1.27.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = -3. \end{cases}$$

1.14.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

1.16.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -1. \end{cases}$$

1.18.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

1.20.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$$

1.22.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = -1, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 2. \end{cases}$$

1.24.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

1.26.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = -3. \end{cases}$$

1.28.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

1.29.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = -2. \end{cases}$$

1.30.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Тема 2. Математичні моделі економічних задач

Завдання 2. Скласти математичну модель задачі.

2.1. У механічному цеху встановлено два верстати, на кожному з яких можна обробляти будь-яку з деталей А₁, А₂, А₃. У таблиці наведено норми затрат часу на обробку кожним з верстатів однієї деталі відповідного виду, вартість однієї години роботи верстата і добовий фонд робочого часу верстатів:

Верстати	Норми затрат часу на обробку однієї деталі			Вартість однієї год роботи	Фонд робочого часу
	А ₁	А ₂	А ₃		
Р ₁	0,3	0,1	0,2	30	20
Р ₂	0,5	0,2	0,4	20	22

Знайти, скільки деталей кожного виду слід обробити на кожному з верстатів, щоб загальні витрати на обробку деталей були найменшими при такому добовому завданні виготовлення деталей: А₁ - 30 од., А₂ - 80 од., А₃ - 70 од.

2.2. Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини А₁, А₂, А₃. Відомо, що дана суміш повинна містити речовини А₁ не менше 6 одиниць, речовини А₂ не менше 8 одиниць, речовини А₃ не менше 12 одиниць. Речовини А₁, А₂, А₃ містяться в трьох видах продуктів П₁, П₂, П₃ у концентраціях, що визначаються таблицею:

Продукти	Хімічні речовини		
	А ₁	А ₂	А ₃
П ₁	2	1	3
П ₂	1	2	4
П ₃	3	1,5	2

Вартість одиниці продукту П₁ складає 2 гривні, одиниці продукту П₂ – 3 гривні, одиниці продукту П₃ – 2,5 гривні. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

2.3. У пунктах А1 і А2 розміщені цегельні заводи, а в пунктах В1 і В2 – кар’єри, які постачають глину. Потреби заводів у глині не більші ніж продуктивність кар’єрів. Відомо скільки глини потрібно кожному заводу і скільки її добувають у кожному з кар’єрів. Відома також вартість перевезення 1 тонни глини з кожного кар’єру до заводів. Як спланувати постачання заводів глиною, щоб витрати були найменшими, якщо всі необхідні дані наведено в таблиці:

Постачальник	Споживач		Запаси
	А1	А2	
В1	2	6	70
В2	5	3	30
Потреби	40	50	

2.4. У студентській їдальні для виготовлення бутербродів трьох типів використовуються чотири види продуктів, загальні обсяги яких і норми витрат зазначені в таблиці. Відомий також прибуток, одержуваний їдальнею від реалізації однієї партії бутербродів кожного виду.

Вид продукту	Норми витрат продуктів (кг) на одну партію бутербродів типу			Наявність продуктів (кг)
	Б1	Б2	Б3	
S1	4	3	1	42
S2	2	5	4	56
S3	3	6	2	38
S4	5	7	3	40
Прибуток (грн.)	5	7	8	

Спланувати випуск партій бутербродів у таких кількостях, щоб загальний прибуток їдальні був максимальним. При цьому слід урахувати, що бутербродів першого типу необхідно приготувати не менше, ніж 4 партії.

2.5. Чотири овочесховища кожен день забезпечують картоплею три магазини. Магазини подали заявки відповідно на 17, 12 і 32 т. Овочесховища мають відповідно 20, 20, 15 і 25 т. Тарифи перевезень (в гр. од. за 1 т) вказано в наступній таблиці:

Овочесховища	Магазини		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Скласти план перевезень, що мінімізує сумарні транспортні витрати.

2.6. Стандартом передбачено, що октанове число бензину А-76 повинно бути не нижчим 76, а вміст сірки в ньому – не більше 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовується суміш з чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонентів, їхня собівартість і їхнє октанове число, а також про вміст сірки подані в таблиці:

Характеристики марки бензину	Компоненти			
	1	2	3	4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурси, т	700	600	500	300
Собівартість, гр.од./т	40	45	60	90

Визначити скільки тонн кожного компонента треба використати для одержання 1000 тонн бензину А-76, щоб його собівартість була максимальною.

2.7. Ткацька фабрика має N_1 верстатів типу A_1 і N_2 верстатів типу A_2 . Верстати можуть виробляти три види тканин: T_1, T_2 і T_3 , але з різною продуктивністю, а саме a_{ij} – продуктивність верстата A_i при виробництві тканини типу T_j , $i \in \{1,2\}, j \in \{1,2,3\}$.

Кожний метр тканини виду T_j дає прибуток c_j , $j \in \{1,2,3\}$. Фабрика за контрактом повинна виробляти за місяць не менше b_j метрів тканини T_j , $j \in \{1,2,3\}$. Кількість метрів кожного виду тканини не повинна перевищувати відповідно $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ метрів. Крім того, усі без винятку верстати повинні бути завантажені. Треба так організувати виробництво тканин T_j , $j \in \{1,2,3\}$, щоб сумарний місячний прибуток від їхньої реалізації був максимальним.

2.8. Скласти оптимальний план (мінімум капітальних витрат) забудови мікрорайону міста житловими будинками трьох різних типів. Наявність квартир у кожному з типових будинків відображає таблиця

Типи квартир	Кількість квартир за типом будинку		
	першим	другим	третім
2	50	50	60
3	30	100	50
4	120	60	40

Відома вартість одного будинку: першого типу – 8040 тис. грн., другого типу – 8220 тис. грн., третього типу – 6020 тис. грн.

Демографічний склад майбутнього населення мікрорайону зумовлює необхідність того, щоб було не менше, ніж 750 двокімнатних квартир, 1700 трикімнатних квартир і 450 чотирикімнатних квартир.

2.9. На будівництво дороги необхідно завести 20 000 м³ різних матеріалів з трьох кар'єрів А₁, А₂, А₃, запаси яких відповідно дорівнюють 8 000 м³, 9 000 м³ і 10000 м³. Для навантаження матеріалів виділено 60 машино-змін і при цьому використовуються екскаватори з продуктивністю 250 м³ за зміну в кар'єрах А₁ і А₂ і 500 м³ за зміну в кар'єрі А₃.

Транспортні витрати на перевезення матеріалів такі: для перевезення 10000 м³ з кар'єру А₁ треба 1 000, з кар'єру А₂ – 1 350, з кар'єру А₃ – 1 700 автомобіле-змін. Скласти план перевезень, який забезпечує мінімальні транспортні витрати.

2.10. Маємо два склади готової продукції А₁ і А₂ з запасами однорідного вантажу 200 і 300 т. Цей вантаж необхідно доставити трьом споживачам: В₁, В₂, В₃ в кількості 100, 150, 250 т відповідно. Вартість перевезень 1 т вантажу із складу А₁ споживачам В₁, В₂, В₃ дорівнює 5, 3, 6 грошових одиниць, а із складу А₂ тим же споживачам 3, 4, 2 гр. од. відповідно.

Скласти план перевезень, що мінімізує сумарні транспортні витрати.

2.11. Заводи №1, 2, 3 виробляють однорідну продукцію в кількості відповідно 500, 400 і 510 одиниць. Собівартість виробництва одиниці продукції на заводі №1 складає 25 гр. од., на заводі №2 – 20 гр. од., на заводі №3 – 23 гр. од. Продукція відправляється в пункти А, В, С, потреби яких дорівнюють 310, 390 і 450 одиницям. Вартості перевезень 1 од. продукції задані матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Скласти оптимальний план перевезень продукції при умові, що комунікації між заводом №2 і пунктом А не дозволяють пропускати в період, що розглядається, більше 250 одиниць продукції.

2.12. Дві торгівельні бази забезпечують чотири крамниці борошном. Відомі транспортні витрати на перевезення борошна від кожного постачальника кожному споживачеві, коп/кг (див. таблицю):

Резерви поста- чальників, кг	Обсяг потреб споживачів, кг			
	900	800	1200	1100
1700	3	4	2	3
2200	2	5	1	4

Визначити план закріплення крамниць за базами при мінімальних транспортних витратах.

2.13. Необхідно розподілити посівну площу під пшеницю та ячмінь таким чином, щоб одержати максимальну кількість продукції у вартісному вираженні, знаючи врожайність, ціну, витрати ресурсів механізованої і ручної праці на 1га посівної площі, а також обсяг наявних ресурсів:

Вид ресурсу	Норми витрат на 1га посівної площі		Загальна кількість ресурсів
	Пшениця	Ячмінь	
Механізована праця, год/га	1,6	1,8	4000
Ручна праця, год/га	2,4	2,0	6000
Урожайність, ц/га	20	25	
Ціна 1 ц продукції	6	4	

2.14. З листового прокату необхідно вирізати заготовки двох типів А і В для виготовлення 60 штук виробів. Для одного виробу треба три заготовки типу А і вісім заготовок типу В. Розміри листа, а також розміри і конфігурація заготовок дозволяють вибрати чотири раціональних варіанти розкрою листа (див. таблицю)

Заготовки	Варіанти розкрою				Потреби
	1	2	3	4	
А	4	3	2	1	180
В	0	4	6	10	480
Відходи	12	5	3	0	

Скласти такий план розкрою, щоб одержати необхідну кількість заготовок кожного типу при мінімальних сумарних відходах.

2.15. Процес виготовлення двох видів виробів заводом вимагає, по-перше, послідовної обробки на токарних і фрезерних верстатах, і, по-друге, витрат двох видів сировини: сталі й кольорових металів. Дані про витрати кожного

ресурсу на одиницю продукції та загальні запаси ресурсів наведено в таблиці:

Матеріали та обладнання	Витрати на один виріб		Ресурси
	A ₁	A ₂	
Сталь (кг)	10	70	320
Кольорові метали (кг)	20	50	420
Токарні верстати (верстато-години)	300	400	6200
Фрезерні верстати (верстато-години)	200	100	3400

Прибуток від реалізації одиниці виробу A₁ – 3 тис. грн., одиниці виробу A₂ – 8 тис. грн. Знайти такий план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток за умови, що час роботи фрезерних верстатів буде використано повністю.

2.16. Для збереження працездатності та здоров'я людина повинна споживати за добу певну кількість поживних речовин: білків B₁, жирів B₂, вітамінів B₃. Запаси їх у продуктах П₁ і П₂ неоднакові. Кількість відповідної речовини в одиниці кожного продукту наведені в таблиці:

Поживні речовини	Вміст поживних речовин в одиниці продукту		Мінімальна норма
	П ₁	П ₂	
B ₁	0,2	0,1	120
B ₂	0,075	0,1	70
B ₃	0	0,1	10
Вартість продукту	0,2	0,3	

Треба так організувати харчування, щоб вартість його була найменшою, а організм одержав належну кількість поживних речовин.

2.17. Три спеціалізовані майстерні по ремонту двигунів мають виробничі потужності відповідно 100, 700, 900 ремонтів у рік. В п'яти районах, які обслуговують ці майстерні, потреби у ремонті дорівнюють відповідно 90, 180, 150, 120, 80 двигунів у рік. Витрати на перевезення одного двигуна із районів до майстерень наступні:

Райони	Майстерні		
	1	2	3
1	4,5	3,7	8,3
2	2,1	4,3	2,4
3	7,5	7,1	4,2
4	5,3	1,2	6,2
5	4,1	6,7	3,1

Сплануйте кількість ремонтів кожної майстерні для кожного з районів таким чином, щоб сумарні транспортні витрати були б мінімальними.

2.18. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виготовлення одного валу робітник затрачає 3 год., а однієї втулки – 2 год. Від реалізації валу підприємство одержує 80 коп. прибутку, а від реалізації втулки – 60 коп. Цех повинен випустити не менше 100 валів і не менше 200 втулок. Скільки треба виготовити валів і втулок, щоб цех одержав найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу становить 900 людино-годин.

2.19. Для виготовлення виробів P_1 і P_2 промкомбінат використовує три види сировини S_1 , S_2 і S_3 відповідно у кількостях 280, 300 і 300 одиниць. Для виготовлення одного виробу P_1 витрачається 6 одиниць сировини S_1 , 8 одиниць сировини S_2 і 10 одиниць сировини S_3 . На один виріб P_2 витрачається відповідно 5, 5 і 2,5 одиниці кожного виду сировини. Знайти такий план виробництва, який забезпечував би найбільший прибуток, якщо реалізація одного виробу P_1 дає 7 грн. прибутку, а виробу P_2 – 5 грн.

2.20. На трьох складах C_1 , C_2 , C_3 є відповідно 90, 70, 50 тонн борошна, яке треба перевезти у крамниці K_1 , K_2 , K_3 , K_4 відповідно у кількості 80, 60, 40, 30 тонн. Скласти оптимальний план перевезення борошна, якщо вартість перевезення 1 тонни в крамниці K_1 , K_2 , K_3 , K_4 зі складу C_1 дорівнює відповідно 2, 1, 3, 2 гривням, зі складу C_2 – 2, 3, 3, 1 гривням, зі складу C_3 – 3, 3, 2, 1 гривням.

2.21. Для виготовлення трьох видів виробів Π_1 , Π_2 , Π_3 використовують чотири типи обладнання S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з видів обладнання, часовий ресурс обладнання та прибуток від реалізації виробу даного типу наведено у таблиці:

Тип обладнання	Витрати часу на обробку одного виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання
	П ₁	П ₂	П ₃	
S ₁	2	4	5	120
S ₂	1	8	6	280
S ₃	7	4	5	240
S ₄	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель.

2.22. Максимальна площа, яку господарство може використати під посадку плодкових дерев, складає 1000 га. На цій площі планується посадити три види дерев P₁, P₂ і P₃. Господарство має три типи обмежених ресурсів: S₁ – орна земля; S₂ – трудові ресурси; S₃ – гроші та матеріали. Запаси ресурсів, витрати їх на 1 га посадок і ціна продукції з одного гектара відповідної культури задані таблицею

Типи ресурсів	Види дерев			Запаси ресурсів
	P ₁	P ₂	P ₃	
S ₁	1	1	1	1 тис. га
S ₂	100	60	200	200 тис. людино-днів
S ₃	400	200	800	600 тис. грн.
Ціна продукції з 1 га (тис. грн.)	3	2	5	

Треба знайти такі площі посадок дерев кожного виду, які б забезпечували максимальний прибуток від реалізації одержаної продукції.

2.23. Підприємство випускає чотири типи продукції, для чого використовує три види сировини. Дані про витрати сировини на одиницю продукції, обмеження на запаси сировини, а також величину прибутку від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці:

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції				Запаси сировини
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	
S ₁	2	2	4	5	28
S ₂	0	1	2	2	10
S ₃	2	1	0	6	14
Прибуток	2	4	6	1	

Треба так спланувати випуск продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним.

2.24. Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини А, В, С. Відомо, що утворена суміш повинна містити речовини А не менше 6 одиниць, речовини В – не менше 8 одиниць, речовини С – не менше 12 одиниць. Речовини А, В, С містяться в трьох видах продуктів П₁, П₂, П₃ в концентраціях, що задаються таблицею:

Продукти	Хімічні речовини		
	А	В	С
П ₁	2	1	3
П ₂	1	2	4
П ₃	3	1,5	2

Одиниця продукту П₁ коштує 2 грн., одиниця П₂ – 3 грн., одиниця П₃ – 2,5 грн. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

2.25. Для виробництва продукції типу Р₁ і Р₂ підприємство використовує два види сировини: S₁ і S₂. Дані про виробництво наведені в таблиці:

Сировина	Витрати сировини на Одиницю продукції, кг/од.		Кількість сировини, кг
	Р ₁	Р ₂	
S ₁	1	3	300
S ₂	1	1	150
Прибуток, тис. грн./од. прод.	2	3	

Треба так організувати виробництво, щоб прибуток був максимальним.

2.26. На обладнанні трьох типів Р₁, Р₂, Р₃ підприємство повинно виробити три види продукції А₁, А₂, А₃. Потужність обладнання кожного типу, затрати часу на виробництво одиниці продукції і прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду задані у таблиці:

Тип обладнання	Затрати часу на од. продукції			Потужність обладнання (год.)
	А ₁	А ₂	А ₃	
Р ₁	2	4	0	100
Р ₂	5	1	4	20
Р ₃	0	1	4	80
Прибуток (грн.)	3	2	4	

Знайти, скільки виробів кожного виду повинно випускати підприємство, щоб: 1) одержати максимальний прибуток; 2) використати повністю наявні потужності обладнання.

2.27. Фабрика випускає три види тканин P_1 , P_2 і P_3 , причому добовий план складає не менше 90 м тканини P_1 , 70 м тканини P_2 і 60 м тканини P_3 . Добові ресурси такі: 780 одиниць обладнання, 850 одиниць сировини і 790 одиниць електроенергії, витрати яких на один метр тканини подано в таблиці:

Ресурси	Тканини		
	P_1	P_2	P_3
Обладнання	2	3	4
Сировина	1	4	5
Електроенергія	3	4	2

Ціна одного метра тканини P_1 – 80грн., P_2 – 70 грн., P_3 – 60 грн.

Визначити, скільки метрів тканини кожного виду треба виробити, щоб загальна вартість виробленої продукції була найбільшою.

2.28. Підприємство випускає чотири види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів обладнання наведені в таблиці. В ній також вказано загальний фонд робочого часу для кожного типу обладнання і прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Тип обладнання	Затрати часу на од. пр-ції				Фонд робоч. часу
	P_1	P_2	P_3	P_4	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	0	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	0	340
Прибуток	8	3	2	1	

Знайти обсяг випуску кожного з виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

2.29. Скласти оптимальний добовий раціон відгодівлі тварин. Вихідні дані для розв'язування задачі наведено в таблиці:

Поживні речовини, умовн. од.	Вміст поживних речовин в одиниці корму виду		Мінімальна добова норма споживання, умовн. од.
	K_1	K_2	
Кормові одиниці	1	0,5	5
Перетравлюваний протеїн	80	200	560
Кальцій	1	8	20
Ціна 1 од. корму, грн.	3	5	

2.30. Підприємство може виробляти чотири типи продукції P_j , $j \in \{1,2,3,4\}$, на виробництво яких витрачається три види ресурсів S_i , $i \in \{1,2,3\}$. Доход від реалізації виробу P_1 складає 2 тис. грн., виробу P_2 – 4 тис. грн., виробу P_3 і P_4 – по 1 тис. грн. Витрати на одиницю продукції наведено в таблиці:

Ресурси	Витрати ресурсів на виріб				Запаси ресурсів
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	1	3	0	1	4
S_2	2	1	0	0	3
S_3	0	1	4	1	3

Треба знайти оптимальний план виробництва, при якому підприємство одержувало б максимальний прибуток.

Тема 3. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Завдання 3. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування.

3.1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$z = 7x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.$$

3.3.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 27; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

3.2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max.$$

3.4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 26; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

3.5.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 6; \\ z = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 4; \\ z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3.9.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 10x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 6; \\ z = -7x_1 - 2x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.11.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 10x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 3; \\ z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.6.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.8.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 5x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 + 5x_2 \geq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 4; \\ z = 7x_1 - x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.10.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 4x_1 - x_2 \geq -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20, \\ 0 \leq x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, \\ z = -6x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.12.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 9, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 5; \\ z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.13.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -5x_1 + x_2 \leq 0, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = x_1 + x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3.15.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 0; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.17.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 7; \\ z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.19.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 6x_1 - 5x_2 \leq 30; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3.14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3.16.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ 2x_2 \leq 3, \\ 2x_1 \leq 5; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3.18.

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 \geq -24, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = -4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

3.20.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

3.21.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -4x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min.$$

3.23.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = -5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max.$$

3.25.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 40; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max.$$

3.27.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

3.22.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

3.24.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

3.26.

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

3.28.

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ 0 \leq x_1 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0;$$

$$z = -2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min.$$

3.29.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 9, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max.$$

3.30.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

Тема 4. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Завдання 4. Розв'язати симплексним методом задачу лінійного програмування.

4.1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 17x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 4};$$

$$z = 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \rightarrow \min.$$

4.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 13x_1 + 2x_2 \leq 26, \\ 2x_1 - 13x_2 \geq -26; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$z = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max.$$

4.3.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -7; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 4};$$

$$z = 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max.$$

4.4.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 3};$$

$$z = 2x_1 + x_3 \rightarrow \min.$$

4.5.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 1, \\ -4x_1 - 12x_2 + x_3 - 4x_4 \leq -1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5};$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \min.$$

4.6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 3};$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max.$$

4.7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ 6x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$z = 2x_1 + 8x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min.$$

4.9.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4.11.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -6, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ 2x_2 - 2x_3 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

4.13.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 7, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 20, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 50; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5};$$

$$z = 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 3x_5 \rightarrow \min.$$

4.15.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 6};$$

$$z = -x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_5 + x_6 \rightarrow \max.$$

4.8.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 5x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

4.10.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 30, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -12; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \max.$$

4.12.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 6, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = -2x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min.$$

4.14.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 \geq -3, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -3x_1 - 3x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max.$$

4.16.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_3 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4.17.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -5; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}; \\ z = 6x_1 - 2x_4 \rightarrow \min. \end{cases}$$

4.19.

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 + 9x_3 \geq 1, \\ x_1 + 8x_2 + 11x_3 \leq 7, \\ 9x_1 + 4x_2 + 13x_3 \leq 2; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}; \\ z = -10x_1 + x_2 + 9x_3 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4.21.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_4 \leq 20; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \\ z = -6x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

4.23.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 9, \\ x_1 - x_4 \leq 5; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \\ z = 2x_1 + 2x_2 - x_4 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4.25.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ -5x_1 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 12; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \\ z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min. \end{cases}$$

4.18.

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -30, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \\ z = 6x_1 - 2x_4 \rightarrow \min. \end{cases}$$

4.20.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 = -3; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}; \\ z = x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4.22.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 10x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 5; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \\ z = 3x_1 + x_3 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4.24.

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_2 + x_3 \geq 9; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}; \\ z = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min. \end{cases}$$

4.26.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}; \\ z = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4.27.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_4 \geq 9; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$z = -x_1 + 2x_2 + x_4 \rightarrow \min.$$

4.28.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 12, \\ -x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4.29.

$$\begin{cases} 7x_1 + x_3 \leq 7, \\ 2x_2 - x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4.30.

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \geq -10, \\ 4x_1 - x_3 \leq 12, \\ x_2 + x_3 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

Тема 5. Двоїсті задачі. Теореми двоїстості

Завдання 5. Записати до даної задачі двоїсту і, розв'язавши симплексним методом одну задачу, знайти розв'язок двоїстої до неї.

5.1.

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -4, \\ -5x_1 + x_3 \geq -12, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -4; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max.$$

5.2.

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 - 3x_3 \geq 1, \\ 15x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 120x_1 + 42x_2 + 8x_3 \rightarrow \min.$$

5.3.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 102, \\ -2x_1 - 5x_2 \geq -80, \\ x_1 + 5x_2 \leq 75; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 3x_1 + 10x_2 \rightarrow \max.$$

5.4.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -3x_1 - x_2 \leq -3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min.$$

5.5.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -4; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 18x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

5.7.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 2, \\ 14x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10, \\ -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq -6; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 50x_1 + 45x_2 + 8x_3 \rightarrow \min.$$

5.9.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -2x_1 - x_2 \geq -4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

5.11.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$z = -7x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

5.13.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq -4, \\ -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 8x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

5.6.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 6};$$

$$z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min.$$

5.8.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1 \geq 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 3x_1 \rightarrow \min.$$

5.10.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -2x_1 - x_2 \geq -13, \\ 3x_1 - x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

5.12.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \geq 27, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 28; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min.$$

5.14.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \geq -5, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

5.15.

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 1, \\ 15x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 120x_1 + 42x_2 + 8x_3 \rightarrow \min.$$

5.17.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 9x_1 + 12x_2 \leq 30, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 6x_1 - 5x_2 \rightarrow \max.$$

5.19.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq -7, \\ x_1 + 5x_2 \geq 11, \\ 2x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 + 2x_3 \rightarrow \max.$$

5.21.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq -1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max.$$

5.23.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 1; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$z = x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 12x_4 \rightarrow \min.$$

5.16.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 10x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

5.18.

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ -2x_1 - x_2 \leq -21, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 19; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = -2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min.$$

5.20.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 14; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 2x_1 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

5.22.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \geq 3; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$z = 4x_1 + 18x_2 + 30x_3 + 5x_4 \rightarrow \min.$$

5.24.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$z = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max.$$

5.25.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}; \end{cases}$$

$$z = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 \rightarrow \min.$$

5.27.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}; \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min.$$

5.29.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \max.$$

5.26.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 4x_4 = 7, \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 3; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$z = 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 3x_4 \rightarrow \min.$$

5.28.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max.$$

5.30.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -5; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min.$$

Завдання 6. До задачі із завдання 3 скласти двоїсту до неї і знайти її розв'язок, використовуючи раніше знайдений розв'язок задачі із завдання 3 і теореми двоїстості.

Завдання 7. Побудувати математичну модель задачі лінійного програмування. До даної задачі побудувати математичну модель двоїстої задачі.

7.1. Підприємство випускає три види виробів V_1, V_2, V_3 . Для випуску виробів використовують матеріали M_1 і M_2 , щомісячні витрати яких не можуть перевищувати відповідно 2400 кг і 3700 кг. Матеріалу M_1 витрачається на 1 виріб першого типу 8 кг, 2-го – 10 кг, 3-го – 11 кг. Матеріалу M_2 відповідно 4 кг, 5 кг і 7 кг. Оптова ціна одного виробу першого виду 700 тис. у.г.о., другого і третього відповідно 1000 і 900 тис. у.г.о.

Визначити оптимальний план випуску виробів, який забезпечує підприємству максимум виторгу.

7.2. З пункту А в пункт В кожен день відправляються пасажирські і швидкі поїзди. Дані про організацію перевезень наведено в наступній таблиці:

Поїзди	Кількість вагонів в поїзді				
	Багажний	Поштовий	Плацкарт	Купейний	М'який
Швидкий	1	1	5	6	3
Пасажи́рський	1	-	8	4	1
Кількість пасажирів	-	-	58	40	32
Парк вагонів	12	8	81	70	26

Скільки повинно бути сформовано швидких і пасажирських поїздів, для того, щоб перевезти найбільшу кількість пасажирів.

7.3. Для виготовлення сплаву з міді, олова і цинку як сировину використовують два сплави А і В цих же металів, що відрізняються складом і вартістю. Дані про ці сплави наведено в таблиці:

Компоненти сплаву	Вміст компонентів у %	
	А	В
Мідь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Вартість 1 кг	4	6

Одержаний сплав повинен містити не більше 2 кг міді, не менше 3 кг олова, а вміст цинку може складати від 7,2 до 12,8 кг.

Знайти кількість x_j , $j \in \{1,2\}$, сплавів кожного виду, які забезпечують одержання нового сплаву з мінімальними витратами на сировину.

7.4. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A_1 , A_2 , A_3 використовує три типи сировини S_1 , S_2 , S_3 . Норми витрат сировини кожного типу на виробництво 1т карамелі даного виду наведені в таблиці:

Тип сировини	Норми витрат сировини на 1т карамелі			Загальна кількість сировини
	A_1	A_2	A_3	
S_1	0,8	0,5	0,6	800
S_2	0,4	0,4	0,3	600
S_3	-	0,1	0,1	120
Прибуток	108	112	126	

У даній таблиці вказано також загальну кількість сировини кожного типу, яка може бути використана фабрикою, а також наведено прибуток від реалізації 1т карамелі даного виду.

Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації.

7.5. При відкормі кожна тварина повинна отримати не менше 9 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види корму, представлених в наступній таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживної речовини на 1 кг	
	Корма 1	Корма 2
Білки	3	1
Вуглеводи	1	2
Протеїн	1	6

Вартість 1 кг корму першого виду – 4 гр. од., другого – 6 гр. од. Скласти денний раціон поживності, що має найменшу вартість.

7.6. Господарство має такі ресурси: площа – 100 од., труд – 120 од., тяга – 80 од. Господарство виробляє чотири види продукції П₁, П₂, П₃, П₄. Організація виробництва характеризується наступною таблицею:

Продукція	Витрати на 1 од. продукції			Прибуток від одиниці продукції
	Площа	Труд	Тяга	
П ₁	2	2	2	1
П ₂	3	1	3	4
П ₃	4	2	1	3
П ₄	5	4	1	5

Скласти план випуску продукції, який забезпечує господарству максимальний прибуток.

7.7 Цех випускає трансформатори двох видів. Для виготовлення трансформаторів обох видів використовується залізо і дріт. Загальний запас заліза 3 т, дроту – 18 т. На один трансформатор першого виду витрачається 5 кг заліза і 3 кг дроту, а на один трансформатор другого виду витрачається 3 кг заліза і 2 кг дроту. За кожний реалізований трансформатор першого виду завод отримує прибуток 3 гр. од., другого – 4 гр. од. Скласти план випуску трансформаторів, що забезпечує максимальний прибуток.

7.8 Агрокомплекс відвів три земельні масиви розміром 5000, 8000, 9000 га для посіву жита, пшениці, кукурудзи. Середня врожайність в центнерах на 1 га по масивах вказана в наступній таблиці:

Посіви	Масиви		
	I	II	III
Жито	12	14	15
Пшениця	14	14	22
Кукурудза	30	35	25

З 1 ц жита агрокомплекс отримує 2 гр. од., за 1 ц пшениці – 2,8 гр. од., за 1 ц кукурудзи – 1,4 гр. од. Скільки гектарів і на яких масивах господарству необхідно відвести на кожну культуру для того, щоб отримати максимальний прибуток, якщо за планом господарство повинно здати не менше 1900 т жита, 158000 т пшениці і 30000 т кукурудзи ?

7.9. Підприємство випускає три види продукції, для чого використовує чотири види сировини. Дані про витрати сировини на одиницю продукції, обмеження на запаси сировини, а також величини прибутку від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці:

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	P_1	P_2	P_3	
S_1	2	2	4	28
S_2	1	0	2	12
S_3	1	2	3	10
S_4	5	2	6	15
Прибуток	3	2	1	

Потрібно так спланувати випуск продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним.

7.10 Цех випускає продукцію двох видів P_1 і P_2 , на виробництво якої використовує сировину трьох видів S_1 , S_2 , S_3 з запасами відповідно: 19 кг, 13 кг, 15 кг. Сировини S_1 витрачається на 1 од. продукції P_1 і P_2 відповідно 3 кг і 2 кг, S_2 – 4 кг і 5 кг, S_3 – 2 кг і 1 кг. Оптова ціна 1 одиниці продукції P_1 складає 8 у.г.о., P_2 – 5 у.г.о. Визначити оптимальний план випуску виробів, який забезпечує підприємству максимум виторгу.

7.11. З трьох продуктів – I, II, III складається суміш. До складу суміші повинні входити не менше 6 од. хімічних речовин А, 8 од. – речовини В і не менше 12 од. речовини С. Структура хімічних речовин приведена в наступній таблиці:

Продукт	Зміст хімічних речовин			Вартість 1 од. продукції
	А	В	С	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Скласти найбільш дешеву суміш.

7.12. Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини А₁, А₂, А₃. Відомо, що дана суміш повинна містити речовини А₁ не менше 8 од., А₂ – не менше 6 од., А₃ – не менше 12 од. Речовини А₁, А₂, А₃ містяться у двох видах продукції П₁ і П₂ у концентраціях, що задаються таблицею:

	П ₁	П ₂
А ₁	2	1
А ₂	1	3
А ₃	3	4

Вартість одиниці продукції П₁ складає 2 гривні, одиниці продукції П₂ – 2,5 гривні. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

7.13. При відгодівлі кожна тварина щоденно повинна одержувати не менше 60 од. поживної речовини А₁, не менше 50 од. речовини А₂ і не менше 12 од. речовини А₃. Вказані поживні речовини містяться у трьох видах корму Р₁, Р₂, Р₃. Вміст одиниць поживної речовини в 1кг кожного з видів корму наведено у таблиці:

Поживні речовини	Вміст поживної речовини в 1кг корму		
	Р ₁	Р ₂	Р ₃
А ₁	1	3	4
А ₂	2	4	2
А ₃	1	4	3

Скласти добовий раціон, який забезпечує одержання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1кг корму Р₁ складає 9 грн., корму Р₂ – 12 грн. і корму Р₃ – 10 грн.

7.14. Цех випускає три види деталей – А, В, С. Кожна деталь обробляється трьома станками. Організація виробництва в цеху характеризується наступною таблицею:

Станок	Тривалість обробки деталі, хвил.			Фонд часу, год
	A	B	C	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Відпускна ціна за одну деталь	30	32	30	

Скласти план завантаження верстатів, який забезпечує цеху отримання максимального прибутку.

7.15. Підприємство повинно випускати два види продукції – А і В, використовуючи при цьому послідовно чотири верстати. Дані про технологічний процес вказані в наступній таблиці:

Верстат	Трудомісткість на 1 од. продукції		Фонд часу, год
	A	B	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибуток на 1 од. продукції (гр. од.)	2	3	

Скласти план випуску продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

7.16. На підприємстві для виробництва запасних частин для автомобілів використовується три види ресурсів. Випускаються три види запасних частин. Організація виробництва на підприємстві характеризується наступною таблицею:

Ресурси	Витрати матеріалів на виробництво однієї запасної частини, кг			Запаси ресурсів, кг
	1	2	3	
I	5	5	2	1200
II	4	-	3	300
III	-	2	4	800
Прибуток від реалізації однієї запасної частини (гр. од.)	5	8	6	

Скласти план виробництва запасних частин, що забезпечує підприємству максимальний прибуток.

7.17. Продаючи товари двох типів А і В, торгівельне підприємство використовує чотири види ресурсів Р₁, Р₂, Р₃, Р₄. Норми витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару та обсяг ресурсів наведено в таблиці:

Ресурси	Норма витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару		Кількість ресурсів на підприємстві
	А	В	
Р ₁	2	2	12
Р ₂	1	2	8
Р ₃	4	0	16
Р ₄	0	4	12

Прибуток від реалізації одиниці товару А складає 2 грн., товару В – 3 грн.

Знайти оптимальний план реалізації товарів, який забезпечує максимальний прибуток.

7.18. Нафтопереробний завод отримує чотири напівфабрикати: 400 тис. л алкилату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентіну. В результаті змішування цих чотирьох компонентів у рівних пропорціях утворюється три сорти авіаційного бензину: бензин А – 2:3:5:2, бензин В – 3:1:2:1, бензин С – 2:2:1:3. Вартість 1 тис. л вказаних сортів бензину характеризується числами 120 гр. од., 100 гр. од., 150 гр. од. Скласти план випуску різних сортів авіаційного бензину з умови отримання максимальної вартості всієї продукції.

7.19. Державне сільськогосподарське підприємство відвело три земельних масиви площею 5, 8 і 9 тис. га відповідно під посіви жита, пшениці та кукурудзи. Середню врожайність культур на кожному масиві подано в таблиці:

Культура	Земельний масив		
	перший	другий	третій
Жито, ц/га	20	18	17
Пшениця, ц/га	30	25	28
Кукурудза, ц/га	25	24	26

За 1 ц жита господарство одержує 20 у.г.о., за 1 ц пшениці – 25 у.г.о. і за 1 ц кукурудзи – 14 у.г.о.

Яку площу слід відвести господарству під кожен з культур і на якому масиві, щоб одержати максимальний прибуток, коли за планом передбачається зібрати не менше як 19000 ц жита, 158000 ц пшениці і 300000 ц кукурудзи.

7.20. У заводській лабораторії створюється антифрикційний сплав (олов'янистий бабіт), який має містити: олова – не менше 15%, сурми – не

менше 15%, свинцю – майже 70%.

Є чотири сплави, процентний склад і ціни, які наведено у таблиці:

Елементи	Сплав			
	1	2	3	4
Олово	12	20	12	20
Сурма	12	18	18	14
Свинець	76	62	70	66
Ціна за 1 кг, у. г. о.	3,5	5,2	4,0	4,6

Розрахувати кількість елементів для сплаву кожного виду, необхідну для 1 кг суміші, яка б забезпечувала мінімальні витрати.

7.21. Для участі у змаганнях спортклуб повинен виставити команду, що складається з спортсменів I і II розрядів. Змагання проводяться по бігу, стрибкам у висоту, стрибкам у довжину. У бігу повинні брати участь 5 спортсменів, в стрибках у довжину – 8 спортсменів, а в стрибках у висоту – не більше 10. Кількість очок, гарантуючих спортсмену кожного розряду по кожному виду, вказано в наступній таблиці:

Розряд	Біг	Стрибки в висоту	Стрибки в довжину
I	4	5	5
II	2	3	3

Розподілити спортсменів в команди так, щоб сума очок команди була б найбільшою.

7.22. Для виготовлення столів, шаф, стільців на деякому підприємстві використовують два види деревини. Витрати деревини кожного виду на кожний виріб, а також її запаси, задано у таблиці:

Виріб	Сировина	
	I вид деревини, м ³	II вид деревини, м ³
Стіл	0,13	0,1
Шафа	0,12	0,2
Стілець	0,05	0,03
Запаси	84	88

Прибуток підприємства від виробництва одного стола становить 12 грн., шафи – 15 грн., стільця – 4 грн. Скільки столів, шаф, стільців має виготовити підприємство, щоб забезпечити найвищу рентабельність.

7.23. Звіроферма вирощує чорно-бурих лисиць і песців, використовуючи корми трьох видів. За одну добу необхідно видавати кожній лисиці корму першого виду – 4 од., а песцю – 5 од.; корму другого виду кожній лисиці – 3 од., а кожному песцю – 2 од.; третього виду лисиці – 4 од., а песцю – 3 од. Ферма кожен день може мати не більше 700 одиниць корму першого виду, не більше 900 одиниць – другого виду і не більше 400 одиниць – третього виду. Від реалізації однієї шкурки лисиці ферма одержує прибуток 10 гр. од., а від однієї шкурки песця – 5 гр. од.

Яку кількість лисиць і песців потрібно держати на фермі для того, щоб отримати найбільший прибуток.

7.24. На дільниці цеху виготовляють деталі двох найменувань А і В за допомогою двох операцій на токарному та фрезерувальному верстатах. Витрати часу на обробку однієї деталі на кожному з верстатів (у годинах) задано таблицею:

Верстат	Деталь	
	А	В
Токарний	0,3	0,1
Фрезерувальний	0,16	0,4

За планом деталей А необхідно виготовити не менше як 450 одиниць за місяць, а деталей В – не менше як 180 одиниць. Скласти найкращу програму, коли відомо, що фонд часу t (тривалість роботи) кожного з верстатів становить: токарний верстат може працювати 170 год. за місяць, фрезерувальний – 160 год.

7.25. Торгове підприємство для продажу товарів трьох видів використовує такі ресурси: час і площа торгових залів. Витрати ресурсів на продаж однієї партії товарів кожного виду наведені в таблиці. Прибуток, одержаний від реалізації однієї партії товарів I виду, становить 500 млн. у. г. о., II виду – 800 млн. у. г. о., а III виду – 600 млн. у. г. о. Визначити оптимальну структуру товарообороту, яка забезпечить максимальний прибуток.

Ресурси	Вид товару			Запаси ресурсів
	I	II	III	
Час, людино-години	0,5	0,7	0,6	370
Площа, м ²	0,1	0,3	0,2	90

7.26. З двох сортів бензину утворюються дві суміші – А і В. Суміш А містить бензину 60% 1-го сорту і 40% 2-го сорту; суміш В – 80% 1-го сорту і 20% 2-го сорту. Ціна 1 кг суміші А – 10 гр. од., а суміші В – 12 гр. од.

Скласти план утворення сумішей, при яких буде отримано максимальний прибуток, якщо бензину 1-го сорту є 50 т, а 2-го сорту 30 т.

7.27. Існують дві ґрунтово-кліматичні зони, площі яких відповідно дорівнюють 0,8 і 0,6 млн. га. Дані про врожайність зернових культур наведені в наступній таблиці:

Зернові культури	Врожайність (ц/га)		Вартість 1 ц гр. од.
	1-а зона	2-а зона	
Озимі	20	25	8
Ярові	25	20	7

Визначити розміри посівних площ озимих і ярових культур, необхідних для отримання максимального виходу продукції в грошовому вираженні.

7.28. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро і книжкові шафи, використовуючи два різних види дощок, причому фабрика має 500 м дощок першого виду і 1000 м дощок другого виду. Крім того, задано трудові ресурси 800 людино-годин.

У таблиці наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу і прибуток на один виріб.

Ресурси	Витрати на один виріб			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дощки першого виду, м	5	1	4	12
Дощки другого виду, м	2	3	9	1
Трудові ресурси, людино-години	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, у.г.о.	12	5	12	10

За цими вихідними даними розв'язати задачу. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

7.29. У заводській лабораторії створюється антифрикційний сплав (олов'янистий бабіт), який має містити: олова – не менше 25%, сурми – не менше 15%, свинцю – майже 60%.

Є чотири сплави, процентний склад і ціни, які наведено у таблиці:

Елементи	Сплав			
	1	2	3	4
Олово	14	18	12	20
Сурма	12	16	18	14
Свинець	76	60	70	66
Ціна за 1 кг, у. г. о.	5	4	3	5

Розрахувати кількість сплаву кожного виду, необхідну для одержання 1 кг суміші, яка б забезпечувала мінімальні витрати.

7.30. На заводі випускають вироби чотирьох типів. Від реалізації 1 од. кожного виробу завод отримує прибуток відповідно 2, 1, 3, 5 гр. од. На виготовлення виробів використовуються ресурси трьох типів: енергія, матеріали, труд. Дані про технологічний процес наведені в наступній таблиці:

Ресурси	Витрати ресурсів на 1 од. виробу				Запаси ресурсів, од.
	I	II	III	IV	
Енергія	2	3	1	2	30
Матеріали	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Сплануйте виробництво виробів так, щоб прибуток від їх реалізації був найбільший.

Тема 6. Цілочислове програмування

Завдання 8. Розв'язати методом Гоморі задачу лінійного програмування.

8.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,5}, \\ z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.2.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = 1,2. \\ z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.3.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,3}. \\ z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.4.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 8, \\ 2x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,5}, \\ z = -4x_1 - 10x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.5.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,5}, \\ z = x_4 - x_5 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.6.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 11, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,4}, \\ z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_2 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,5}, \\ z = -6x_4 - 2x_5 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.9.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2. \\ z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.11.

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,5}. \\ z = 7x_1 + x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.13.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2. \\ z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.15.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 34, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 60, \\ x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2. \\ z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.8.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4}, \\ z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.10.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \leq 40, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 29, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2. \\ z = x_1 - 20x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.12.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4}, \\ z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,6}, \\ z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.16.

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2. \\ z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

8.17.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,2}.$$

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

8.19.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,3}.$$

$$z = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

8.21.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,5},$$

$$z = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min.$$

8.23.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 + x_3 = 40, \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 29, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4},$$

$$z = x_1 - 20x_2 \rightarrow \min.$$

8.25.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,2}.$$

$$z = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min.$$

8.18.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4},$$

$$z = x_1 \rightarrow \max.$$

8.20.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4},$$

$$z = -x_1 + x_4 \rightarrow \min.$$

8.22.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4},$$

$$z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

8.24.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,2}.$$

$$z = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min.$$

8.26.

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1,2},$$

$$z = x_2 - x_3 \rightarrow \min.$$

8.27.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2, \\ z = -x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.29.

$$\begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1, 5}, \\ z = -x_3 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.28.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 36, \\ x_1 \leq 13, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2. \\ z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

8.30.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = \overline{1, 4}, \\ z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Тема 7. Транспортні задачі

Завдання 9. У пунктах постачання A_1, A_2, A_3 є однорідний вантаж в обсязі a_1, a_2, a_3 одиниць відповідно; цей вантаж треба транспортувати у пункти B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в обсязі відповідно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 одиниць. Потреби замовника (в умовних одиницях), запаси вантажу на кожному пункті постачання (у тих же одиницях) і тарифи (вартість перевезення одиниці вантажу з даного пункту постачання даному замовнику) вказані в таблиці. Потрібно спланувати перевезення так, щоб загальна сума вартості перевезень була найменшою.

9.1.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	3	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

9.2.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	2	8	6	115
A_2	3	1	9	7	3	175
A_3	9	6	7	2	1	130
Потреби	70	220	40	30	60	420

9.3.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	2	4	1	6	50
A_2	2	3	1	5	10	40
A_3	3	2	4	4	7	60
Потреби	30	25	35	20	40	150

9.4.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	10	15	14	4	150
A_2	3	7	12	5	8	170
A_3	21	18	6	13	16	260
Потреби	100	90	160	150	80	580

9.5.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	180
A_3	3	5	8	4	9	230
Потреби	70	120	105	125	110	530

9.6.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	9	7	11	6	175
A_2	4	3	12	2	8	165
A_3	5	17	9	4	11	180
Потреби	90	120	110	130	70	520

9.7.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	8	7	11	15	260
A_2	14	3	1	8	6	400
A_3	9	5	16	7	12	240
Потреби	180	200	190	230	100	900

9.8.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	4	11	5	3	250
A_2	8	17	13	7	6	300
A_3	14	10	5	8	9	270
Потреби	120	200	190	230	80	820

9.9.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	18	14	3	6	370
A_2	7	11	10	5	12	450
A_3	4	8	12	8	13	430
Потреби	300	230	330	290	100	1250

9.10.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	10	15	17	9	560
A_2	2	16	3	15	4	570
A_3	8	5	12	14	7	620
Потреби	350	300	350	500	250	1750

9.11.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	4	15	7	2	350
A_2	20	9	7	14	5	350
A_3	18	10	3	8	6	300
Потреби	180	220	230	270	100	1000

9.12.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	4	5	11	3	400
A_2	12	8	6	14	11	370
A_3	10	15	7	9	18	380
Потреби	250	200	290	260	150	1150

9.13.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	3	9	15	35	300
A_2	14	10	12	20	46	150
A_3	25	11	16	19	48	250
Потреби	150	100	150	100	200	700

9.14.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3	9	15	35	180
A_2	14	10	12	20	46	100
A_3	15	11	14	17	39	120
Потреби	100	60	90	70	80	400

9.15.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	42	15	17	9	250
A_2	16	16	13	15	4	125
A_3	16	34	22	14	10	225
Потреби	120	110	80	190	100	600

9.16.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	20	3	15	35	200
A_2	3	16	10	20	41	100
A_3	15	25	11	19	40	200
Потреби	80	100	70	130	120	500

9.17.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	20	3	9	35	220
A_2	3	14	10	12	42	100
A_3	15	31	21	16	47	180
Потреби	70	110	80	100	140	500

9.18.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	20	3	9	15	210
A_2	3	14	10	12	20	140
A_3	15	25	11	16	19	150
Потреби	80	120	90	110	100	500

9.19.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	7	3	9	15	170
A_2	12	3	10	12	20	120
A_3	19	15	11	16	19	110
Потреби	90	60	100	80	70	400

9.20.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	7	20	9	15	250
A_2	12	3	14	12	20	200
A_3	13	15	25	16	19	150
Потреби	75	125	150	50	200	600

9.21.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	7	20	3	15	225
A_2	12	3	14	10	20	250
A_3	18	15	25	11	15	125
Потреби	150	110	135	85	120	600

9.22.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	4	12	7	9	150
A_2	11	16	3	5	13	200
A_3	15	3	2	10	10	150
Потреби	80	110	60	140	110	500

9.23.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	4	5	7	9	1000
A_2	1	6	3	5	4	4000
A_3	6	3	2	1	10	2000
Потреби	450	650	3200	500	2200	7000

9.24.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	9	8	3	2	300
A_2	11	6	32	5	12	400
A_3	6	3	21	11	10	900
Потреби	250	300	350	500	200	1600

9.25.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	10	8	19	9	350
A_2	17	9	15	22	14	400
A_3	23	9	11	10	12	950
Потреби	250	300	350	500	300	1700

9.26.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	18	14	3	11	350
A_2	7	11	10	5	4	450
A_3	14	8	16	7	3	500
Потреби	300	280	320	280	120	1300

9.27.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	6	3	4	8	30
A_2	1	5	6	9	7	35
A_3	3	4	1	6	10	40
Потреби	20	30	20	10	25	105

9.28.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	4	6	3	60
A_2	2	4	7	1	2	40
A_3	5	2	3	4	6	70
Потреби	40	25	35	20	50	170

9.29.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	5	11	10	300
A_2	12	8	2	3	14	320
A_3	10	15	7	8	9	380
Потреби	250	200	290	110	150	1000

9.30.

Пункти постачання	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	8	7	11	5	160
A_2	14	3	1	8	7	400
A_3	9	5	16	7	2	240
Потреби	180	200	160	140	120	800

РОЗДІЛ II. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

Тема 1. Дробово-лінійне програмування

Завдання 1. Розв'язати симплексним методом задачу дробово-лінійного програмування.

1.1.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq -3, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

$$z = \frac{x_1 - 2x_2 + 6}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \min.$$

1.3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 7, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

$$z = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min.$$

1.5.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

$$z = \frac{x_1 - x_2 + 2}{3x_1 + 2x_2 + 4} \rightarrow \min.$$

1.7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5};$

$$z = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max.$$

1.2.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

$$z = \frac{3x_1 + 4x_2 + 7}{2x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \max.$$

1.4.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ 0 \leq x_1 \leq 10; \end{cases}$$

$x_2 \geq 0;$

$$z = \frac{-x_1 + 3x_2 - 6}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \max.$$

1.6.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 4; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

$$z = \frac{3x_1 - 3x_2 + 9}{3x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max.$$

1.8.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$

$$z = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1} \rightarrow \max.$$

1.9.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4};$$

$$z = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \max.$$

1.11.

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \leq 54, \\ -2x_1 + 9x_2 \geq 19, \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 54; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max.$$

1.13.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 27, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{x_1 + 2x_2 - 1}{3x_1 - x_2 + 4} \rightarrow \max.$$

1.15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 8x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{x_1 + 2x_2}{3x_1 + 2x_2} \rightarrow \max.$$

1.10.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4};$$

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max.$$

1.12.

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 13; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2} \rightarrow \max.$$

1.14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_2 \leq 10, \\ x_1 - x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{x_1 - 2x_2 + 6}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \max.$$

1.16.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{-x_1 + 3x_2 - 6}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min.$$

1.17.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{5x_1 - x_2 + 4}{x_1 + 2x_2 + 3} \rightarrow \max.$$

1.19.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2} \rightarrow \max.$$

1.21.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{x_1 - 2x_2}{x_2 + 3} \rightarrow \max.$$

1.23.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5};$$

$$z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max.$$

1.18.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 4x_2 \leq -8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{x_1 - x_2 + 1}{2x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \max.$$

1.20.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{4x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max.$$

1.22.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 - x_2} \rightarrow \max.$$

1.24.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3};$$

$$z = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min.$$

1.25.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3};$$

$$z = \frac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_2 + x_3 + 1} \rightarrow \min.$$

1.27.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5};$$

$$z = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min.$$

1.29.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5};$$

$$z = \frac{x_1 - x_2 - 3}{3x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min.$$

1.26.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4};$$

$$z = \frac{3x_2 - 2x_3}{x_2 + 3x_3} \rightarrow \min.$$

1.28.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_4 = 17; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4};$$

$$z = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2 + 2} \rightarrow \min.$$

1.30.

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5};$$

$$z = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3}{x_1 + 3x_2 + 5x_3} \rightarrow \min.$$

Тема 2. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування

Завдання 2. Розв'язати графічним методом задачу нелінійного програмування.

2.1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 x_2 \rightarrow \max.$$

2.2.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min.$$

2.3.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \max.$$

2.5.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min.$$

2.7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + x_2 \leq 21; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max.$$

2.9.

$$\begin{cases} 7 - x_1 \geq 0, \\ 8 - x_2 \geq 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 20x_2 - 125 \rightarrow \min.$$

2.11.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 7)(x_2 - 1) \rightarrow \min.$$

2.4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 - 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \rightarrow \max.$$

2.6.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 0.5x_1 - x_2 \geq -4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 10(x_1 - 2)^2 + 20(x_2 - 3)^2 \rightarrow \min.$$

2.8.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

2.10.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min.$$

2.12.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 3; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max.$$

2.13.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max.$$

2.15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 0.5x_1 - x_2 \geq -4; \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \rightarrow \min.$$

2.17.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 4; \\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max.$$

2.19.

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 + 2) \leq 16, \\ 0 \leq x_1 \leq 6; \\ x_1 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

2.21.

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = x_1 x_2 \rightarrow \max.$$

2.14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 0 \leq x_1 \leq 5; \\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min.$$

2.16.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max.$$

2.18.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 x_2 \geq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

2.20.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max.$$

2.22.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max.$$

2.23.

$$\begin{aligned}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 &\leq 9; \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0; \\ z &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2.25.

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 &\leq 24; \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0; \\ z &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2.27.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \\ z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2.29.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ 0 \leq x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; \end{cases} \\ z = x_1x_2 \rightarrow \min.\end{aligned}$$

2.24.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ -2x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \\ z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2.26.

$$\begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 \leq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 2; \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \\ z = -x_1^2 + x_2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2.28.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 0 \leq x_2 \leq 7; \\ x_1 \geq 0; \end{cases} \\ z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

2.30.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0; \end{cases} \\ z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max.\end{aligned}$$

Тема 3. Квадратичне програмування

Завдання 3. Розв'язати задачу квадратичного програмування, використовуючи симплексний метод.

3.1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.$$

3.3.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 80, \\ 2x_1 + x_2 \leq 34; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1 \rightarrow \max.$$

3.5.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \rightarrow \min.$$

3.7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min.$$

3.9.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \geq -1; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - 4x_2 \rightarrow \max.$$

3.2.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \max.$$

3.4.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

3.6.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2 \rightarrow \max.$$

3.8.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

3.10.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max.$$

3.11.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max.$$

3.13.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

3.15.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max.$$

3.17.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \rightarrow \min.$$

3.19.

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 \rightarrow \min.$$

3.12.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_3 \leq 14; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

3.14.

$$\begin{cases} 8 - x_2 \geq 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max.$$

3.16.

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \leq 51, \\ 15x_1 + 7x_2 \leq 107; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \rightarrow \min.$$

3.18.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$z = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

3.20.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3};$$

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

3.21.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 2x_1 - x_2^2 + x_2 \rightarrow \max.$$

3.23.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 15; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = 5x_1^2 - 30x_1 + 10x_2^2 - 80x_2 + 205 \rightarrow \min.$$

3.25.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2 \rightarrow \min.$$

3.27.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 60, \\ x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2 \rightarrow \min.$$

3.29.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

3.22.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max.$$

3.24.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \rightarrow \min.$$

3.26.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60, \\ 3x_1 + x_2 \leq 30; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2 \rightarrow \min.$$

3.28.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min.$$

3.30.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$$z = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \min.$$

Тема 4. Сітьове планування

Завдання 4. Побудувати креслення сітьового графіка і визначити: критичний шлях, резерви подій, а також повні, вільні і незалежні резерви операцій по заданих умовах. В таблиці в дужках вказані напрямні дуги сітьового графіка: перша цифра – номер вершини, з якої дуга виходить, друга – вершин, куди входить. В сусідньому стовпці вказано подовженості виконання робіт, що відповідають дугам.

Результати розв'язування завдання повинні бути оформлені таким чином:

П. І. П. і номер групи виконавця.

Номер завдання.

Креслення сітьового графіка з виділеним критичним шляхом.

Таблиці результатів обчислень.

Резерви подій

Події	1	2	...
Резерви робіт	R1	R2	...

Резерви робіт

Роботи	Повний резерв	Вільний резерв	Незалежний резерв
(1, 2)			
(1, 3)			
...			

Роботи	Номери завдань і тривалість робіт						
	№4.1	№4.2	№4.3	№4.4	№4.5	№4.6	№4.7
(1, 2)	8	5	8	13	2	6	9
(1, 3)	7	5	7	7	4	9	6
(1, 4)	3	12	4	8	6	5	7
(2, 3)	15	3	12	15	6	7	9
(2, 5)	6	2	3	6	8	9	10
(2, 6)	2	2	7	8	4	6	7
(3, 4)	14	3	14	17	8	13	11
(3, 6)	7	9	10	3	7	8	9
(3, 8)	10	5	5	7	6	9	3
(3, 9)	8	11	1	3	20	17	16
(4, 7)	8	4	5	6	9	3	6
(4, 8)	6	2	3	8	3	6	8
(4, 11)	3	1	3	5	8	9	11
(5, 9)	5	12	21	4	6	8	2
(6, 7)	7	3	5	6	6	7	9
(6, 8)	2	20	18	17	16	13	12
(6, 9)	11	3	5	6	7	7	8
(7, 8)	15	2	5	3	4	9	8

(7, 11)	12	3	8	8	9	6	5
(8, 9)	8	2	3	2	5	7	8
(8, 10)	10	4	6	6	8	7	9
(8, 11)	7	4	3	8	7	13	17
(9, 10)	4	5	8	9	3	25	14
(10, 11)	3	4	2	2	4	5	5
(10, 12)	9	5	8	2	9	6	8
(11, 12)	2	9	7	6	8	7	3

Роботи	Номери завдань і тривалість робіт						
	№4.8	№4.9	№4.10	№4.11	№4.12	№4.13	№4.14
(1, 2)	8	15	9	13	2	9	19
(1, 3)	11	5	7	7	4	9	6
(1, 4)	3	12	4	8	6	5	7
(2, 3)	16	13	12	15	8	7	9
(2, 5)	6	2	3	6	8	9	10
(2, 6)	2	2	7	8	4	6	7
(3, 4)	14	3	14	17	8	13	11
(3, 6)	7	9	10	3	7	8	9
(3, 8)	10	5	5	7	6	9	13
(3, 9)	8	11	11	3	20	17	16
(4, 7)	8	4	5	6	9	3	6
(4, 8)	8	6	3	8	3	6	8
(4, 11)	3	1	3	5	8	9	11
(5, 9)	5	12	21	5	6	8	2
(6, 7)	7	3	5	6	6	7	9
(6, 8)	2	20	18	17	16	13	12
(6, 9)	11	3	5	6	8	7	8
(7, 8)	15	2	5	3	4	9	8
(7, 11)	12	3	8	8	9	6	15
(8, 9)	8	2	3	3	5	7	8
(8, 10)	10	4	5	6	8	7	9
(8, 11)	7	4	3	8	7	13	17
(9, 10)	9	5	8	9	3	25	14
(10, 11)	8	4	12	12	14	5	5
(10, 12)	9	5	8	12	9	6	8
(11, 12)	12	9	7	6	8	7	13

Роботи	Номери завдань і тривалість робіт						
	№4.15	№4.16	№4.17	№4.18	№4.19	№4.20	№4.21
(1, 2)	7	5	8	13	2	6	9
(1, 3)	7	6	7	7	4	9	6
(1, 4)	3	12	2	8	6	5	7

(2, 3)	15	3	12	8	6	7	9
(2, 5)	6	2	3	6	3	9	10
(2, 6)	2	2	7	8	4	5	7
(3, 4)	14	3	14	17	8	13	4
(3, 6)	7	9	10	3	7	6	9
(3, 8)	10	5	5	7	8	9	3
(3, 9)	8	11	1	11	20	17	16
(4, 7)	8	4	7	6	9	3	6
(4, 8)	6	6	3	8	3	6	8
(4, 11)	8	1	3	5	8	9	11
(5, 9)	5	4	2	4	6	8	2
(6, 7)	7	3	7	6	6	7	9
(6, 8)	2	20	18	8	16	13	12
(6, 9)	11	3	5	6	3	7	8
(7, 8)	15	2	5	3	4	7	8
(7, 11)	12	3	8	8	9	6	4
(8, 9)	8	2	3	3	5	5	8
(8, 10)	10	4	6	6	2	7	9
(8, 11)	7	4	3	4	7	13	17
(9, 10)	4	5	4	9	3	25	14
(10, 11)	3	9	2	2	4	5	5
(10, 12)	3	5	8	2	9	6	8
(11, 12)	6	7	7	6	8	7	3

Роботи

Номери завдань і тривалість робіт

	№4.22	№4.23	№4.24	№4.25	№4.26	№4.27	№4.28
(1, 2)	8	15	8	13	2	6	9
(1, 3)	17	5	7	7	4	9	6
(1, 4)	3	9	4	8	6	5	7
(2, 3)	15	3	2	15	6	7	9
(2, 5)	6	2	3	16	8	9	10
(2, 6)	2	2	7	8	14	6	7
(3, 4)	14	3	14	17	8	3	11
(3, 6)	7	9	10	3	7	8	19
(3, 8)	10	5	5	7	6	19	3
(3, 9)	8	11	1	3	2	17	16
(4, 7)	8	4	5	16	9	3	6
(4, 8)	6	2	13	8	3	6	8
(4, 11)	3	11	3	5	8	9	11
(5, 9)	15	12	21	4	6	8	2
(6, 7)	7	13	5	6	6	7	9
(6, 8)	2	20	1	17	16	13	12
(6, 9)	11	3	5	16	7	7	8

(7, 8)	15	2	5	3	14	9	8
(7, 11)	12	3	8	8	9	16	5
(8, 9)	8	2	3	3	5	7	18
(8, 10)	10	4	6	6	8	17	9
(8, 11)	7	4	3	8	4	13	17
(9, 10)	4	5	8	6	3	25	14
(10, 11)	3	4	12	2	4	5	5
(10, 12)	9	9	8	2	9	6	8
(11, 12)	6	9	7	6	9	6	7

Роботи Номери завдань і тривалість робіт

Роботи	№4.29	№4.30
(1, 2)	6	13
(1, 3)	13	5
(1, 4)	6	9
(2, 3)	2	3
(2, 5)	7	2
(2, 6)	8	2
(3, 4)	13	3
(3, 6)	11	9
(3, 8)	12	5
(3, 9)	3	11
(4, 7)	6	4
(4, 8)	1	2
(4, 11)	2	11
(5, 9)	7	12
(6, 7)	7	13
(6, 8)	2	20
(6, 9)	1	3
(7, 8)	1	2
(7, 11)	2	4
(8, 9)	3	5
(8, 10)	9	1
(8, 11)	6	3
(9, 10)	1	6
(10, 11)	2	7
(10, 12)	3	8
(11, 12)	4	9

Тема 5. Динамічне програмування

Завдання 5. Розробити методом динамічного програмування оптимальний план управління виробничими потужностями у відповідності з постановкою задачі планування при початкових даних, приведених в наступній таблиці. В таблиці прийняті такі позначення: C_1 – витрати по пересуванню виробничих потужностей з даного об'єкту на інші (тис. грн. на млн. грн. об'єму робіт); C_2 – витрати при введенні нових виробничих потужностей на об'єкті (тис. грн. на млн. грн. об'єму робіт); C_3 – втрати від простою обладнання (тис. грн. на млн. грн. об'єму робіт); C_4 – витрати при організації третьої зміни (тис. грн. на млн. грн. об'єму робіт). В перших чотирьох стовпцях після порядкового номеру завдання вказані розподіли об'єму будівельно-монтажних робіт по кварталах року (млн. грн.)

№ п/п	1-й	2-й	3-й	4-й	C_1	C_2	C_3	C_4
5.1	2	2	3	4	50	70	60	85
5.2	6	7	4	2	45	60	50	80
5.3	2	5	3	2	68	70	70	90
5.4	8	12	10	9	70	75	73	85
5.5	3	4	6	2	80	95	85	110
5.6	1	6	7	3	30	50	40	70
5.7	2	5	8	2	40	60	50	80
5.8	4	4	6	3	60	70	50	90
5.9	3	4	6	1	70	80	75	85
5.10	5	4	5	6	30	40	35	45
5.11	2	5	7	7	75	80	76	95
5.12	4	10	12	8	100	130	120	150
5.13	3	4	5	6	110	135	120	150
5.14	4	4	5	5	90	110	100	130
5.15	2	5	4	3	80	90	85	100
5.16	1	6	7	5	65	80	70	90
5.17	3	3	5	1	70	80	75	95
5.18	1	5	4	3	100	120	110	140
5.19	2	3	4	2	90	100	95	110
5.20	3	8	6	2	70	90	80	100
5.21	5	9	2	1	80	85	83	90
5.22	3	8	8	6	95	110	100	120
5.23	2	5	4	3	50	60	55	65
5.24	2	2	4	5	30	35	33	40
5.25	1	5	5	3	60	70	65	80
5.26	2	4	3	2	25	40	30	45
5.27	3	7	6	7	60	70	60	50
5.28	5	4	5	6	85	110	100	110
5.29	1	3	4	2	30	40	45	40
5.30	2	4	2	1	70	85	80	100

ЛІТЕРАТУРА

1. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. - М.: Высшая школа, 1967. - 428 с.
2. Лавренчук В.П., Готинган Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика. Частина 3. - Чернівці: "Рута", 2002 р. - 166 с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. - Москва: "Финансы и статистика", 2001 г. - 366 с.
4. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. - Киев: "Вища школа", 1979. - 458 с.
5. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. - Львів: Світ, 1995. -214 с.
6. Бугір М. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. Посібник для студентів вузів. – Київ: Видавничий центр "Академія", 1998. – 270 с.
7. Калихман И.А. Сборник задач по линейной алгебре и математическому программированию. -М.: Высшая школа, 1969.- 158 с.
8. Под редакцией Ефимова А.В. Сборник задач по математике для ВТУЗОВ, том 4. - Москва: "Наука", 1990. -304 с.
9. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – Москва: "Высшая школа", 1983. – 175 с.
10. Ламзіна Т.Б., Кондратьева О.М. Лінійне програмування. Практикум для студентів економічних спеціальностей. – Черкаси: ЧДТУ, 2004. – 72 с.