Міністерство освіти і науки України
Черкаський державний технологічний університет

Методичні рекомендації
з лінійного програмування
для студентів економічних спеціальностей

Черкаси ЧДТУ 2002

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
протокол №2 від 30.08.2002 р.,
та Методичною радою ЧДТУ,
протокол №1 від 26.11.2002 р.

Черкаси ЧДТУ 2004

Методичні рекомендації з лінійного програмування.

Розділи: Різні форми задач лінійного програмування (ЗЛП) і перетворення ЗЛП з однієї форми в іншу. Графічний метод розв'язування ЗЛП. Симплексний метод розв'язування ЗЛП. Метод штучного базису. Взаємно двоїсті задачі. Задачі лінійного цілочислового програмування. Розв'язання транспортних задач. Для студентів економічних спеціальностей. (Укладачі: Т.Б. Ламзіна, О.М. Кондратьєва – Черкаси: ЧДТУ, 2004. - 71с.)

Укладачі: Тетяна Борисівна Ламзіна
Оксана Марківна Кондратьєва

Відповідальний редактор

Рецензенти В.І. Діскант
Р.М. Дідковський

1. Різні форми задач лінійного програмування (ЗЛП) і перетворення ЗЛП з однієї форми в іншу

Як відомо, ЗЛП полягає в знаходженні оптимального (максимального або мінімального) значення лінійної форми

$$f = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при наявності лінійних обмежень у вигляді рівнянь і нерівностей на змінні x_j $(j = 1,\ldots,n)$, які здебільшого вважаються невід'ємними.

Функція, максимальне або мінімальне значення якої знаходять, називається *цільовою функцією*, а сукупність значень змінних, при яких досягається максимальне або мінімальне значення, визначає так званий *оптимальний план*. Інша сукупність значень, які задовольняють обмеження, визначає *допустимий план*.

Якщо всі обмеження мають вигляд рівностей:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \qquad i = 1,\ldots m, \tag{1.1}$$

лінійна форма мінімізується, а всі змінні припускаються невід'ємними, то говорять, що ЗЛП має *канонічну форму*.

Якщо всі обмеження – нерівності:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le (\ge) b_i, \; i = 1,\ldots m,$$

то говорять, що ЗЛП має *стандартну форму*.

Якщо серед обмежень зустрічаються, як рівняння, так і нерівності, то маємо ЗЛП *загального вигляду*.

Інколи виникає потреба в перетворенні ЗЛП із однієї форми в іншу. Нехай треба одержати канонічну форму ЗЛП. Це роблять таким чином. По-перше, якщо в початковій ЗЛП $f \to \max$, то вводимо функцію $f_1 = -f$, для якої знаходимо мінімум. По-друге, обмеження-нерівності замінюємо на обмеження-рівності введенням додаткових невід'ємних змінних (які будемо називати балансовими). І нарешті, якщо для деякої змінної x_k відсутня вимога невід'ємності, то замінимо її на різницю двох невід'ємних додаткових змінних, $x_k = x'_k - x''_k$, або, розв'язавши яке-небудь рівняння відносно цієї змінної, підставимо одержаний вираз в інші рівності і в лінійну форму, тим самим звільняючись від неї взагалі. Таким чином, замість початкової ЗЛП одержимо еквівалентну ЗЛП в канонічній формі, тобто задачу мінімізації функції f_1 з обмеженнями-рівностями на невід'ємні змінні.

<u>Приклад 1.</u> Звести до канонічної форми ЗЛП:

$$f = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Розв'язання. Вводимо $f_1 = -f$. Тоді

$$f_1 = -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \min.$$

За допомогою балансових змінних x_5 і x_6 перетворюємо всі обмеження в рівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 2. \end{cases} \qquad (1.2)$$

І нарешті, зробивши заміну $x_2 = x_2' - x_2''$, де $x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0$, одержуємо ЗПЛ в канонічній формі:

$$f_1 = -2x_1 - x_2' + x_2'' + 3x_3 + 5x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + 2x_3 - x_4 + x_5 = 9, \\ 3x_1 - x_2' + x_2'' + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2' - 2x'' - x_3 + x_4 - x_6 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0.$$

Звісно, одержавши розв'язок цієї ЗПЛ, ми матимемо:

$$f_{опт} = -f_{1опт} = -\min f_1,\ x_2^{(0)} = x_2'^{(0)} - x_2''^{(0)},\ \bar{x}_{опт} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}).$$

Зауваження. Замість введення змінних x'_2 і x''_2, можна виразити x_2 із другого рівняння системи (1.2) ($x_2 = -4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4$) і підставити його в перше і третє рівняння та в лінійну форму f_1. Одержимо ЗПЛ в такому вигляді (канонічна форма):

$$f_1 = -5x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 7x_1 + x_3 + 9x_4 - x_6 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Для того, щоб, навпаки, перевести ЗПЛ із канонічної форми в стандартну, потрібно розв'язати систему рівнянь (1.1), тобто виразити базисні змінні через вільні. А далі використати вимогу невід'ємності змінних.

Приклад 2. Перетворити ЗПЛ із канонічної форми в стандартну.

$$f = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 50, \\ x_3 + x_6 = 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1...6.$$

<u>Розв'язання.</u> Виписавши матрицю системи рівнянь-обмежень, побачимо, що ранг цієї системи дорівнює 4. Змінні x_1, x_2, x_3, x_4 можемо вважати базисними (вони відповідають базисному мінору матриці системи), а x_5 і x_6 – вільними. Виразимо базисні змінні через вільні:

$$\begin{cases} x_4 = 60 - x_5 - x_6, \\ x_1 = 20 - x_4 = 20 - (60 - x_5 - x_6) = -40 + x_5 + x_6, \\ x_2 = 50 - x_5, \\ x_3 = 30 - x_6. \end{cases} \tag{1.3}$$

Скористаємося тепер умовою $x_i \geq 0$. Тоді одержимо систему нерівностей-обмежень .відносно змінних x_5 і x_6:

$$\begin{cases} x_5 + x_6 \leq 60, \\ x_5 + x_6 \geq 40, \\ x_5 \leq 50, \\ x_6 \leq 30. \end{cases}$$

Підставивши вирази (1.3) базисних змінних x_4, x_1, x_2, x_3 через вільні змінні у лінійну форму f, отримаємо вираз цієї форми через вільні змінні x_5 і x_6:

$$f = 740 - 7x_5 + 7x_6 \to \min.$$

Таким чином, маємо еквівалентну ЗЛП у стандартній формі. Якщо її розв'язок буде знайдений ($\overline{X}_{опт} = (x_5^{(0)}, x_6^{(0)})$ і $f_{опт} = f(x_5^{(0)}, x_6^{(0)})$), то оптимальне значення функції f для початкової ЗЛП залишиться таким самим, а оптимальний план буде мати вигляд: $\overline{X}_{опт} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)} x_3^{(0)}, x_4^{(0)} x_5^{(0)}, x_6^{(0)})$, де $x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ знайдемо за формулами (1.3).

Задачі для самостійного розв'язування

В задачах 1.1 – 1.3 перевести ЗЛП в канонічну форму, а в 1.4 – 1.6 – у стандартну форму

1.1 $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 4; \end{cases}$$

$x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.$

1.2 $f = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

1.3 $f = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 \ge 1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2.$

1.4 $f = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}.$

1.5 $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}5}.$

1.6 $f = 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}4}.$

2. Графічний метод розв'язування ЗЛП

Графічний метод на площині застосовується насамперед для ЗЛП, заданих в стандартній формі відносно двох змінних x_1 і x_2 .

Нехай треба знайти максимум або мінімум лінійної функції

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 . \tag{2.1}$$

за умов

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \quad i = 1, ..., m \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2 . \tag{2.3}$$

Для графічного розв'язування цієї задачі використовують наступний алгоритм:

1). Зобразимо на площині $x_1 O x_2$ множину точок, які задовольняють нерівності (2.2) і (2.3). Для цього побудуємо прямі: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$. Кожна пряма $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$ ($i = 1, ..., m$) поділяє площину на дві півплощини. Точки однієї з цих півплощин задовольняють вказану нерівність, іншої – ні. Щоб визначити півплощину, точки якої задовольняють нерівність, треба в цю нерівність підставити координати будь-якої точки координатної площини (якщо $b \neq 0$, то краще взяти початок координат). Якщо координати цієї точки задовольняють нерівність, то нерівність будуть задовольняти всі точки півплощини, яка її містить. Якщо координати цієї точки не задовольняють нерівність, то нерівність будуть задовольняти всі точки іншої півплощини.

Припустимо, що вже побудовані всі прямі і визначені півплощини, точки яких задовольняють відповідні нерівності. Перетином (спільною частиною) півплощин буде деяка область *К*, множина точок якої є множиною розв'язків системи (2.2). Множина точок, які задовольняють умову (2.3), утворює першу координатну чверть. Тому множиною точок, які задовольняють умови (2.2), (2.3), є та частина області *К*, яка лежить у першій координатній чверті. Позначимо цю множину (множину допустимих розв'язків ЗЛП) через *М.* Зауважимо, що *М* може бути порожньою множиною, опуклим многокутником або необмеженою опуклою многокутною областю. В першому випадку ЗЛП не має розв'язку, тому що її умови суперечливі. В другому випадку завжди існують точки, в яких функція набуває мінімального і максимального значень. В третьому випадку для лінійної форми може не існувати максимуму або мінімуму, або максимуму та мінімуму одночасно.

2). Побудуємо вектор нормалі $\vec{n}$ лінії рівня лінійної форми *f*, тобто вектор $\vec{n} = \{c_1; c_2\}$.

3). Побудувавши в середині області *М* лінію рівня, тобто перпендикулярну до $\vec{n}$ пряму, зміщуємо її паралельно самій собі в напрямку нормалі $\vec{n}$, якщо необхідно знайти максимум лінійної форми *f*, і в протилежному до $\vec{n}$ напрямку, якщо треба знайти мінімальне значення функції *f*. Зміщення продовжуємо до тих пір, поки ця пряма буде мати хоча б одну спільну точку з областю *М,* тоді в своєму крайньому положенні вказана пряма пройде через точку області *М*, в якій цільова функція прийме оптимальне значення. Якщо М – опуклий многокутник, то оптимальне значення лінійної функції завжди досягається в її вершині. Якщо оптимальне значення досягається в двох вершинах, то *f* набуває його в будь-якій точці, що лежить на відрізку, який їх з'єднує.

4). Координати потрібної вершини знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь прямих, на перетині яких вона знаходиться.

Якщо оптимальним розв'язком є точки відрізку, то знаходимо координати кінцевих точок цього відрізку $\overline{X}_{1опт}$ і $\overline{X}_{2опт}$, а загальний розв'язок записуємо за формулою

$$\overline{X}_{опт} = t\overline{X}_{1опт} + (1-t)\overline{X}_{2опт}, \quad 0 \le t \le 1.$$

У випадку необмеженої області *М* оптимальна межа може бути необмеженою. В цьому випадку, знайшовши один з оптимальних розв'язків $\overline{X}_{1опт}$, за $\overline{X}_{2опт}$ візьмемо довільну точку оптимальної межі. Тоді всі оптимальні розв'язки визначатимуться за формулою $\overline{X}_{опт} = (1-t)\overline{X}_{1опт} + t\overline{X}_{2опт}, \quad 0 \le t < \infty$.

Приклад. Розв'язати графічним методом ЗЛП на максимум і мінімум:

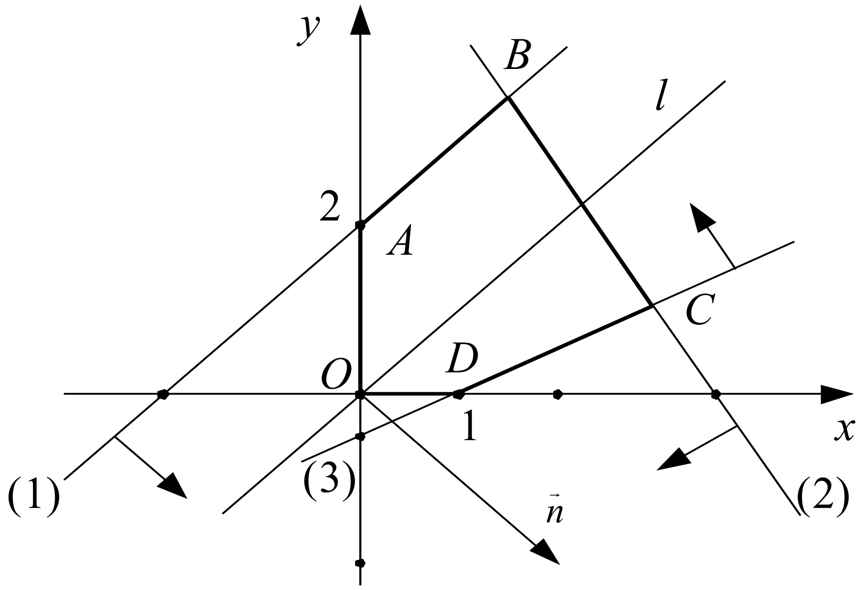
$$f = 2x - 2y;$$

$$\begin{cases} -x + y \le 2, \\ 5x + 3y \le 18, \\ x - 2y \le 1; \end{cases}$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Розв'язання.

1. В площині xOy будуємо множину допустимих розв'язків ЗЛП – область M.



Для знаходження півплощини, яка визначається першою нерівністю, підставимо в цю нерівність координати т. O (0; 0). Оскільки одержуємо вірну нерівність $(0 < 2)$, то шуканою півплощиною є та, яка містить т. O. Аналогічно, знаходимо півплощини, які визначаються другою та третьою нерівностями. Враховуючи вимогу $x \ge 0$ і $y \ge 0$, одержимо область M – п'ятикутник $OABCD$.

2. Будуємо вектор $\overline{n} = \{2; -2\}$ і лінію рівня $l \perp \vec{n}$.

3. Для знаходження точки максимуму зміщуємо лінію рівня l в напрямку $\vec{n}$. В своєму крайньому положенні вона буде проходити через точку C області M. Її координати знаходимо, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 5x + 3y = 18; \end{cases} \Rightarrow C(3;1).\ \overline{X}_{\max} = (3;1)..$$

Тоді $f_{\max} = f(3;1) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4.$

Для знаходження точок мінімуму функції f зміщуємо пряму l в напрямку протилежному вектору $\vec{n}$. В своєму крайньому положенні пряма l буде містити відрізок AB області M, тобто всі точки цього відрізку є оптимальними для мінімізації функції f. Такий розв'язок ЗЛП називається альтернативним.

Знаходимо координати кінцевих точок відрізку як точок перетину відповідних прямих: т. $A(0;2)$ і т. $B(1{,}25;3{,}25)$. Тоді $\overline{X}_{\min} = t\cdot(0;2)+(1-t)\cdot(1{,}25;3{,}25)=(1{,}25-1{,}25t;\ 3{,}25-1{,}25t)$, $0\le t\le 1$.

Підставивши координати т. A в лінійну форму f, знаходимо мінімальне значення функції f: $f_{\min}=-4$.

Відповідь: $\overline{X}_{\max}=\{3;1\}$, $f_{\max}=4$.

$\overline{X}_{\min}=(1{,}25-1{,}25t;\ 3{,}25-1{,}25t),\ \ 0\le t\le 1,$

$f_{\min}=-4$.

Зауваження. Графічний метод розв'язування ЗЛП використовується також для задач канонічної або загальної форми, якщо після перетворення їх у стандартну форму залишається лише дві змінні.

Задачі для самостійного розв'язування

Графічним методом розв'язати задачі:

2.1 $f=2x-5y\to\min(\max);$

$$\begin{cases}-4x+3y\le 6,\\ 2x-3y\le 12,\\ 6x+5y\le 48,\\ x+3y\ge 4;\end{cases}$$
$x\ge 0,\ \ y\ge 0.$

2.6 $f=3x+2y\to\max(\min);$

$$\begin{cases}3x+2y\ge 11,\\ -2x+y\le 2,\\ x-y\le 0;\end{cases}$$
$x\ge 0,\ \ y\ge 0.$

2.2 $f=-3x+2y\to\min(\max);$

$$\begin{cases}x-3y\le 3,\\ x-y\ge -2,\\ x+2y\ge 2;\end{cases}$$
$x\ge 0,\ \ y\ge 0.$

2.7 $f=4x_1-2x_2+x_3-x_4\to(\max);$

$$\begin{cases}x_1-x_2+4x_3-2x_4=2,\\ 3x_1+2x_2-x_3+4x_4=3;\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,\ 4}.$

2.3 $f=-3x+4y\to\min(\max);$

$$\begin{cases}-3x+4y\le 12,\\ -2x+y\le 2,\\ 4x+3y\le 24;\end{cases}$$
$x\ge 0,\ \ y\ge 0.$

2.8 $f=3x_1-4x_2+x_3+$
$+x_4-28\to\max(\min);$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=4,\\ 3x_1-8x_2+x_4=24;\end{cases}$$
$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,\ 4}.$

2.4 $f = 5x + 3y \to \min(\max);$

$$\begin{cases} x - y \le 1, \\ 2x + y \le 2, \\ x - y \ge 0; \end{cases}$$

$x \ge 0, \;\; y \ge 0.$

2.9 $f = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 -$

$- 6 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 24; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \;\; i = \overline{1,\, 5}.$

2.5 $f = 2x + 34 \to \min(\max);$

$$\begin{cases} -4x + 5y \le 20, \\ 2x + y \ge 6, \\ 5x - y \le 45, \\ x - y \le 6; \end{cases}$$

$x \ge 0, \;\; y \ge 0.$

3. Симплексний метод розв’язування ЗЛП

Нехай ЗЛП має канонічну форму. За допомогою еквівалентних перетворень систему обмежень зведемо до одиничного базису. Одержимо

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + a_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1,n} x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2,n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{m,n} x_n = b_m. \end{array} \right\} \tag{3.1}$$

Перші m змінних системи будуть базисними, а інші – вільними. Покладемо вільні змінні рівними нулю, тоді отримаємо частинний розв’язок системи

$$\overline{X}_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, o, \ldots, o),$$

Базисним розв’язком системи (3.1) називається розв’язок, в якому всі вільні змінні дорівнюють нулю.

Базисний розв’язок, всі компоненти якого – невід’ємні числа, називається *опорним розв’язком або опорним планом* ЗЛП.

Отже, $\overline{X}_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, o, \ldots, o)$ є опорний план даної ЗЛП, якщо $b_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Симплексний метод полягає в послідовному переході від одного опорного плану ЗЛП до іншого, для якого значення лінійної функції не збільшується. Оскільки кількість опорних планів ЗЛП скінчена, то метод дає змогу або знайти оптимальний план, або впевнитись, що він не існує, тобто задача не має розв'язку.

Для розв'язування симплексним методом ЗЛП повинна бути записана у канонічній формі, система обмежень якої є система рівнянь (3.1), всі вільні члени якої – невід'ємні, а цільова функція виражена тільки через вільні змінні:

$$f = c_{m+1} x_{m+1} + ... + c_n x_n + c_0 . \tag{3.2}$$

Для реалізації симплексного методу використовують симплексні таблиці. Складаємо початкову симплексну таблицю. Базисні змінні виписуємо в стовпчик, а вільні – в рядок. Коефіцієнти першого рівняння системи (3.1) записуємо в 1-ий рядок таблиці, другого – у другий і так далі. Останнім рядком запишемо коефіцієнти лінійної форми (3.2), ставлячи в останню клітинку c_0 з протилежним знаком, тобто $-c_0$. Маємо таблицю 1.

Таблиця 1

вільні / базисні	x_{m+1}	x_{m+2}	…	X_n	b_i
x_1	$a_{1,\, m+1}$	$a_{1,\, m+2}$	…	$a_{1,n}$	b_1
x_2	$a_{2,\, m+1}$	$a_{2,\, m+2}$	…	$a_{2,n}$	b_2
$\vdots$					
x_m	$a_{m,\, m+1}$	$a_{m,\, m+2}$	…	$a_{m,n}$	b_m
f	c_{m+1}	c_{m+2}	…	c_n	$-c_0$

Звернемо увагу на те, що в останньому стовпчику таблиці маємо значення базисних змінних початкового опорного плану $\overline{X_1}$ і значення лінійної форми для цього плану, взятого з протилежним знаком ($f(\overline{X}_1) = c_0$).

Далі можливі 3 випадки:

1. Всі коефіцієнти c_i $(i = m+1,...,n)$, які називають оцінками лінійної форми, додатні, тоді $\overline{X_1}$ – оптимальний план ЗЛП.

   Відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = \overline{X}_1$, $f_{\min} = c_0$.
2. Існує такий індекс j, для якого $c_j < 0$ і всі коефіцієнти над ним також від'ємні ($a_{ij} \le 0,\ i = 1,\ 2,...\ m$). В цьому випадку задача розв'язку не має, тому що лінійна форма необмежена на множині планів: $f \to -\infty$.
3. Для кожного індексу j, для якого $c_j < 0$, серед коефіцієнтів a_{ij} існує хоча б один додатний. У цьому випадку можливе поліпшення опорного плану, тобто перехід до нового опорного плану, для якого значення

лінійної форми не більше, ніж для попереднього.

Цей перехід здійснюється за допомогою нової (наступної) симплекс-таблиці, яка складається за такими правилами (симплексні перетворення):

1). Визначається опорний елемент таблиці, опорні стовпчик і рядок. Це здійснюється таким чином. Якщо $c_j < 0$ тільки для одного індексу $j = q$, то опорним стовпчиком є q – й стовпчик. За опорний рядок приймається той p-й рядок, для якого

$$\min_{a_{iq}>0} \frac{b_i}{a_{iq}} = \frac{b_p}{a_{pq}}. \tag{3.3}$$

Тоді елемент a_{pq} є опорним елементом для перетворення симплекс-таблиці. Такий вибір опорного елементу будемо називати – *за критерієм мінімального відношення.*

Якщо від'ємних оцінок c_j дві або більше, то за опорний стовпчик краще за все брати той, для якого число

$$|\Delta f| = \left| \frac{b_p}{a_{pj}} c_j \right| \tag{3.4}$$

набуває максимального значення.

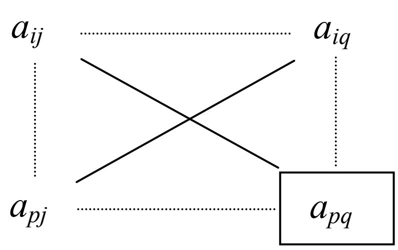
2). Для побудови нової симплекс-таблиці міняємо місцями змінні x_p і x_q, тобто x_q стає базисною змінною, а x_p – вільною.

3). На місці опорного елементу записуємо обернене йому число, тобто $1/a_{pq}$. Решту елементів опорного рядка ділимо на опорний елемент a_{pq}, а опорного стовпчика – на опорний елемент a_{pq} з протилежним знаком, тобто на $-a_{pq}$: $a'_{pj} = a_{pj} / a_{pq}$; $a'_{iq} = -a_{iq} / a_{pq}$.

4). Решту елементів a'_{ij} нової таблиці знаходимо за формулою

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}, \text{ або } a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{pq} - a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}, \tag{3.5}$$

яку можна запам'ятати за допомогою *правила прямокутника*:



від елемента a_{ij} віднімаємо добуток кінцевих елементів іншої діагоналі, поділений на опорний елемент; або від добутку елементів головної діагоналі віднімаємо добуток елементів другої діагоналі і ділимо на опорний елемент.

Таким чином, вся таблиця заповнена. За останнім стовпчиком можна виписати новий опорний план $\overline{X}_2$ та відповідне значення цільової функції $f(\overline{X}_2)$.

Аналізуючи оцінки лінійної форми в новій симплекс-таблиці, продовжуємо розв'язування даної ЗЛП симплексним методом згідно з випадками 1 – 3.

Зауваження 1. Ознакою існування альтернативного оптимуму (безліч розв'язків) є наявність в останній симплекс-таблиці, якій відповідає оптимальний розв'язок $\overline{X}_{01}$, хоча б однієї нульової оцінки. Якщо над цією оцінкою є додатні елементи, то, вибравши серед них опорний, робимо симплексне перетворення, внаслідок чого знаходимо $\overline{X}_{02}$. Тоді загальний розв'язок отримаємо за формулою

$$\overline{X}_{\text{опт}} = t\overline{X}_{01} + (1-t)\overline{X}_{02},\ 0 \le t \le 1. \tag{3.6}$$

Якщо нульових оцінок декілька, то так само знайдемо декілька оптимальних розв'язків $\overline{X}_{01}, \overline{X}_{02},..., \overline{X}_{0k}$. Тоді

$$\overline{X}_{\text{опт}} = t_1\overline{X}_{01} + t_2\overline{X}_{02} + ... + t_k\overline{X}_{0k}, \tag{3.7}$$

де $0 \le t_i \le 1$ і $t_i + ... + t_k = 1$.

Якщо всі елементи a_{ij} над нульовою оцінкою c_j від'ємні, то альтернативний оптимум досягається на промені з початком у точці $\overline{X}_{01}$. Він знаходиться за формулою

$$\overline{X}_{\text{опт}} = \overline{X}_{01} + \lambda\overline{X}_q,\quad 0 \le \lambda < \infty,$$

де $\overline{X}_q = (-a_{1q},..., -a_{rq}, 0,..., 1, 0,..., 0)$ (тут "1" стоїть на q-му місці, а r – ранг системи).

Зауваження 2.

Якщо на деякому етапі реалізації симплексного методу виникає невизначеність у виборі опорного рядка, тобто виявляється декілька рівних мінімальних відношень b_i / a_{iq}, то треба обчислити відношення елементів наступного стовпчика до відповідних елементів опорного стовпчика. За опорний рядок приймаємо той, для якого таке відношення мінімальне.

Приклад 1. Розв'язати симплексним методом ЗЛП

$$f = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\quad i = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Система рівнянь-обмежень зведена до одиничного базису (ранг r = 2). Вільні члени системи обмежень – невід'ємні, тому можемо скласти початкову симплексну таблицю, приймаючи за базисні змінні x_3 і x_2, а за вільні – x_1 і x_4. Щоб записати лінійну форму через вільні змінні з рівнянь системи виразимо x_3 і x_2: $x_3 = 1\text{-}4x_1 + x_4$, $x_2 = 4\text{-}x_1\text{-}x_4$. Далі підставимо ці вирази в лінійну форму, отримаємо

$$f = -2x_1 + 4 - x_1 - x_4 + 1 - 4x_1 + x_4 - x_4 = -7x_1 - x_4 + 5$$

Одержані коефіцієнти при вільних змінних – оцінки лінійної форми – записують в останній рядок симплексної таблиці (c_0 – з протилежним знаком).

Маємо початкову симплекс-таблицю

		-2	-1	0
		x_1	x_4	b_i
1	x_3	4	-1	1
1	x_2	1	$\boxed{1}$	4
	f	-7	-1	-5

Зауваження.

Останній рядок таблиці можна заповнити, не знаходячи вираз цільової функції f через вільні змінні, а використовуючи симплексну таблицю. Для цього в таблиці потрібно надписати поруч з кожною змінною відповідний їй коефіцієнт з виразу лінійної форми f. Над b_i записуємо значення вільного члену цільової функції, взятого з протилежним знаком. Далі від верхнього коефіцієнта i–го стовпчика (i = 1, 2, 3) віднімаємо добутки бокових коефіцієнтів на відповідні елементи цього стовпчика таблиці.

$$-2-1\cdot 4-1\cdot 1=-7, \qquad -1-1\cdot(-1)-1\cdot 1=-1, \qquad 0-1\cdot 1-1\cdot 4=-5.$$

Аналізуючи одержану таблицю, робимо висновок, що маємо 3-й випадок, тобто можливе поліпшення опорного плану. Для побудови наступної симплекс-таблиці визначаємо опорний елемент, користуючись критеріями алгоритму (3.3) і (3.4). В 1-му стовпчику за опорний елемент можна взяти 4, а в 2-му – 1. Оскільки $1:4\cdot 7<4:1\cdot 1$, то вибираємо за опорний елемент 1 із другого стовпчика. В новій таблиці записуємо x_4 на місце x_2 і навпаки. Заповнюємо таблицю згідно з наведеними вище правилами. Одержимо

	x_1	x_2	b_i
x_3	$\boxed{5}$	1	5
x_4	1	1	4
f	-6	1	-1

Знову маємо 3-й випадок алгоритму. Визначаємо опорний елемент. Це 5 із 1-го стовпчика. Будуємо наступну симплекс-таблицю.

	x_3	x_2	b_i
x_1	$1/5$	$1/5$	1
x_4	$-1/5$	$4/5$	3
f	$6/5$	$11/5$	5

Оскільки всі оцінки вільних змінних лінійної форми f додатні, то маємо 1-й випадок, тобто оптимальний план ЗЛП знайдений.

Відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = (1, 0, 0, 3)$, $f_{\min} = -5$.

Приклад 2. Розв'язати симплексним методом

$$f = 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$
$$x_i \le 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Розв'язання. Приведемо систему рівнянь до одиничного базису за методом Жордана-Гауса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5/2 & -2 & 3/2 & 5/2 \\ 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 1 \\ 1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 2 \end{array}\right)$$

Маємо базисні змінні – x_1 і x_2. Відповідний базисний розв'язок системи обмежень є опорним (всі вільні члени рівнянь – додатні). Складаємо початкову симплексну таблицю та знаходимо в ній оцінки лінійної форми. Визначаємо опорний елемент і переходимо до наступної симплекс-таблиці, яка виявляється останньою.

		1	1	0
		x_3	x_4	b_i
-1	x_2	$-4/5$	$3/5$	1
4	x_1	$\boxed{3/5}$	$-1/5$	2
	f	$-11/5$	$12/5$	-7

	x_1	x_4	b_i
x_2	$4/3$	$1/3$	$11/3$
x_3	$5/3$	$-1/3$	$10/3$
f	$11/3$	$9/5$	$1/3$

Відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = (0, 11/3, 10/3, 0)$, $f_{\min} = -1/3$.

Зауваження 3. Якщо ЗЛП подається не у канонічній формі, то для застосування симплексного методу розв'язування її потрібно спочатку перевести у канонічну форму (див. параграф 1).

Розглянемо окремо випадок, коли обмеження ЗЛП містять більше однієї нерівності виду

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \ge b_i, \qquad i = 1,..., s.$$

Як відомо, в цьому випадку для зведення задачі до канонічної форми треба ввести додаткові невід'ємні змінні (балансові змінні) в кожну нерівність системи обмежень:

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, 2,..., s. \tag{3.8}$$

Покажемо, як еквівалентними перетвореннями можна домогтися, щоб тільки одна з балансових змінних входила з коефіцієнтом –1 в рівняння системи обмежень. Нехай $\max\limits_{l \le i \le s} b_i = b_k$. Віднімемо кожне i-е (i ≠ *k)* рівняння системи (3.8) від k-го. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{k\,j} - a_{i\,j})x_j - x_{n+k} + x_{n+i} = b_k - b_i \\ \sum a_{k\,j}x_j - x_{n+k} = b_k \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,..., n + m.$$

Обмеження ЗЛП, які записані в такому вигляді, більш зручні для використання штучного базису (який буде описаний пізніше), ніж у вигляді (3.8).

Задачі для самостійного розв'язування

Наступні задачі лінійного програмування розв'язати симплексним методом:

3.1 $f = 880 - 7x_1 - 14x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_1 + x_4 = 20, \\ -x_1 - x_3 + x_5 = 10, \\ x_3 + x_6 = 30; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \quad l = \overline{1,\ 6}.$

3.8 $f = 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 4}.$

3.2 $f = x_4 - x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}.$

3.3 $f = x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}.$

3.4 $f = -6x_1 - 8x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}.$

3.5 $f = -x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -3x_1 - x_2 \geq -3; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

3.6 $f = 1 - x_1 - 3x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}.$

3.9 $f = -4 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \ i = \overline{1, 4}.$

3.10 $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_2 \leq 2{,}5, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq -2; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

3.11 $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 6}.$

3.12 $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 +$
$+ x_5 - x_6 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 = 6; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 6}.$

3.13 $f = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 4}.$

3.7 $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,\ 6}.$

3.14 $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 4}.$

4. Метод штучного базису пошуку початкового опорного плану

При розгляді алгоритму симплексного методу ми вважали, що початковий опорний план є відомим (заданий або очевидний). Якщо ця умова не виконується, то для розв’язування задачі потрібно знайти початковий опорний план. Розглянемо один із методів знаходження початкового опорного плану – метод штучного базису.

Нехай ЗЛП подана в канонічній формі:

$$\left[\begin{array}{l} f = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = 1, \ldots,\ m, \\ x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,\ n}. \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Будемо вважати, що всі $b_j \geq 0$. (Якщо для деякого рівняння це не так, то помножимо обидві його частини на –1).

Розглянемо допоміжну задачу:

$$\left[\begin{array}{l} F = y_1 + \ldots + y_m \to \min; \\ \begin{cases} y_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m; \end{cases} \\ x_j,\ y_i \geq 0, \ \ j = \overline{1,\ n}, \ \ i = \overline{1,\ m}. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Змінні y_i називаються штучними змінними. Система обмежень задачі (4.2) приведена до одиничного базису, тому для неї можна скласти початкову симплекс-таблицю, прийнявши за базисні змінні штучні змінні

y_i, і проводити симплексні перетворення для знаходження оптимального розв'язку цієї допоміжної задачі. Оскільки $F \geq 0$, то, розв'язавши задачу (4.2), можна отримати два випадки:

1) $\underline{\min F = 0}$.

Тоді значення усіх штучних змінних в оптимальному плані допоміжної задачі дорівнюватимуть нулю. І, якщо при цьому всі вони в останній симплекс-таблиці будуть вільними (виведеними з базису), то цю таблицю можна вважати початковою для ЗЛП (4.1) після заміни елементів останнього рядка на відповідні оцінки лінійної форми f.

Розглянемо випадок, коли не всі штучні змінні виведені з базису в останній для задачі (4.2) симплекс-таблиці. Якщо при цьому всі елементи відповідного рядка дорівнюють нулю, то її просто закреслюють. Якщо, наприклад $\alpha_{s,p} \neq 0$, то змінну x_p симплексним перетворенням вводимо в базис замість базисної штучної змінної.

2) $\underline{\min F > 0.}$

У цьому випадку задача (4.1) не має розв'язку – система рівнянь-обмежень несумісна на множині невід'ємних планів.

<u>Зауваження 1.</u> На всіх етапах розв'язування допоміжної задачі (4.2) стовпчики, які відповідають вільним штучним змінним, можна не писати (або закреслювати).

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати задачу, використовуючи метод штучного базису.

$$f = 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 4}.$$

<u>Розв'язання.</u>

Оскільки матриця системи не має одиничних стовпчиків, вводимо дві штучні змінні y_1 і y_2. Маємо допоміжну задачу:

$$F = y_1 + y_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} y_1 + x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ y_2 + 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad y_i \geq 0.$$

Прийнявши y_1 і y_2 за базисні змінні, складаємо початкову симплекс-таблицю і розв'язуємо задачу симплексним методом:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	1	2	-1	1	4
y_2	$\boxed{2}$	-1	2	-1	3
F	-3	-1	-1	0	-7

	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	$5/2$	-2	$\boxed{3/2}$	$5/2$
x_1	$-1/2$	1	$-1/2$	$3/2$
F	$-5/2$	2	$-3/2$	$-5/2$

	x_2	x_3	b_i
x_4	$5/3$	$-4/3$	$5/3$
x_1	$1/3$	$1/3$	$7/3$
F	0	0	0

Допоміжна задача розв’язана, $\min F = 0$. Всі штучні змінні виведені з базису. Це 1-й випадок. Знаходячи оцінки для лінійної форми f, записуємо початкову симплекс-таблицю для вихідної ЗЛП і розв’язуємо її симплексним методом.

	x_2	x_3	b_i
x_4	$\boxed{5/3}$	$-4/3$	$5/3$
x_1	$1/3$	$1/3$	$7/3$
f	-4	1	-11

	x_4	x_3	b_i
x_2	$3/5$	$-4/5$	1
x_1	$-1/5$	$\boxed{3/5}$	2
f	$12/5$	$-11/5$	-7

	x_4	x_1	b_i
x_2	$1/3$	$-4/3$	$11/3$
x_3	$-1/3$	$5/3$	$10/3$
f	$5/3$	$11/3$	$1/3$

<u>Відповідь:</u> $\overline{X}_{\text{опт}} = (0, 11/3, 10/3, 0)$, $f_{\min} = -1/3$.

<u>Приклад 2.</u> Розв’язати ЗЛП за допомогою штучного базису.

$$f = x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 3x_5 - x_6 = 2, \\ -4x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 2x_5 + 2x_6 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\ 6}.$$

Розв'язання. Вводимо 3 штучні змінні і розв'язуємо допоміжну задачу:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ y_2 + x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 3x_5 - x_6 = 2, \\ y_3 - 4x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 2x_5 + 2x_6 = 2; \end{cases}$$

$$x_j, \quad y_i \ge 0.$$

Складаємо початкову симплекс-таблицю

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
y_1	1	$\boxed{2}$	-3	3	1	1	1
y_2	1	4	-5	-5	-3	-1	2
y_3	-4	4	-12	0	-2	2	2
F	2	-10	20	2	4	-2	-5

Вибравши опорний елемент, робимо симплексні перетворення:

	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	$1/2$	$-3/2$	$3/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
y_2	-1	$\boxed{1}$	-11	-5	-3	0
y_3	-6	-6	-6	-4	0	0
F	7	5	17	9	3	0

Це остання таблиця для допоміжної задачі $(\min F = 0)$. Але вона містить у базисі штучні змінні y_2 і y_3.

Виводимо штучні змінні з базису і записуємо початкову таблицю для початкової задачі.

	x_1	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	-1	-15	-7	-4	$1/2$
x_3	-1	-11	-5	-3	0
y_3	$\boxed{-12}$	-72	-34	-18	0
F	12	72	34	18	0

		4	1	2	0
		x_4	x_5	x_6	b_i
1	x_2	-9	$-25/6$	$-5/2$	$1/2$
-1	x_3	-5	$-13/6$	$-3/2$	0
1	x_1	6	$17/6$	$3/2$	0
	f	2	$1/6$	$3/2$	$-1/2$

Бачимо, що складена таблиця для початкової ЗЛП відповідає її оптимальному розв'язку (всі оцінки вільних змінних додатні). Маємо відповідь:

Відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = (0,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $f_{\min} = 1/2$.

Зауваження 2. Якщо матриця системи (4.1) містить k $(k < m,\ r = m)$ одиничних стовпчиків, тобто маємо k базисних змінних, то для допоміжної задачі треба тільки $m-k$ штучних змінних. Тоді, $F = y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-k}$.

Задачі для самостійного розв'язування

Використовуючи метод штучного базису, розв'язати подані ЗЛП ($x_i \ge 0$).

4.1 $f = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

4.2 $f = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_5 - x_6 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 2x_6 = 2, \\ x_2 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 4, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6. \end{cases}$$

4.3 $f = -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \text{mi}$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

4.4 $f = -x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

4.6 $f = x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

4.7 $f = x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -5. \end{cases}$$

4.8 $f = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

4.9 $f = x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4.5 $f = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

4.10 $f = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_4 + x_5 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge -3. \end{cases}$$

5. Двоїсті задачі лінійного програмування

Означення 1. *Симетричними двоїстими* задачами називаються такі дві ЗЛП, які записані в стандартній формі і одержуються одна із одної за певними правилами:

$$f = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m; \end{cases} \qquad (5.1)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\varphi = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \le c_1, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \le c_n; \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Приклад 1. Скласти двоїсту задачу до даної

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 \le 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 2; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \; i = 1, 2, 3.$$

Розв’язання.

Дану (початкову) задачу потрібно перетворити спочатку до виду задачі (5.1), тому що її цільова функція мінімізується (якщо б вона максимізувалася, то потрібно б було перетворювати до виду задачі (5.2)). Для цього досить помножити 1-е і 3-є обмеження на –1. Одержимо

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_3 \geq -6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ -x_1 - 3x_2 \geq -7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Тепер складаємо двоїсту задачу за зразком задачі (5.2). Вона буде мати вигляд

$$\varphi = -6y_1 + y_2 - 7y_3 + 2y_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \leq 1, \\ -y_2 - 3y_3 + y_4 \leq 2, \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq -1; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,4}$$

Якщо початкова задача на max, то для складання двоїстої до неї, її потрібно перетворити спочатку до вигляду задачі (5.2). Двоїста задача буде в цьому випадку мати вигляд задачі (5.1).

За означенням, двоїстою до канонічної ЗЛП

$$f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{5.3}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

є задача

$$\varphi = b_1y_1 + \ldots + b_my_m \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n \end{cases} \tag{5.4}$$

При цьому на змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ не накладаються умови невід'ємності. Задачі (5.3) і (5.4) називаються *несиметричними двоїстими* задачами.

Якщо початкова задача має загальну форму, то для побудови двоїстої задачі всі обмеження-нерівності потрібно перетворити у відповідність до цілі задачі. Після цього складати двоїсту задачу за наступними правилами:

1) Якщо деяке обмеження початкової задачі має форму рівності, то відповідна змінна двоїстої задачі має довільний знак.
2) Якщо у початковій задачі на деяку змінну не накладається вимога невід'ємності, то відповідне обмеження двоїстої задачі записується у вигляді рівності.
3) Решта правил побудови двоїстої задачі така сама, як і для симетричних задач.

<u>Приклад 2.</u> Записати двоїсту задачу до даної

$$f = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, ..., 6.$$

<u>Розв'язання.</u> Будуємо двоїсту задачу за формулою (5.4):

$$\varphi = 7y_1 + 12y_2 + 10y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 - 4y_3 \le 1, \\ -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le -3, \\ 2y_1 + 8y_3 \le 2; \end{cases}$$

<u>Приклад 3.</u> Записати двоїсту до задачі

$$f = x_1 + 2x_2 - x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 \ge 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \le 7; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_4 \ge 0.$$

<u>Розв'язання.</u> Спочатку перетворимо цю задачу у відповідну до max форму:

$$f = x_1 + 2x_2 - x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 \le -1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \le 7; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_4 \ge 0.$$

Тепер складаємо двоїсту задачу:

$\varphi = 4y_1 - y_2 + 7y_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ -y_1 + 2y_3 \geq 0, \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \geq -1; \end{cases}$$

$y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$

Для розв'язування взаємно двоїстих симетричних задач використовують двоїстий симплексний метод. Він полягає в наступному. За допомогою балансових змінних перетворюють обидві задачі у канонічну форму. Одержані задачі будуть мати однакову кількість змінних. Встановимо між ними взаємно однозначну відповідність: вихідним змінним однієї з задач будуть відповідати балансові змінні двоїстої задачі. Наприклад, у випадку задач (5.2) і (5.1) одержимо відповідність:

$$\begin{matrix} y_1,\ldots, & y_m, & y_{m+1},\ldots, & y_{m+n}, \\ x_{n+1},\ldots, & x_{n+m}, & x_1,\ldots, & x_n. \end{matrix} \qquad (5.5)$$

Тепер одну з задач розв'яжемо симплексним методом, наприклад, задачу (5.2). Тоді з останньої симплекс-таблиці можна отримати не тільки розв'язок задачі (5.2), а й розв'язок задачі (5.1). Для цього під кожною парою змінних (5.5), якщо до пари входить базисна змінна оптимального плану задачі, яка була розв'язана, підписуємо нуль, а якщо до неї входить вільна змінна, то підписуємо відповідну їй оцінку цільової функції з останнього рядка симплекс-таблиці. Виписані числа є значеннями змінних в оптимальному плані двоїстої задачі. А значення цільової функції $f_{\min} = f(\overline{X}_{\text{опт}})$ дорівнюватиме $\varphi(\overline{Y}_{\text{опт}})$. Цей факт можна використовувати для перевірки одержаного розв'язку.

Приклад 4. Записати двоїсту задачу до даної і знайти розв'язок обох задач.

$f = 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 7; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$

Розв'язання. Будуємо двоїсту задачу

$\varphi = 2y_1 + 7y_2 \to \max;$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 7, \\ 2y_1 - 3y_2 \le 6, \\ -y_1 + y_2 \le 2; \end{cases}$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1, 2.$$

Розв'яжемо симплексним методом двоїсту задачу, попередньо перетворивши її у канонічну форму. Маємо:

	y_1	y_2	b_i
y_3	1	2	7
y_4	2	–3	6
y_5	–1	$\boxed{1}$	2
$-\varphi$	–2	–7	0

	y_1	y_5	b_i
y_3	$\boxed{3}$	–2	3
y_4	–1	3	12
y_2	–1	1	2
$-\varphi$	–9	7	14

	y_3	y_5	b_i
y_1	$1/3$	$-2/3$	1
y_4	$1/3$		13
y_2	$1/3$		3
$-\varphi$	3	1	23

Таким чином, $\overline{Y}_{\text{опт}} = (1; 3)$, $\varphi_{\max} = \varphi(\overline{Y}_{\text{опт}}) = 23$.

Щоб знайти оптимальний план вихідної задачі, встановимо відповідність між змінними початкової задачі і двоїстої до неї і підпишемо під кожною парою змінних число за вказаним вище правилом:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_4 & x_5 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Таким чином, отримали значення для x_i: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Маємо відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = (3; 0; 1)$, $f_{\min} = 23$.

Поданий метод розв'язування двоїстих задач ґрунтується на так званих теоремах двоїстості.

5.1. Основні теореми двоїстості та їх використання

Теорема 1. (Перша теорема двоїстості). Якщо одна з двоїстих задач має розв'язок, то й інша задача має розв'язок. При цьому оптимальні значення цільових функцій збігаються

$$f(\overline{X}_{\text{опт}}) = \varphi(\overline{Y}_{\text{опт}}).$$

Якщо лінійна форма однієї з задач необмежена на множині планів, то множина планів іншої задачі є порожньою.

Теорема 2. (Друга теорема двоїстості для симетричних взаємно двоїстих задач).

Для того, щоб плани $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ і $\overline{Y}=(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m)$ симетричних двоїстих задач були оптимальними, необхідно і досить виконання рівностей

$$(a_{i1}\overline{x}_1+...+a_{in}\overline{x}_n-b_i)\cdot\overline{y}_i=0,\ i=1, 2, ...\ m, \tag{5.6}$$

$$(a_{1j}\overline{y}_1+a_{2j}\overline{y}_2+...+a_{mj}\overline{y}_m-c_j)\cdot\overline{x}_j=0,\ j=1, 2, ..., n. \tag{5.7}$$

Використання цієї теореми пояснимо на прикладі 4. Оскільки для оптимальних значень $\overline{y}_1=1,\ \overline{y}_2=3$ друге обмеження $2y_1-3y_2\le 6$ виконується у вигляді строгої нерівності $(2\cdot 1-3\cdot 3<6)$, то згідно з умовою (5.7) змінна $\overline{x}_2=0$ в оптимальному плані початкової задачі. А оскільки $\overline{y}_1\ne 0,\ \ \overline{y}_2\ne 0,$ то обмеження початкової задачі згідно з умовою (5.6) повинні виконуватися у вигляді рівностей. Підставивши у систему обмежень початкової задачі замість x_2 нуль і замінивши знаки нерівностей на рівності, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\overline{x}_1-\overline{x}_3=2,\\ 2\overline{x}_1+\overline{x}_3=7.\end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, одержимо $\overline{X}_{\text{опт}}=(3;\,0;\,1)$.

Теорема 3. (Друга теорема двоїстості для несиметричних двоїстих задач).

Для того, щоб плани $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ і $\overline{Y}=(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m)$ відповідно задач (5.3) і (5.4) були оптимальними, необхідно і досить, щоб для кожного $j\ (j=1, 2, .., n)$ виконувалась рівність

$$(a_{1j}\cdot\overline{y}_1+a_{2j}\cdot\overline{y}_2+...+a_{mj}\overline{y}_m-c_j)\cdot\overline{x}_j=0\,. \tag{5.8}$$

Тобто, якщо оптимальний план двоїстої задачі перетворює $j-$те обмеження цієї задачі у строгу нерівність, то $j-$та компонента оптимального плану початкової задачі дорівнюватиме нулю.

Приклад 5. Використовуючи другу теорему двоїстості, знайти розв’язки даної задачі і двоїстої до неї.

$$f=2x_1+x_2-3x_3-x_4\to\min;$$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4=1,\\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=3;\end{cases}$$

$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

Розв'язання. Будуємо двоїсту задачу:

$\varphi = y_1 + 3y_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 2, \\ -y_1 + 2y_2 \le 1, \\ y_1 + 2y_2 \le -3, \\ 2y_1 - y_2 \le -1. \end{cases}$$

Покажемо, як можна знайти оптимальні плани цих задач двома різними методами.

1 метод. Використовуючи симплексний метод, знаходимо оптимальний план початкової задачі:

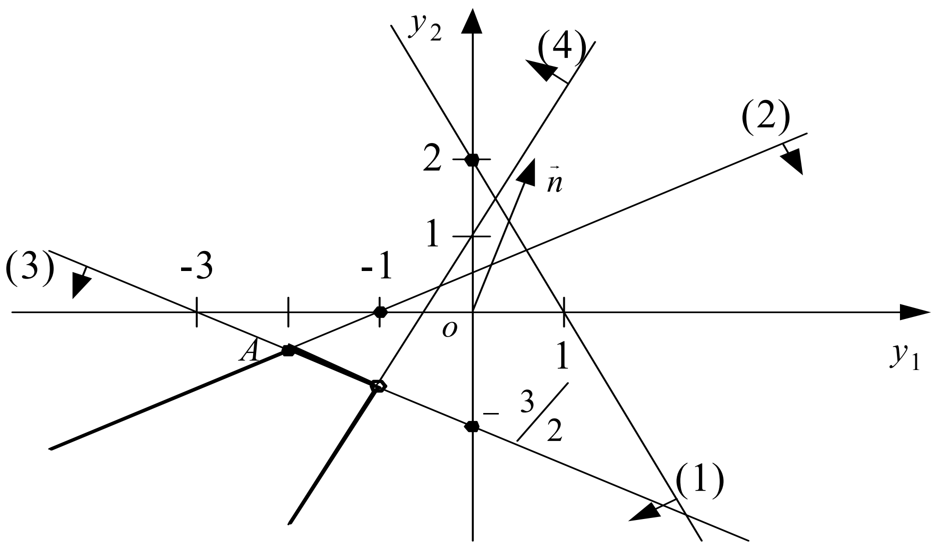
$\overline{X}_{\text{опт}} = (0, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 0), \quad f_{\min} = -\frac{7}{2}.$

Оскільки $\overline{x}_2 \ne 0, \ \overline{x}_3 \ne 0,$ то згідно з (5.8), друге і третє обмеження двоїстої задачі повинні виконуватися для оптимальних значень $\overline{y}_i$ у вигляді рівностей. Маємо систему

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 1, \\ y_1 + 2y_2 = -3. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо $\overline{Y}_{\text{опт}} = (-2; -\frac{1}{2}), \ \varphi_{\max} = -\frac{7}{2}.$

2 метод. Розв'яжемо двоїсту задачу графічним методом



Оптимальна точка є т. A $(-2; -\frac{1}{2})$. Вона не лежить на 1-ї та 4-ї прямих, тому її координати задовольняють 1-е і 4-е обмеження у вигляді строгих нерівностей. Згідно (5.8), $\overline{x}_1 = 0, \ \overline{x}_4 = 0.$

Підставивши ці значення у обмеження початкової задачі, матимемо систему для знаходження $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо $\overline{X}_{\text{опт}} = (0, \ 1/4, \ 5/4, \ 0)$. $f_{\min} = f(\overline{X}_{\text{опт}}) = -7/2$.

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі 5.1 – 5.6 за допомогою графічного розв'язку двоїстої задачі.

5.1 $f = 4x_1 + 18x_2 + 30x_3 + 5x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \le -3; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1, \ 4}.$

5.2 $f = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1, \ 4}.$

5.3 $f = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 - x_4 \ge 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1, \ 4}.$

5.4 $f = x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 2; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1, \ 4}.$

5.5 $f = -3x_2 - 6x_3 - x_4 + 15x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 \le 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 \le 1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1, \ 5}.$

Задачі 5.6 – 5.9 розв'язати, використовуючи симплексний метод для розв'язку двоїстої задачі.

5.6 $f = -3x_1 - 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le -3, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ 3x_1 - x_2 \ge -5, \\ -x_1 + x_2 \ge 3; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$

5.7 $f = -2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le -5; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$

5.8 $f = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 \ge 0, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5.9 $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 - 2x_2 \le 15; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Побудувати двоїсту задачу. Розв’язати одну з задач симплексним методом та знайти розв’язок іншої за допомогою теорем двоїстості.

5.10 $f = 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 4}.$

5.11 $f = x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 4}.$

5.12 $f = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 4}.$

5.13 $f = -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.14 $f = -2x_1 - 4x_2 - 23x_3 -$
$- 4x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 4}.$

5.15 $f = 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 15x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 5}.$

5.16 $f = 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le -4; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.17 $f = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \le -1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.18 $f = x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.19 $f = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.20 $f = x + 3x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.21 $f = x_1 - 2x_2 - x_3 +$
$+ 5x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_5 \le 2, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \le 5; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}.$

5.22 $f = 6x_1 + 15x_2 +$
$+ 15x_3 + 15x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 2; \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 4}.$

6. Задачі лінійного цілочислового програмування

6.1. Графічний метод розв'язування

Графічний метод розв'язування цілочислових задач використовується в тих же випадках, що і для звичайних ЗЛП. Різниця полягає лише в тому, що множина допустимих планів $\widetilde{M}$ складається з точок множини M, координати яких є цілі числа.

Приклад 1. Розв'язати графічним методом ЗЛП

$f = -2x_1 + x_2 \to \min;$

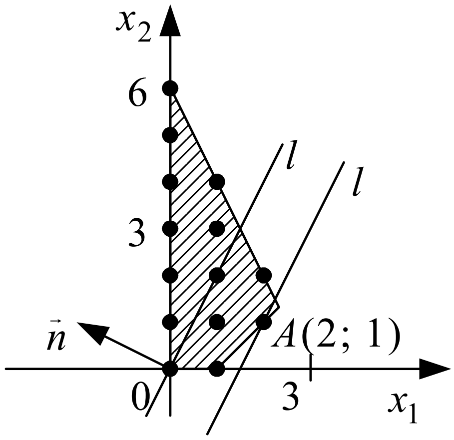
$2x_1 + x_2 \le 6,$

$x_1 - x_2 \le 1;$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

$x_1, x_2 -$ цілі.

Розв'язання. Побудуємо множину допустимих планів M для цієї задачі без вимог цілочисловості x_1 і x_2. Після цього відмітимо точки множини M з цілочисловими координатами. Сукупність цих точок утворює допустиму множину $\widetilde{M}$ цілочислової задачі. Далі будуємо нормальний вектор $\vec{n} = \{-2;1\}$ і лінію рівня l цільової функції так, щоб вона перетинала область M Переміщуємо пряму l паралельно самій собі у напрямку, протилежному нормалі (тому що лінійна форма даної задачі мінімізується), і знаходимо крайнє можливе положення цієї прямої, в якому вона ще має спільні точки з множиною $\widetilde{M}$. В цьому положенні лінія рівня проходить через точку A. Підставивши координати т. A в цільову функцію, одержимо відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = \{2;1\}$, $f_{\min} = -3.$



6.2. Метод Гоморі розв'язування цілочислових ЗЛП

Розглянемо задачу у канонічній формі

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \tag{6.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{6.2}$$

$$x_j \ge 0, \tag{6.3}$$

$$x_j - \text{ціле}, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{6.4}$$

Алгоритм методу Гоморі полягає в наступному.

Розв'язують задачу (6.1)-(6.3) симплексним методом. Якщо одержаний оптимальний план виявиться не цілочисловим, то до обмежень початкової задачі додають додаткове лінійне обмеження, вводячи допоміжну змінну x_{n+1}, і розв'язують одержану задачу. Так повторюють, доки не буде одержано цілочисловий оптимальний план або не буде виявлено нерозв'язність задачі.

Тепер детальніше. Нехай остання симплекс-таблиця для задачі (6.1) – (6.3) має вигляд:

	x_{m+1}	. . .	x_n	
x_1	$\alpha_{1,m+1}$		$\alpha_{1,n}$	β_1
:				
x_k	$\alpha_{k,m+1}$		$\alpha_{k,n}$	β_k
:				
x_m	$\alpha_{m,m+1}$		$\alpha_{m,n}$	β_m
f	c_{m+1}		c_n	$-c_0$

Можливі наступні випадки:

1. Всі числа β_i – цілі. Тоді задача (6.1)-(6.4) також розв'язана.

2. Серед чисел β_i є дробові. Нехай це буде β_k. Тоді додаткове обмеження будується за формулою:

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{k,j}\} \cdot x_j = -\{\beta_k\}, \tag{6.5}$$

де через $\{a\}$ позначено дробову частину числа a, яка дорівнює різниці між a і його цілою частиною $[a]$: $\{a\} = a - [a]$. Цілою частиною $[a]$ даного числа a називається найближче ціле число, яке менше за дане. Очевидно, $\{a\} \ge 0$, бо завжди $[a] \le a$.

Обмеження (6.5) записується додатковим рядком в останню симплекс-таблицю і розв'язування початкової задачі продовжується за такими правилами:

а) за опорний рядок приймається той, в якому останній елемент (β_k) від'ємний;

б) якщо всі числа $\alpha_{k,j} > 0$, то задача не має розв'язку. Якщо є від'ємний елемент $\alpha_{k,i}$, то його беруть за опорний. Якщо таких елементів декілька, то за опорний вибирають той, для якого відношення $c_j / |\alpha_{k,j}|$ – найменше. Це гарантує невід'ємність оцінок c'_j наступної симплекс-таблиці (а значить і оптимальність нового плану). Далі проводять звичайні симплексні перетворення;

в) якщо в одержаній після ітерації симплекс-таблиці є хоча б один від'ємний елемент β_i, то цей оптимальний план не є опорним. Тому пункти а) і б) повторюють доти, доки не з'явиться опорний план.

3. Якщо цей опорний план виявиться не цілочисловим, то повертаємося до пункту 2, тобто будуємо ще одне додаткове обмеження. При цьому, якщо попередня додаткова змінна опинилася в базисі, то відповідний рядок можна закреслити, так як надалі він не потрібний.

Зауваження 1. Якщо нецілих елементів β_i два або більше, то для побудови додаткового обмеження береться елемент із найбільшою дробовою частиною (для визначеності).

Зауваження 2. Метод Гоморі в наведеному вигляді використовується лише для повністю цілочислових задач лінійного програмування.

Приклад 2. Розв'язати задачу

$f = 3x_1 - x_2 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 4};$

x_j – ціле, $j = \overline{1, 4}$.

Розв'язання. Будемо розв'язувати цю задачу без останньої вимоги симплексним методом за допомогою штучного базису. Матимемо послідовність симплекс-таблиць ($F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	2	-1	2	-1	7
y_2	2	1	-1	2	3
y_3	1	$\boxed{2}$	-1	-1	2
F	-5	-2	0	0	-12

	x_1	x_3	x_4	b_i
y_1	$5/2$	$3/2$	$-3/2$	8
y_2	$\boxed{3/2}$	$-1/2$	$5/2$	2
x_2	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	1
F	-4	-1	-1	-10

	x_3	x_4	b_i
y_1	$7/3$	$-17/3$	$14/3$
x_1	$-1/3$	$5/3$	$4/3$
x_2	$-1/3$	$-4/3$	$1/3$
F	$-7/3$	$17/3$	$-14/3$

	x_4	b_i
x_3	$-17/7$	2
x_1	$\boxed{6/7}$	2
x_2	$-15/7$	1
f	$-26/7$	-5

	x_1	b_i
x_3	$17/6$	$23/3$
x_4	$7/6$	$7/3$
x_2	$5/2$	6
f	$13/3$	$11/3$

З останньої симплекс-таблиці випливає, що оптимальним планом нашої задачі без вимоги цілочисловості буде вектор $\overline{X} = \{0, 6, 23/3, 7/3\}$. Він не є цілочисловим, тому потрібно скласти додаткове обмеження на множину допустимих планів. Складаємо його на основі змінної x_3. Оскільки $\{\alpha_{31}\} = \dfrac{5}{6}$, $\{\beta_3\} = \dfrac{2}{3}$, то згідно формули (6.5) маємо додаткове обмеження у вигляді:

$$x_5 - \tfrac{5}{6} x_1 = -\tfrac{2}{3}.$$

Дописуємо його в останню симплекс-таблицю і робимо симплекс-перетворення з опорним елементом $-\{\alpha_{31}\}$, тобто $-\tfrac{5}{6}$.

	x_1	b_i
x_3	$17/6$	$23/3$
x_4	$7/6$	$7/3$
x_2	$5/2$	6
x_5	$-5/6$	$-2/3$
f	$13/3$	$11/3$

	x_5	b_i
x_3	$17/5$	$27/5$
x_4	$7/5$	$7/5$
x_2	3	4
x_1	$-6/5$	$4/5$
f	$26/5$	$1/5$

Знову одержали не цілочисловий оптимальний план. Взявши змінну x_1 за основу, будуємо ще одне додаткове обмеження:

$$x_6 - \frac{4}{5}x_5 = -\frac{4}{5}.$$

Вписуємо його в останню симплекс-таблицю і, використовуючи $-4/5$ як опорний елемент, робимо симплекс-перетворення. При цьому рядок з x_5 можна не вписувати зовсім.

	x_5	b_i
x_3	$17/5$	$27/5$
x_4	$7/5$	$7/5$
x_2	3	4
x_1	$-6/5$	$4/5$
x_6	$\boxed{-4/5}$	$-4/5$
f	$26/5$	$1/5$

	x_6	b_i
x_3	$17/4$	2
x_4	$7/4$	0
x_2	$15/4$	1
x_1	$-3/2$	2
f	$13/2$	-5

Одержали цілочисловий оптимальний план.

Відповідь: $\overline{X}_{\text{опт}} = \{2, 1, 2, 0\}$, $f_{\min} = f(\overline{X}_{\text{опт}}) = 5.$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Розв'язати методом Гоморі задачу прикладу 1.
2. Розв'язати задачу прикладу 2 методом Гоморі, складаючи додаткове обмеження на основі іншої змінної (на основі змінної x_4 на першому кроці).
3. Методом Гоморі розв'язати такі задачі:

а) $f = 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, 4},$

x_j – ціле, $j = \overline{1, 4}$.

б) $f = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j$ – ціле, $j = \overline{1, 4}$.

в) $f = -x_1 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j$ – ціле, $j = \overline{1, 5}$.

4. Розв'язати графічним методом і методом Гоморі такі задачі:

а) $f = -9x_1 - 11x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j$ – ціле, $j = 1, 2$.

б) $f = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 36, \\ x_1 \leq 13, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j$ – ціле, $j = 1, 2$.

в) $f = x_2 - x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j$ – ціле, $j = \overline{1, 4}$.

5. Розв'язати методом Гоморі задачі:

а) $f = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j - \text{ціле},\ \text{j} = \overline{1,5}.$

б) $f = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j - \text{ціле},\ \text{j} = \overline{1,4}.$

в) $f = -2x_1 - x_2 - x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 18; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j - \text{ціле},\ \text{j} = \overline{1,3}.$

г) $f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \geq 1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ x_j - \text{ціле},\ \text{j} = \overline{1,3}.$

7. Розв’язування транспортної задачі за критерієм вартості

Основні означення і теореми див. в [1].

Математична модель транспортної задачі закритого типу є

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{7.1}$$

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{7.2}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,...,n,\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,...,m, \tag{7.3}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Тут a_i–запаси товару в пункті постачання A_i , i=1,…m, b_j - потреби товару пункту призначення B_j, j=1,…n, x_{ij} - кількість одиниць товару, яку потрібно перевезти із пункту A_i в пункт B_j , c_{ij} – відповідна вартість перевезення одиниці товару, L – загальна вартість усіх перевезень – цільова функція цієї ЗЛП, яку потрібно мінімізувати.

Потрібно скласти план перевезень, тобто знайти значення змінних x_{ij}, таким чином, щоб весь товар з пунктів постачання був вивезений, потреби всіх пунктів призначення були задоволені і водночас сумарна вартість усіх перевезень була мінімальною.

Оскільки маємо задачу лінійного програмування канонічного типу, то будемо розв'язувати її за схемою симплексного методу, яка містить в собі три основних пункти: 1-й – побудова початкового опорного плану, 2-й – аналіз цього плану на оптимальність, 3-й – у разі не оптимальності одержаного плану – перехід до наступного опорного плану. Розглянемо кожний з цих пунктів окремо.

7.1. Побудова початкового опорного плану.

Для розв'язування транспортної задачі, в тому числі для побудови опорного розв'язку, використовують розподільну таблицю, яка має вигляд

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
$\vdots$				
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

В клітину *(i,j)*, де *i* – номер рядка, *j* – номер стовпчика, вписують значення змінної x_{ij}. Таким чином, маємо взаємно однозначну відповідність між змінними x_{ij} і клітинами таблиці. Будемо називати клітини, в яких записані базисні змінні, базисними, а вільні змінні – вільними клітинами.

Означення. *Ланцюгом* будемо називати послідовність клітин розподільної таблиці таку, що кожні дві сусідні клітини знаходяться в одному рядку або одному стовпчику. *Циклом* називатимемо замкнений ланцюг, тобто ланцюг, для якого останній і перший елементи знаходяться в одному рядку або стовпчику.

Будемо позначати ранг системи обмежень (7.3) через *r*. Як відомо (див. [2]), $r = m + n - 1$.

<u>Теорема 1.</u> Для того щоб *r* змінних складали базис системи обмежень (7.3) (*r* клітин складали базис), необхідно і досить, щоб із відповідних клітин не можна було скласти жодного циклу.

Перейдемо тепер до побудови початкового опорного розв'язку. Як відомо, опорним розв'язком системи називається розв'язок, в якому вільні змінні дорівнюють нулю, а базисні – невід'ємні. Початковий опорний план транспортної задачі можна скласти за методом північно-західного кута (діагональним) або за методом найменшої вартості.

Діагональний метод полягає в наступному.

Покладемо $x_{11} = \min(a_1,b_1)$. Якщо виявилося, що $x_{11} = a_1$, то переходимо до клітини (2,1), якщо $x_{11} = b_1$, то переходимо до заповнення клітини (1,2), а якщо $x_{11} = a_1 = b_1$, то переходимо до клітини (2,2). В першому випадку покладемо $x_{21} = \min(a_2, b_1\text{-}x_{11})$, в другому – $x_{12} = \min(a_1\text{-}x_{11}, b_2)$, а в третьому – $x_{22} = \min(a_2, b_2)$. Таким чином, враховуючи обмеження (7.3), заповнюємо всю таблицю. При цьому порожнім клітинам відповідають нульові значення відповідних змінних. Одержаний розв'язок записуватимемо у вигляді матриці:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots & x_{1n} \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . \; . \; . \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

<u>Приклад 1.</u> Побудувати початковий опорний план, якщо $a_i = 30, 15, 25\ 20$, $b_j = 10, 35, 40, 5$.

За діагональним методом одержимо:

a_i \ b_j	10	35	40	5
30	10	20		
15		15		
25			25	
20			15	5

Тут $x_{11} = \min(10, 30) = 10$,
$x_{12} = \min(30\text{-}10, 35) = 20$,
$x_{22} = \min(15, 35\text{-}20) = 15$,
$x_{33} = \min(25, 40) = 25$,
$x_{34} = \min(20, 40\text{-}25) = 15$,
$x_{44} = \min(20\text{-}15, 5) = 5$.

Отримали початковий опорний план

$$X_1 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

Коли X_1 складають за *методом найменшої вартості*, то починають з клітини, якій відповідає найменша вартість.

Нехай $c_{kl} = \min c_{ij}$, тоді $x_{kl} = \min(a_k, b_l)$. Далі заповнюється наступна клітина з найменшою вартістю, аналогічно тому, як це робили в діагональному методі, тобто за обмеженнями (7.3). Для прикладу візьмемо попередній приклад, доповнений матрицею вартостей

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Розподільна таблиця матиме вигляд

	10	35	40	5
30	3	4	2	1
15	5	2	1	6
25	3	7	4	2
20	9	5	4	8

Заповнення таблиці починаємо з клітини (1,4), бо вона має найменшу вартість. Маємо $x_{14} = \min(5,\ 30) = 5$. Тоді з обмежень (7.3) випливає, що решта змінних четвертого стовпчика дорівнюватиме нулю. Далі обираємо клітину (2,3). Отримаємо $x_{23} = 15$. Решта змінних другого рядка дорівнюватиме нулю. Наступною заповнюємо клітину (1,3): $x_{13} = 25$, оскільки $\min(30\text{-}5,\ 40\text{-}15) = 25$. Тоді $x_{33} = x_{43} = 0$, $x_{11} = x_{12} = 0$. Продовжуючи таким чином, отримаємо заповнену таблицю

	10	35	40	5
30	3	4	2 25	1 5
15	5	2	1 15	6
25	3 10	7 15	4	2
20	9	5 20	4	8

,

якій відповідає початковий опорний план X_2:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що обидва початкових опорних плани виявилися виродженими: додатних змінних менше за ранг системи.

7.2. Перевірка опорного плану на оптимальність

Будемо використовувати метод потенціалів. Для цього потрібно визначити множину R базисних змінних. Можливі два випадки:

1) усі базисні змінні - додатні. Тоді кажуть, що план X – не вироджений. В цьому випадку він однозначний.

2) додатних змінних k, де $k < r$. В цьому випадку за R береться така довільна множина з r змінних, яка містить усі додатні змінні і $r-k$ нульових, таких, що з елементів множини R не можна скласти жодного циклу (у відповідність з теоремою 1). Такий план, як відомо, називають виродженим. Він не є однозначний.

Наведемо алгоритм методу потенціалів.

1. Побудувати початковий опорний план X.
2. Для цього плану обчислити потенціали $\{\alpha_i\}$ і $\{\beta_j\}$, розв'язавши систему лінійних рівнянь
$$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j, \quad i = 1,..., n, \quad j = 1,..., m, \tag{7.5}$$
які записуються тільки для базисних тарифів. Таких рівнянь буде r (бо кількість базисних змінних r), а кількість потенціалів дорівнює $n + m = r + 1$. Тому для 1-го потенціалу можна взяти довільне значення, наприклад, нульове.
3. Знайти оцінки вільних змінних плану X за формулами:
$$s_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) \quad . \tag{7.6}$$

Якщо серед оцінок s_{ij} немає від'ємних, то відповідний опорний план є оптимальним. Тоді залишається знайти мінімальну сумарну вартість перевезень L за формулою (7.2). Але, якщо серед оцінок вільних змінних є нульові, то оптимальний план є альтернативним. Потрібно знайти всі опорні оптимальні плани X_{ion}, використовуючи перетворення однократного заміщення для відповідних вільних змінних, і побудувати загальну формулу для оптимального плану :
$$X_{onm} = \lambda_1 X_{1on} + \lambda_2 X_{2on} + ... + \lambda_k X_{kon},$$
де
$$\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1, \quad 0 \le \lambda_i \le 1, \ i = 1, ..., k.$$
Зауважимо, що при $k = 2$ формула для альтернативного розв'язку може бути записана у вигляді.
$$X_{onm} = \lambda X_{1on} + (1-\lambda)\, X_{2on},\ 0 \le \lambda \le 1.$$

4. Якщо існує хоча б одна від'ємна оцінка s_{pq}, то X_1 не є оптимальним, і треба будувати новий опорний план, для якого значення цільової функції буде не більше, ніж для попереднього. Для цього потрібно перевести змінну x_{pq} у базисні, а відповідну базисну змінну – у вільні, тобто зробити перетворення однократного заміщення. Отримаємо новий опорний план і переходимо до пункту 2 алгоритму.

7.3. Перетворення однократного заміщення для транспортних задач

Це перетворення проводиться на основі наступної теореми.

Теорема 2. Для будь-якої вільної клітини існує, причому єдиний, цикл, складений із цієї клітини і базисних клітин.

Нехай вільну змінну x_{pq} потрібно перевести у базис. Тоді для неї у відповідній розподільній таблиці підбирають послідовність базисних змінних x_{ij} таких, щоб при послідовному з'єднанні їх у горизонтальному і вертикальному напрямках, починаючи із змінної x_{pq}, утворився цикл. Змінній x_{pq} надають значення λ, $\lambda > 0$, і змінюють значення всіх елементів циклу послідовно згідно з рівняннями (7.3). Значення λ вибирають максимально можливим, але таким, щоб нові значення елементів циклу залишалися невід'ємними. Наприклад, якщо нові значення мають вигляд:

$$\lambda,\ \ 10-\lambda,\ \ 5+\lambda,\ \ 20-\lambda,$$

то λ повинно дорівнювати 10. Тоді елемент x_{pq} в новому опорному плані стає базисним із значенням 10, а елемент, який мав значення 10, у новому опорному плану набуває значення 0 і стає вільним. Решта елементів, які не входять у цикл, не змінюються.

Приклад 2. Розв'язати методом потенціалів транспортну задачу

$a_i = 20,\ 35,\ 40,\ 55;$ $\qquad b_j = 50,\ 25,\ 25,\ 50;$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для побудови початкового опорного плану записуємо умову задачі у вигляді розподільної таблиці і будемо заповнювати клітини цієї таблиці за діагональним методом: $x_{11} = \min(20,\ 50) = 20$ і перший рядок "закривається", $x_{21} = \min(35,\ 50-20) = 30$ і перший стовпчик "закривається", $x_{22} = \min(35-30,\ 25) = 5$, $x_{32} = \min(40,\ 25-5) = 20$,

b_i / a_i	50	25	25	50
20	20			
35	30	5		
40		20	20	
55			5	50

$x_{33} = \min(40-20,\ 25) = 20$, $x_{43} = \min(55,\ 25-20) = 5$,

$x_{44} = \min(55-5,\ 50) = 50.$ Решта елементів дорівнюють нулю.

Одержали (див. (7.4)):

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 \end{pmatrix}, \qquad L(X_1) = 20\cdot 5 + 30\cdot 4 + 5\cdot 7 + 20\cdot 4 + 20\cdot 4 + \\ + 5\cdot 2 + 50\cdot 2 = 525$$

Для аналізу плану X_1 на оптимальність потрібно знайти потенціали і за їх допомогою оцінки вільних змінних. Оскільки потенціалів в нашій задачі повинно бути вісім, а рівнянь для їх знаходження – сім (див. пункт 2 алгоритму), то для α_1 можемо взяти довільне значення. Покладемо $\alpha_1 = 0.$ Тоді з рівняння для c_{11} знаходимо β_1, $\beta_1 = 5.$ Використовуючи рівняння для c_{21}, знайдемо α_2, $\alpha_2 = -1.$ Далі легко знайти β_2: $7 = -1 + \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 8.$ І так далі. Ці розрахунки зручніше проводити за допомогою наступної таблиці

α_i \ β_i	5	8	8	8
0	**20** ⁵	1	2	3
-1	**30** ⁴	**5** ⁷	5	7
-4	3	**20** ⁴	**20** ⁴	6
-6	5	3	**5** ²	**50** ²

(7.7)

Тепер за допомогою потенціалів обчислимо оцінки вільних змінних. Користуючись формулами (7.6) і даними таблиці (7.7), обчислимо оцінки s_{ij} і запишемо їх у нижні ліві кути клітин таблиці (7.7), які відповідають вільним змінним. Одержимо таблицю:

α_i \ β_i	5	8	8	8
0	**20** ^{5}	^{1} -7	^{2} -6	^{3} -5
-1	**30** ^{4}	**5** ^{7}	^{5} -2	^{7} 0
-4	^{3} 2	**20** ^{4}	**20** ^{4}	^{6} 2
-6	^{5} 6	^{3} 1	**5** ^{2}	**50** ^{2}

(7.8)

Бачимо, що серед чисел s_{ij} є від'ємні. Значить X_1 – не є оптимальним планом. Для побудови ліпшого плану X_2 будемо переводити у базис вільну змінну, для якої оцінка найменша. У нашому випадку це $x_{12}(s_{12}=-7)$. Цикл для переводу x_{12} в базис буде складатися, як легко побачити із таблиці (7.8), з елементів $x_{12}, x_{11}, x_{21}, x_{22}$. Нові значення цих елементів будуть: λ, $20-\lambda$, $30+\lambda$, $5-\lambda$. Оскільки всі значення x_{ij} повинні бути невід'ємними, то λ дорівнюватиме 5. Тоді новий опорний план буде таким:

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки його на оптимальність повертаємось до пункту 2 алгоритму. Для знаходження потенціалів будуємо таблицю, аналогічну (7.8). Знаходимо потенціали, а потім оцінки вільних змінних, і вносимо ці дані у побудовану таблицю (оцінки записані в нижніх лівих кутах вільних клітин).

α_i \ β_i	5	1	1	1
0	**15** ^{5}	**5** ^{1}	^{2} 1	^{3} 2
-1	**35** ^{4}	^{7} 7	^{5} 5	^{7} 7
3	^{3} -5	**20** ^{4}	**20** ^{4}	^{6} 2
1	^{5} -1	^{3} 1	**5** ^{2}	**50** ^{2}

(7.9)

Бачимо, що є від'ємні оцінки ($s_{31} = -5,\ \ s_{41} = -1$). Для побудови нового опорного плану X_3 переводимо елемент x_{31} у базис за допомогою циклу: $x_{31},\ x_{32},\ x_{12},\ x_{11}$, який помічаємо пунктиром в таблиці 7.9. Нові значення через λ будуть: $\lambda,\ 20-\lambda,\ 5+\lambda,\ 15-\lambda$. Отже, $\lambda = 15$. Маємо новий опорний план X_3:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо потенціали і оцінки вільних змінних для X_3. Будуємо відповідну таблицю і проводимо в ній всі розрахунки:

β_i / α_i	0	1	1	1
0	5 5	20 1	2 1	3 2
4	35 4	7 2	5 0	7 2
3	15 3	5 4	20 4	6 2
1	5 4	3 1	5 2	50 2

(7.10)

Із таблиці (7.10) бачимо, що оцінки вільних змінних плану X_3 невід'ємні. Значить цей план є оптимальним. Але оскільки $s_{23} = 0$, то існує безліч оптимальних планів для даної задачі (альтернативний розв'язок). Для знаходження загальної формули оптимального плану знаходимо ще один опорний оптимальний план, переводячи змінну x_{23} у базис, і користуємося формулою для $X_{\text{опт}}$ із пункту 3 нашого алгоритму. Відповідний цикл позначимо пунктиром в таблиці 7.10. Маємо

$x_{23},\quad x_{33},\qquad x_{31},\qquad x_{21}$

$\lambda,\ \ 20-\lambda,\ \ 15+\lambda,\ \ 35-\lambda\ \Rightarrow \lambda = 20$

Отже,

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 20 & 0 \\ 35 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо відповідь

$X_{\text{опт}} = \lambda \cdot X_3 + (1-\lambda)X_4,\quad 0 \le \lambda \le 1,$

$L_{\min} = 20\cdot 1 + 35\cdot 4 + 15\cdot 3 + 5\cdot 4 + 20\cdot 4 + 5\cdot 2 + 50\cdot 2 = 415.$

Якщо записати оптимальний план у матричному вигляді, то матимемо:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 15+20\lambda & 0 & 20-20\lambda & 0 \\ 35-20\lambda & 5 & 20\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda \le 1,$$

або $x_{12} = 20,\quad x_{21} = 15+20\lambda,\quad x_{23} = 20-20\lambda,\quad x_{31} = 35-20\lambda,$

$x_{32} = 5,\quad x_{33} = 20\lambda,\quad x_{43} = 5,\quad x_{44} = 50.$

Решта перевезень – нульові.

Зауваження. Якщо серед оцінок вільних змінних із найменшим від'ємним значенням існує дві, або більше за дві, то для переведення у базис обираємо змінну, якій відповідає найменша вартість.

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати транспортні задачі закритого типу

7.1.

a_i \ b_j	4	6	8	6
6	2	2	3	4
8	6	4	3	1
10	1	2	2	1

7.2.

a_i \ b_j	5	9	9	7
11	7	8	1	3
11	2	4	5	9
8	6	3	5	2

7.3.

a_i \ b_j	40	35	30	15
46	4	3	2	5
34	1	1	6	4
40	3	5	9	4

7.4.

a_i \ b_j	16	18	12	15
20	2	3	9	7
16	3	4	6	1
11	4	5	8	1

7.5.

b_j / a_i	40	30	30	50
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
20	3	4	2	5

7.6.

b_j / a_i	20	34	16	10	25
30	2	6	3	4	8
35	1	5	6	9	7
40	3	4	1	6	10

7.7.

b_j / a_i	5	15	8	5
10	3	5	2	4
15	4	4	3	6
8	8	2	7	1

7.8.

b_j / a_i	20	25	37	23	20
50	1	4	5	6	3
40	2	4	3	7	1
35	5	2	3	4	6

7.4. Транспортні задачі відкритого типу

Транспортною задачею відкритого типу називають транспортну задачу для якої не виконується умова (7.1). Для розв’язання такої задачі розглядають допоміжну транспортну задачу закритого типу, яку розв’язують методом потенціалів.

Припустимо для визначеності, що замість умови (7.1) маємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{7.11}$$

Для перетворення задачі до закритого типу вводимо фіктивний пункт споживання B_{n+1} із потребою товару в кількості

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \, .$$

При цьому вартості перевезень товару з будь-якого пункту постачання в пункт B_{n+1} вважатимемо рівними 0. Таким чином, одержимо транспортну задачу закритого типу з балансовим рівнянням

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$$

і матрицею вартостей, в останньому (n+1-му) стовпчику якої стоять нулі. Розв’язавши цю задачу методом потенціалів, отримаємо розв’язок початкової задачі. Оскільки пункт призначення B_{n+1} – фіктивний, то ненульові перевезення ($x_{k,n+1}$>0) товару в цей пункт в оптимальному плані допоміжної задачі означають для початкової задачі, що у відповідних пунктах постачання A_k залишиться $x_{k,n+1}$ одиниць товару.

Приклад 3. Розв’язати транспортну задачу
$a_i = 75, 40, 35$; $b_j = 20, 45, 30$;

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Розв’язання: Маємо $\sum a_i = 150$, $\sum b_j = 95$. Це задача відкритого типу. Для перетворення її до задачі закритого типу вводимо фіктивний пункт призначення B_4 із потребою товару в кількості $b_4 = 150 - 95 = 55$ і тарифами $c_{i4} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Таким чином, маємо допоміжну задачу закритого типу: $a_i = 75, 40, 35$; $b_j = 20, 45, 30, 55$;

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язавши цю задачу методом потенціалів, одержимо відповідь: $x_{12} = 45$, $x_{14} = 30$, $x_{23} = 30$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 20$, $x_{34} = 15$, решта перевезень дорівнює 0. Але оскільки 4-й пункт призначення фіктивний, то для початкової задачі маємо

Відповідь: $x_{12} = 45$, $x_{23} = 30$, $x_{31} = 20$, в 1-му пункті постачання залишиться 30 одиниць товару, в 2-му – 10 одиниць, в 3-му залишиться 15 одиниць. Мінімальна вартість перевезень дорівнює 215 умовних одиниць.

Якщо замість умови (7.11) для початкової задачі має місце умова $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то для перетворення її до задачі закритого типу вводять фіктивний пункт постачання A_{m+1}, для якого $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а тарифи перевезень $c_{m+1,\, j} = 0$, j=1,…, n. Після розв’язування допоміжної задачі з’ясується, що деякі пункти споживання після оптимальних перевезень недоодержали певну кількість товару (а саме той товар, що повинен перевозитися із фіктивного пункту постачання).

Приклад 4. Розв’язати транспортну задачу відкритого типу
a_i=65, 70, 95, b_j=90, 65, 100,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Розв’язання. Оскільки $\sum a_i = 230$, а $\sum b_j = 255$, то маємо другий випадок. Для перетворення цієї задачі до транспортної задачі закритого типу вводимо фіктивний пункт постачання A_4 із запасом товару 25 одиниць. При цьому будемо вважати, що тарифи перевезень товару із A_4 у будь-який пункт призначення нульові. Отримаємо транспортну задачу закритого типу з умовою

$a_i = 65, 70, 95, 25$ $b_j = 90, 65, 100$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язавши цю задачу методом потенціалів, одержимо оптимальний розв’язок

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 65 \\ 60 & 0 & 10 \\ 30 & 65 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}, \qquad L_{min} = 525.$$

Оскільки A_4 – фіктивний пункт постачання, то для даної задачі маємо

Відповідь: $x_{13} = 65$, $x_{21} = 60$, $x_{23} = 10$, $x_{31} = 30$, $x_{32} = 65$ і третій пункт призначення недоотримав 25 одиниць товару, L_{min}=525.

Розв’язати транспортні задачі відкритого типу.

7.9.

a_i \ b_j	30	40	50	50	60
50	4	2	5	1	3
60	2	3	4	5	2
80	1	3	2	4	5
70	5	3	2	3	4

7.10.

a_i \ b_j	20	20	45
15	5	2	3
25	2	4	6
35	5	3	3

7.11.

a_i \ b_j	50	60	40	70

35	1	2	3	4
45	5	6	4	3
100	2	4	6	5

Література

1. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. – Киев: Высшая школа, 1979.
2. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995.
3. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования.
4. Сборник задач по математике / Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука. – Т. 4. – 1990.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа. – Т. 1. – 1986.