

Міністерство освіти України
Черкаський інженерно-технологічний інститут

Методичні вказівки
Контрольні роботи з вищої математики
для студентів заочної форми навчання
економічних спеціальностей

Черкаси ЧІТІ 1999

Міністерство освіти України
Черкаський інженерно-технологічний інститут

Методичні вказівки
Контрольні роботи з вищої математики
для студентів заочної форми навчання
економічних спеціальностей

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Черкаського інженерно-
технологічного інституту
Протокол № 7
від 17. 02. 99.

Черкаси ЧІТІ 1999

Методичні вказівки "Контрольні роботи з вищої математики для студентів заочної форми навчання економічних спеціальностей". /Укл. Півненко С.І. – Черкаси ЧІТІ, 1998 – 44 с.

Укладачі: Півненко С.І

Відповідальний редактор: Королевич В.С.

Рецензент: Діскант В.І.

Методичні вказівки "Контрольні роботи з вищої математики для студентів заочної форми навчання економічних спеціальностей" складені відповідно до програми з цієї дисципліни для технічних вузів.

У кожному семестрі студенти заочної форми навчання виконують по дві контрольні роботи.

Контрольна робота №1 складається з п'яти завдань по темі "Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії".

Контрольна робота №2 складається з шести задач по темах: "Введення в математичний аналіз", "Диференціювання функції однієї змінної", "Застосування похідних".

Контрольна робота №3 складається з п'яти задач по темах: "Функція багатьох змінних", "Інтегральне числення".

Контрольна робота №4 складається з п'яти задач по темах: "Звичайні диференціальні рівняння", "Ряди".

По теорії ймовірностей і математичній статистиці виконуються контрольні роботи №5 і №6.

Контрольна робота №5 складається з чотирьох задач по темах: "Випадкові події, класичні теореми і формули".

Контрольна робота №6 складається з чотирьох задач по темах: "Випадкові величини, закони розподілу і числові характеристики", "Основні поняття математичної статистики", "Лінійна кореляція".

В четвертому семестрі виконуються дві контрольні роботи по математичному програмуванню.

Контрольна робота №7 складається з п'яти задач по темах: "Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса-Жордана", "Методи розв'язування задач лінійного програмування".

Контрольна робота №8 складається з чотирьох задач по темах: "Двоїста задача, теореми двоїстості", "Транспортна задача".

Завдання, розміщені в цих методичних вказівках, можуть бути використані також для проведення практичних занять.

ЗМІСТ

Контрольна робота № 1

1. Розв'язування лінійних систем і нерівностей
2. Елементи аналітичної геометрії

Контрольна робота № 2

3. Введення в математичний аналіз
4. Диференціювання функції однієї змінної
5. Застосування похідних

Контрольна робота № 3

6. Функція багатьох змінних
7. Інтегральне числення

Контрольна робота № 4

8. Звичайні диференціальні рівняння
9. Ряди
10. Теорія ймовірностей і математична статистика

Контрольна робота № 5

- 10.1. Випадкові події. Класичне визначення ймовірності
- 10.2. Формули додавання та добутку ймовірностей
- 10.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса
- 10.4. Повторювання випробувань

Контрольна робота № 6

- 10.5. Випадкові величини. Числові характеристики і закони розподілу випадкової величини
- 10.6. Основні поняття математичної статистики. Точкові оцінки параметрів розподілу
- 10.7. Елементи теорії кореляції. Лінійна кореляція

11. Математичне програмування

Контрольна робота № 7

- 11.1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса-Жордана
- 11.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування
- 11.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Контрольна робота № 8

- 11.4. Двоїста задача
- 11.5. Теореми двоїстості
- 11.6. Транспортна задача

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

1. Розв'язування лінійних систем і нерівностей

1 - 10. Розв'язати СЛАУ:

а) методом Крамера;

б) засобами матричного числення.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

11 – 20. Побудувати множину розв'язків систем лінійних нерівностей.

Знайти координати їх кутових точок.

$$11. \begin{cases} 4y + 3x - 5 \geq 0; \\ 3y + x - 3 \leq 0; \\ y + 2x - 5 \leq 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y - 2x + 1 \geq 0; \\ 4y + 3x - 7 \leq 0; \\ 5y + x - 17 \leq 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y + x + 4 \geq 0; \\ 6y + x + 4 \geq 0; \\ 7y + 2x + 3 \leq 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} y - x - 2 \leq 0; \\ 4y - x + 7 \geq 0; \\ 7y - x + 10 \leq 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} y - 2x + 1 \geq 0; \\ 4y + x - 5 \geq 0; \\ 5y - x - 13 \leq 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2y - x + 1 \geq 0; \\ 2y + 3x + 5 \geq 0; \\ 6y + x - 9 \leq 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} y - x + 1 \leq 0; \\ 2y + x + 8 \geq 0; \\ y + 5x - 5 \leq 0. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} y + 2x + 5 \geq 0; \\ 3y - x - 13 \leq 0; \\ 5y - 4x - 17 \geq 0. \end{cases} \quad 19. \begin{cases} 3y + 2x + 5 \geq 0; \\ y - 2x + 7 \geq 0; \\ y + 1 \leq 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 7y + x - 11 \leq 0; \\ y + 5x + 13 \geq 0; \\ 3y - 2x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

2. Елементи аналітичної геометрії

20 – 30. Дані вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ у деякому базисі. Показати, що вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} утворюють базис і знайти координати вектора \vec{d} у цьому базисі.

21. \vec{a} (1; 2; 3), \vec{b} (-1; 3; 2), \vec{c} (7; -3; 5), \vec{d} (6; 10; 17).
 22. \vec{a} (4; 7; 8), \vec{b} (9; 1; 3), \vec{c} (2; -4; 1), \vec{d} (1; -13; -13).
 23. \vec{a} (8; 2; 3), \vec{b} (4; 6; 10), \vec{c} (3; -2; 1), \vec{d} (7; 4; 11).
 24. \vec{a} (10; 3; 1), \vec{b} (1; 4; 2), \vec{c} (3; 9; 2), \vec{d} (19; 30; 7).
 25. \vec{a} (2; 4; 1), \vec{b} (1; 3; 6), \vec{c} (5; 3; 1), \vec{d} (24; 20; 6).
 26. \vec{a} (1; 7; 3), \vec{b} (3; 4; 2), \vec{c} (4; 8; 5), \vec{d} (7; 32; 14).
 27. \vec{a} (1; -2; 3), \vec{b} (4; 7; 2), \vec{c} (6; 4; 2), \vec{d} (14; 18; 6).
 28. \vec{a} (1; 4; 3), \vec{b} (6; 8; 5), \vec{c} (3; 1; 4), \vec{d} (21; 18; 33).
 29. \vec{a} (2; 7; 3), \vec{b} (3; 1; 8), \vec{c} (2; -7; 4), \vec{d} (16; 14; 27).
 30. \vec{a} (7; 2; 1), \vec{b} (4; 3; 5), \vec{c} (3; 4; -2), \vec{d} (2; -5; -13).

31 – 40. Дано координати вершин A_1, A_2, A_3, A_4 . Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) довжину ребра A_1A_2 ;
- 2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 (з точністю до 1^0);
- 3) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

31. A_1 (1; 2; 0), A_2 (3; 5; 4), A_3 (6; 0; 1), A_4 (2; 4; 3).
 32. A_1 (1; 1; -1), A_2 (3; 2; 1), A_3 (0; 3; 0), A_4 (3; 0; 1).
 33. A_1 (1; 1; -2), A_2 (-2; 2; 1), A_3 (1; -2; -3), A_4 (4; -1; 1).
 34. A_1 (-1; 1; 3), A_2 (1; -1; 5), A_3 (1; 3; 1), A_4 (1; -1; 1).

35. $A_1 (-1; 1; 1)$, $A_2 (1; -2; 2)$, $A_3 (5; -5; 3)$, $A_4 (1; 0; 3)$.
36. $A_1 (-2; -3; 2)$, $A_2 (2; 3; -2)$, $A_3 (0; 1; 6)$, $A_4 (1; 0; 3)$.
37. $A_1 (2; -1; 3)$, $A_2 (3; 1; 2)$, $A_3 (5; -5; 4)$, $A_4 (1; 3; -8)$.
38. $A_1 (-1; 2; -1)$, $A_2 (1; -2; 2)$, $A_3 (-1; 0; 3)$, $A_4 (2; 1; 4)$.
39. $A_1 (3; -1; 1)$, $A_2 (5; -2; 2)$, $A_3 (6; 1; 3)$, $A_4 (4; -3; 2)$.
40. $A_1 (5; -1; 4)$, $A_2 (6; 1; 7)$, $A_3 (7; -2; 3)$, $A_4 (6; 2; 8)$.
41. Сторони АВ і ВС паралелограма задано рівняннями: $2x - y + 5 = 0$ і $x - 2y + 4 = 0$, діагоналі його перетинаються в точці $M(1, 4)$. Знайти довжини його висот.
42. Знайти вершини прямокутного рівнобічного трикутника, якщо дана вершина $C(3, 1)$ і рівняння гіпотенузи $3x - y + 2 = 0$.
43. Дано одну вершину трикутника $(1, 3)$ і рівняння двох медіан $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$. Скласти рівняння його сторін.
44. Дано вершину $B(-2, 2)$ і рівняння висоти, яка виходить з вершини A : $4x + 3y - 1 = 0$. Довжина цієї висоти дорівнює одиниці. Скласти рівняння сторони АВ.
45. Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння його сторін: $x + 2y = 4$; $x + 2y = 0$ і рівняння однієї його діагоналі $y = x + 2$.
46. Дано рівняння бічних сторін рівнобічного трикутника $2x - y + 8 = 0$, $x - 2y - 12 = 0$ і точка $(4, 0)$, що належить його основі. Скласти рівняння основи трикутника.
47. Дано вершини трикутника $A(-10, 2)$ і $B(6, 4)$. Його висоти перетинаються в точці $N(5, 2)$. Визначити координати третьої вершини C .
48. Знайти кути і площу трикутника, утвореного прямими $y = 2x$, $y = -2x$, $y = x + 6$.
49. Дано рівняння двох паралельних прямих $5x - 3y + 4 = 0$ і $10x - 6y - 1 = 0$. Скласти рівняння паралельної їм прямої, що проходить посередині між ними.
50. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(-3, 3)$ і $B(5, -1)$ – дві його вершини, а $M(4, 3)$ – точка перетину його висот.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

3. Введення в математичний аналіз

51 – 60. Побудувати графік функції $y = f(x)$, використовуючи перетворення графіків основних елементарних функцій.

51. $y = 3^{x+1} + 2$.

52. $y = 2x^3 + 1$.

53. $y = \log_{0,5}(x + 2) + 1$.

54. $y = -2\sin(x - \pi/6)$.

55. $y = 2(x - 1)^2 + 3$.

56. $y = -3^{x-3} + 1$

57. $y = \sin(x - \pi/4) + 1$.

58. $y = \lg(x + 2) + 1$.

59. $y = 2\cos(2x + \pi/3)$.

60. $(1/3)^{x+3} - 2$.

61 – 70. Знайти границі функцій (не користуючись правилом Лопіталя).

61. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x - 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 8x + 5}{3x^2 + 9x + 6}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2}$.

62. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{5x^4 + 3x + 2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 7x + 6}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos 2x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + 1} \right)^x$.

63. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 2}{2x^2 + 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{\sqrt{x + 5} - 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 4x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{2}{3-x}}$.

64. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 3x + 4}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$;

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x-4};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}.$$

$$65. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x^3+x+3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{9-x}}{x-2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{-2x}.$$

$$66. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+7x+3}{6x^2+1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{11+x} - 2}{x+7};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+12}{x} \right)^{3x+3}.$$

$$67. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+x+4}{3x^4+x^3+2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3\text{tg}x)^{\text{ctg}x}.$$

$$68. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-6}{x-3} \right)^{x+4}.$$

$$69. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5+x^3+x+5}{2x^5+x^2+3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^3-1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{4x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arcsin 12x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+10x+12}{21+x-2x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg} 2x}{2 \sin 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+5x-24}{2x^2-5x-3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}x - \sin x}{x^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+3x+2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{ arctg} 4x}{1-\cos^2 x};$$

$$70. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+2} \right)^{3x-6}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{9x^2};$$

4. Диференціювання функції однієї змінної

71 – 80. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ даних функцій. В завданнях а), г) знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$71. \text{ а) } y = \sqrt{1 + \sin^2 2x};$$

$$\text{в) } \frac{y}{x} = e^y;$$

$$72. \text{ а) } y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 4};$$

$$\text{в) } y = \cos(x^2 + y);$$

$$73. \text{ а) } y = \ln \cos \frac{4}{x};$$

$$\text{в) } \sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0$$

$$74. \text{ а) } y = 2^{\operatorname{arccos} 2x};$$

$$\text{в) } y^2 = x \sin y;$$

$$75. \text{ а) } y = \sqrt{e^{4x} - e^{3x}};$$

$$\text{в) } x^2 + y^2 + xy = 0;$$

$$76. \text{ а) } y = 5^{\sin^2 x};$$

$$\text{в) } y + \sqrt{x} \ln y = 1;$$

$$\text{б) } y = x^{\operatorname{arccos} x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t^2 + t; \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = e^t; \\ y = e^{2t} \sin t. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = 5^t + 1; \\ y = 10^t - 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (2x + 3)^{\sqrt{x-1}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \ln(1 + t^2); \\ y = t + \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\ln 2x)^{\frac{x}{2}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = 2 \sin^2 t; \\ y = 4 \cos t. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{arcsin} x)^{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t^2 - 2t + 3; \\ y = t^4 - 4t - 5. \end{cases}$$

77. а) $y = x2^{x^2+2}$;

в) $y = \arcsin \sqrt{xy} + 2$;

78. а) $y = \ln^3(1-x)$;

в) $e^{xy} + \sqrt[3]{3x} + 4 = 0$;

79. а) $y = \arcsin \sqrt{1-e^{4x}}$;

в) $\operatorname{tg}(y-2x) + 2x = 10$;

80. а) $y = \log_4 \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$;

в) $2^y - 2^{x+y} + 3 = 0$;

б) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

г) $\begin{cases} x = 3 \sin t; \\ y = 6 \cos t. \end{cases}$

б) $y = (x+1)^{\cos x}$;

г) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \arccos t. \end{cases}$

б) $y = (\sin x)^{\ln x}$;

г) $\begin{cases} x = t^2 + 2t - 1; \\ y = t^3 - 3t + 2. \end{cases}$

б) $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2+1}$;

г) $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

5. Застосування похідних

81 – 90. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

81. $y = \sqrt{100-x^2}$, $[-6, 8]$.

82. $y = \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

83. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$, $[0, 1]$.

84. $y = 2 \sin x + \cos 2x$, $[0, \pi]$.

85. $y = x - \operatorname{arctg} x$, $[0, 1]$.

86. $y = x - \ln(1+x)$, $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

87. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$, $[0, 4]$.

88. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

89. $y = x^3 e^{-x}$, $[0, 1]$.

90. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0, 1]$.

91 – 100. Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік.

91. а) $y = \frac{x^3}{3} - 4x$;

б) $y = \frac{x}{1+x^2}$.

92. а) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$;

б) $y = x^3 e^{-3x}$.

93. а) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$;

б) $y = \frac{e^x}{x}$.

94. а) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$;

б) $y = x - \ln x$.

95. а) $y = 2 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}$;

б) $y = \frac{x}{2} - \arctg x$.

96. а) $y = x^4 - 2x^2 + 5$;

б) $y = 2x^2 - \ln x$.

97. а) $y = 5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}$;

б) $y = x^2 e^{-x}$.

98. а) $y = 2x^3 - 3x^2$;

б) $y = (x - 5)e^{-2x}$.

99. а) $y = 10 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;

б) $y = xe^{\frac{x^2}{2}}$.

100. а) $y = x - \frac{x^5}{5}$;

б) $y = \ln(9 + x^2)$.

101 – 100. Задачі на геометричне і фізичне застосування похідної.

101. Число 8 розбити на два таких доданка, щоб сума їх кубів була найменшою.

102. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R .

103. Потрібно виготовити ящик з кришкою, об'єм якого був би 72 см^3 , причому сторони основи відносилися б як $1 : 2$. Якими повинні були б бути розміри усіх сторін, щоб повна поверхня була б найменшою.

104. На вісі параболи $y^2 = 2px$ дана точка, відстань якої від вершини дорівнює a . Вказати абсцису x найближчої до неї точки кривої.

105. Відкритий чан має форму циліндра. При даному об'ємі V якими повинні бути радіус основи і висота циліндра, щоб його поверхня була найменшою?

106. Число 36 розложити на два таких множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

107. З кутів квадратного листа картону розміром $18 \times 18 \text{ см}^2$ потрібно вирізати однакові квадрати так, щоб з частини, що залишилася, можна було б склеїти прямокутну коробку найбільшої місткості. Якими повинні бути сторони квадратів, що вирізаються?
108. Через дану точку $P(1, 4)$ провести пряму так, щоб сума довжин додатніх відрізків, що відсікаються нею на координатних осях, була найменшою.
109. З усіх прямокутників, які мають дану площу S , знайти такий, периметр якого найбільший.
110. Прямокутний трикутник, який обертається навколо одного з своїх катетів, утворює конус. Знайти об'єм найбільшого з них, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 3 см.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

6. Функція багатьох змінних

111 – 120. Перевірити, що функція $u = u(x, y)$ задовольняє заданій умові.

$$111. u = 4x^2 + \sin y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$112. u = \ln(x^2 + y^2); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$113. u = e^{\frac{x^2}{y}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$114. u = \ln(e^x + e^y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

$$115. u = e^x (x \cos y - y \sin y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$116. u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$117. u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$118. u = \frac{x^2 y^2}{x + y}; \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$119. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

$$120. u = x^3 - 3xy^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

121 – 130. Для функції $u = u(x, y, z)$ знайти градієнт в точці M_0 і похідну в точці M_0 в напрямі вектора $\vec{S} = M_0 M_1$.

$$121. u = 5x^2y - 3xy + x^3; \quad M_0 (1; 2; -1), \quad M_1 (3; -1; 0).$$

$$122. u = \ln(x^2 + 3y - 2z^2); \quad M_0 (4; 2; 0), \quad M_1 (2; 1; 3).$$

$$123. u = \ln(3x - 4y^2 + 2z); \quad M_0 (1; 0; 3), \quad M_1 (2; -1; 4).$$

$$124. u = \ln(4xy + yz); \quad M_0 (3; -1; -1), \quad M_1 (2; 0; -3).$$

$$125. u = \ln(xz^2 - y + 3z); \quad M_0 (2; -2; 1), \quad M_1 (3; -4; 1).$$

$$126. u = xyz + 3yz + z^2 - 4x; \quad M_0 (1; 0; -2), \quad M_1 (-1; -2; -3).$$

$$127. u = \arctg \frac{x}{y+z}; \quad M_0 (1; 2; 3), \quad M_1 (2; 4; 5).$$

$$128. u = \arctg \frac{x^2 + yz}{x}; \quad M_0 (1; 1; 1), \quad M_1 (2; 0; 3).$$

$$129. u = \sqrt{2x^2 + y^2 + 3z^2}; \quad M_0 (1; 0; -1), \quad M_1 (-1; -2; 1).$$

$$130. u = \sqrt{x^2 + 3y^2 - z^2}; \quad M_0 (2; 3; 1), \quad M_1 (4; 0; -1).$$

131 – 140. Знайти найбільше і найменше значення функції в області.

$$131. D = \begin{cases} x \leq 4, & y \leq 4; \\ x + y \geq 7; \end{cases} \quad f(x, y) = xy.$$

$$132. D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \quad f(x, y) = x^2 - 4x + y^2.$$

$$133. D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq x; \end{cases} \quad f(x, y) = x^3 + y^3.$$

$$134. D = \begin{cases} x \leq 0, & y \leq 0; \\ x + 2y \geq -2; \end{cases} \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$135. D = \{(x, y); |x| \leq 1; |y| \leq 1\}; \quad f(x, y) = 10x^2 + 5y.$$

$$136. D = \begin{cases} 2x + y \leq 10; \\ y \geq 0; \\ y \leq x; \end{cases} \quad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

$$137. D = \begin{cases} y \leq x; \\ y \geq 0; \\ x \leq 2; \end{cases} \quad f(x, y) = x(y + 1).$$

$$138. D = \begin{cases} x + y \leq 5; \\ x \geq 1; \\ y \leq 1; \end{cases} \quad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

$$139. D = \begin{cases} x + y \geq 1; \\ x \leq 3, y \geq 3; \end{cases} \quad f(x, y) = x^2 - 2x + y^2.$$

$$140. D = \begin{cases} 0 \leq x \leq y; \\ y \leq 1; \end{cases} \quad f(x, y) = xy.$$

7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

7.1. Невизначений інтеграл

141 – 150. Знайти невизначений інтеграл.

$$141. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \quad \text{б) } \int x^2 e^{-x} dx;$$

$$\text{ в) } \int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 4}}.$$

$$142. \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}; \quad \text{б) } \int x \cos^2 x dx;$$

$$\text{ в) } \int \frac{(x^3 - 1) dx}{4x^3 - x}; \quad \text{г) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 8} dx}{x^4}.$$

$$143. \text{ а) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}; \quad \text{б) } \int x \arctg x dx;$$

$$\text{ в) } \int \frac{(x^2 - 3x + 2) dx}{x^3 + 2x + x}; \quad \text{г) } \int \frac{\sqrt{4 + x^2} dx}{x^6}.$$

144. a) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$;
 б) $\int x^2 \ln(1+x) dx$;
 в) $\int \frac{(x^3+1) dx}{x^3-x^2}$;
 г) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-3}}$.
145. a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;
 б) $\int x^3 e^{x^2} dx$;
 в) $\int \frac{dx}{x^3+x}$;
 г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.
146. a) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}$;
 б) $\int e^{3x} \cos x dx$;
 в) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;
 г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
147. a) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) \sqrt[3]{x}}$;
 б) $\int \sin \ln x dx$;
 в) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$;
 г) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.
148. a) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1} dx$;
 б) $\int \ln(x^2+1) dx$;
 в) $\int \frac{(x-2) dx}{x^2-7x+12}$;
 г) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}}$.
149. a) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$;
 б) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$;
 в) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$;
 г) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4} dx$.
150. a) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$;
 б) $\int (x^2+2x+3) \cos x dx$;
 в) $\int \frac{(x^4+1) dx}{x^3-x^2+x-1}$;
 г) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2-1)^3}}$.

7.2. Визначений інтеграл

151 – 160. Обчислити визначені інтеграли.

$$151. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x dx.$$

$$152. \text{ a) } \int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}};$$

$$\text{б) } \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$153. \text{ a) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}};$$

$$\text{б) } \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$154. \text{ a) } \int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$155. \text{ a) } \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3} \sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$156. \text{ a) } \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x \log_2 x dx.$$

$$157. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\cos x} \sin x dx;$$

$$\text{б) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

$$158. \text{ a) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$159. \text{ a) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 3 \sin x + 1) \cos x dx;$$

$$\text{б) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

$$160. \text{ a) } \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

161 – 170. Завдання для обчислення площі фігури і об'єму тіла обертання.

161. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 3x + 2$ і прямою $y = x + 2$.

162. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої параболою $y = \frac{x^2}{4}$ і $y = 3x - \frac{x^2}{2}$.

163. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = |\ln x|$ і прямою $y = 3$.

164. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ординат фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$ і прямою $y = 3 - x$.

165. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; $xy = 2$; $y = 2\sqrt{x}$.

166. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ординат фігури, яка обмежена параболою $y = 3x - x^2$, прямою $y = 3 - x$ і віссю абсцис.

167. Обчислити площу фігури, яка лініями $y = e^x$, $y = \ln x$ і прямими $x + y = 1$; $x = 3$.

168. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ординат фігури, яка обмежена лініями $x = \sqrt{2y}$, $x = \sqrt{y + 2}$ і віссю ординат.

169. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = x^3$, $y = x^2$ і прямими $x = -1$; $x = 1$.

170. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ординат фігури, яка обмежена лініями $xy = 5$ і прямими $y = 1$; $y = 5$; $x = 0$.

171 – 180. Обчислити невластний інтеграл або довести його розбіжність.

171. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$.

172. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$.

173. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}$.

174. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

175. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx$.

176. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

177.
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 7}.$$

179.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x + 4}.$$

178.
$$\int_0^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{x^3 + 3x + 7}.$$

180.
$$\int_0^{\infty} \frac{\arctg^2 x dx}{1 + x^2}.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

8. Звичайні диференціальні рівняння

181 – 190. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння 1-го порядку.

181.
$$xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right).$$

182.
$$y' + y \operatorname{ctg} x = e^{\cos x}.$$

183.
$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

184.
$$\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} y \partial x + \sec^2 y \cdot \operatorname{tg} x \partial y = 0.$$

185.
$$(xy^2 - y^2) \partial x - (x^2 y + x^2) \partial y = 0.$$

186.
$$xy' = \frac{3y^2 + 2xy}{2y + x}.$$

187.
$$(xy' - y) \sin \frac{y}{x} = x.$$

188.
$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

189.
$$x \partial x - 2y \partial y = 4xy (x \partial y - y \partial x).$$

190.
$$y' - \frac{3y}{x+1} = e^x (x+1)^3.$$

191 – 200. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння II - го порядку.

191.
$$y'' - 2y \operatorname{ctg} x = \sin^3 x.$$

192.
$$y'' x \ln x - y' = 0.$$

193.
$$2yy'' - y'^2 = 1.$$

194.
$$y''(1+y) = 5y'^2.$$

195.
$$xy'' + y' = x^2 + 1.$$

196.
$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

197.
$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$$

198.
$$xy'' + xy' = 2.$$

199.
$$y'' \operatorname{ctg} y + 2y'^2 = 0.$$

200.
$$xy'' - y' = x^2 e^x.$$

201 – 210. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам.

201.
$$2y'' - y' = 1; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

202.
$$y'' - 4y' = 96x^2; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

203.
$$y'' - 8y' + 16y = e^{2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

204.
$$y'' - 2y' + 5y = 5x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

205. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 206. $y'' - y' = 4e^x + 2e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 207. $y'' + 9y = -6\cos 3x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
 208. $y'' + y' = 4x + 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 209. $y'' - y' - 2y = -3e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
 210. $y'' + y' = 9x^2$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

9. Ряди

211 – 220. Дослідити збіжність числового ряду.

- | | |
|---|---|
| 211. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+1} \cdot n}$. | 212. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n-1}}$. |
| 213. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n+2}{5n-1} \right)^n$. | 214. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. |
| 215. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n-2)}{2^{n+1}}$. | 216. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-2}}{3n^2 - 1}$. |
| 217. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. | 218. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$. |
| 219. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \left(\frac{3n}{n+3} \right)^n$. | 220. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{3^{2n+1}}$. |

221 – 230. Дослідити абсолютну і умовну збіжність числового ряду.

- | | |
|--|---|
| 221. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$. | 222. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5n-1}$. |
| 223. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$. | 224. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$. |
| 225. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$. | 226. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2 + 5}$. |
| 227. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$. | 228. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n+2}}$. |
| 229. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}$. | 230. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+2}}{2n-1}$. |

231 – 240. Знайти область збіжності степеневого ряду.

$$231. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}.$$

$$232. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{2n}.$$

$$233. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n \cdot 4^n}.$$

$$234. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 \cdot 3n}.$$

$$235. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5x)^n}{n+2}.$$

$$236. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n3^{n+1}}.$$

$$237. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{5n}.$$

$$238. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{3n + \sqrt{n}}.$$

$$239. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

$$240. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot (2n^2+1)}.$$

10. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

10.1. Випадкові події. Класичне визначення ймовірності.

241. Гральну кістку підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що добуток очок, що випали, ділиться на 5.
242. Підкидаються дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, що випали, парна.
243. На п'яти картках написано по одній цифрі з набору 1, 2, 3, 4, 5. Навмання відбирають одну за другою дві картки. Яка ймовірність того, що число на другій картці буде більше, ніж на першій?
244. Слово "карета", що складається з букв-кубиків, розсипане на окремі букви, які потім складені в коробці; з коробки навмання виймають букви одну за другою. Яка ймовірність отримати таким чином слово карета?
245. Колода з 36 карт добре перемішана, тобто всі можливі розміщення карт рівноймовірні. Знайти ймовірність того, що чотири тузи будуть розміщені поряд.
246. Знайти ймовірність того, що при розміщенні десяти різних книг на полиці, три певні книги опиняться поряд.
247. Група, що складається з 8 чоловік, займає місця з одного боку прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що дві певні особи опиняться поряд, якщо: а) кількість місць – 8, б) кількість місць – 12.

248. До готелю під'їхав автомобіль. Вважаючи, що всі автомобілі мають чотиризначні номери від 00-00 до 99-99, знайти ймовірність того, що номер цього автомобіля має усі цифри різні.
249. В урні міститься 25 куль, серед яких 10 білих, 6 чорних і 9 червоних. Яка ймовірність того, що серед відібраних навмання 10 куль буде рівно 3 білих і 2 чорних?
250. 20 чоловік випадковим чином сідають за круглий стіл. З якою ймовірністю дві певні особи А і Б опиняться поряд.

10.2. Формули додавання та добутку ймовірностей

251. Три стрільця стріляють в ціль. Ймовірність влучення в ціль першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що: 1) всі три стрільця влучать в ціль; 2) всі троє промахнуться; 3) тільки один стрілець влучить в ціль; 4) хоча б один стрілець влучить в ціль.
252. Ймовірність влучення стрільцем у "десятку" дорівнює 0,7, а у "дев'ятку" – 0,3. Визначити ймовірність того, що даний стрілець при трьох пострілах набере не менше 29 очок.
253. З партії, у якій 20 деталей без дефектів і 5 з дефектами, навмання відбирають 3 деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) всі три деталі без дефектів; 2) хоча б одна з деталей без дефектів.
254. Студент прийшов на залік, вивчивши з 30 питань лише 24. Яка ймовірність скласти залік, якщо у разі відмови відповідати на поставлене питання, викладач дає можливість відповідати на ще одне питання.
255. Для ураження цілі достатньо влучення хоча б одного снаряда. Зроблено два залпи з двох гармат. Знайти ймовірність ураження цілі, якщо ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,3, а з другої – 0,4.
256. В урні містяться 12 білих і 8 червоних куль. Навмання виймають 8 куль. Яка ймовірність того, що: 1) три з них червоні; 2) червоних куль вийнято не більше трьох.
257. У ящику містяться 10 деталей, серед яких 3 стандартні. Знайти ймовірність того, що з п'яти навмання відібраних деталей стандартних буде не більше однієї.
258. У двох урнах містяться кулі, що відрізняються лише кольором, причому в першій урні – 5 білих куль, 11 чорних і 8 червоних, а в другій відповідно – 10, 8 і 6 куль. З обох урн навмання виймається по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі одного кольору?

259. Для повідомлення про пожежу у готелі встановлено 2 незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при пожежі спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,95; другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при пожежі надійде сигнал: а) хоча б від одного сигналізатора; б) тільки від одного сигналізатора.
260. Екзаменаційний білет містить 3 запитання. Ймовірність того, що студент дасть відповідь на перше і друге запитання, однакові та дорівнюють 0,8; на третє – 0,9. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти: а) на всі запитання; б) принаймні на 2 запитання.

10.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

261. У першому ящику 6 білих і 4 чорних кулі, у другому – 7 білих і 3 чорних. З кожного ящика навмання виймають по одній кулі, а потім з цих куль навмання взята одна куля. Знайти ймовірність того, що взята біла куля.
262. На двох станках виготовляють однакові деталі. Ймовірність того, що деталь стандартна, для першого станка дорівнює 0,8; для другого – 0,9. Продуктивність другого станка втричі більша, ніж першого. Знайти ймовірність того, що відібрана навмання деталь буде стандартною.
263. З коробки, що містить 10 білих і 5 чорних куль, загублено 2 кулі. Знайти ймовірність того, що навмання взята куля буде білого кольору.
264. На конференції по черзі проходять реєстрацію представники двох країн: України та Польщі. Відомо, що приїхало 10 делегатів з Польщі та 20 з України. З якою ймовірністю друга зареєстрована особа буде з Польщі.
265. З 18 стрільців 5 влучають у мішень з ймовірністю 0,8; 7 стрільців – з ймовірністю 0,7; 4 стрільця – з ймовірністю 0,6 і 2 стрільця – з ймовірністю 0,5. Навмання вибраний стрілець здійснив постріл, але у мішень не влучив. З якою ймовірністю він належить до останньої групи?
266. У групі 30 студентів, з яких 15 можуть відповісти на всі 50 запитань екзаменаційних білетів, 10 можуть відповісти на 40 запитань, 5 – на 30 запитань. Знайти ймовірність того, що визваний навмання студент знає відповідь на екзаменаційний білет, що складається з 2 запитань.
267. У місті є 20 готелів, з яких 10 готелів "п'ятизіркові", 6 – "чотиризіркові" і 4 – "тризіркові". Ймовірність того, що турист буде задоволений обслуговуванням у цих готелях, відповідно, дорівнює

- 0,9; 0,8; 0,7. Приїхавши до міста, турист обрав для зупинки перший готель, який йому зустрівся. З якою ймовірністю він зупинився у "п'ятизірковому" готелі, якщо відомо, що він був задоволений обслуговуванням?
268. Серед 30 екзаменаційних білетів – 20 "щасливих". Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність взяти "щасливий" білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?
269. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені, причому кожний із них робить один постріл. Ймовірність влучення у мішень для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого – 0,4. Після пострілів у мішені виявилась одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що у мішень влучив перший стрілець.
270. Прилад може працювати в двох режимах: 1) нормальному і 2) ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всієї роботи приладу; ненормальний – в 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t в нормальному режимі дорівнює 0,1; в ненормальному – 0,7. Знайти повну ймовірність виходу приладу з ладу за час t .

10.4. Повторювання випробувань

а) Формула Бернуллі

271. Ймовірність появи події A при одному випробуванні дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що при трьох незалежних випробуваннях подія A з'явиться: 1) не менше двох разів; 2) хоча б один раз.
272. Гральну кістку підкидають три рази. Знайти ймовірність того, що двічі з'явиться число очок, кратне трьом.
273. Подія B відбувається у тому випадку, якщо подія A з'явиться не менше ніж 4 рази. Знайти ймовірність появи події B , якщо буде зроблено п'ять незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює 0,5.
274. Випадково зустрінута особа може бути, з ймовірністю $p = 0,2$, брюнетом, з $p = 0,3$ - блондином, з $p = 0,4$ - шатеном і з $p = 0,1$ - рудим. Яка ймовірність того, що серед трьох випадково зустрінутих осіб: 1) не менше двох брюнетів; 2) один блондин і два шатени; 3) хоча б один рудий.
275. Ймовірність хоча б одного влучення при двох пострілах дорівнює 0,99. Знайти ймовірність трьох влучень при чотирьох пострілах.
276. В квартирі чотири електролампочки. Для кожної лампочки

ймовірність того, що вона залишиться зіпсованою протягом року, дорівнює $5/6$. Яка ймовірність того, що протягом року потрібно буде замінити не менше половини лампочок?

277. У ящику міститься по однаковій кількості деталей, виготовлених заводами №1 і №2. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання відібраних деталей, виготовлених заводом №1: 1) дві деталі; 2) менше двох деталей; 3) більше двох деталей.
278. Нехай ймовірність того, що телевізор потребує ремонту протягом гарантійного строку, дорівнює $0,2$. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного строку з трьох телевізорів: 1) не більше одного потребує ремонту; 2) хоча б один не потребує ремонту.
279. У ящику міститься кілька тисяч однакових запобіжників. Половина з них виготовлена 1-м заводом, решта – 2-м заводом. Навмання вийняли п'ять запобіжників. Чому дорівнює ймовірність того, що 1-м заводом з них виготовлені: 1) два запобіжники; 2) менше двох запобіжників; 3) більше двох запобіжників?
280. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб не стандартний, дорівнює $0,1$. Знайти ймовірність того, що: 1) з трьох перевірених виробів тільки один нестандартний; 2) нестандартний буде тільки третій по порядку перевірених виріб.

б) Локальна і інтегральна теореми Лапласа

281. Гральну кістку підкидають 500 разів. Яка ймовірність того, що цифра 1 при цьому випаде 50 разів?
282. Ймовірність отримання по лотереї безвиграшного білету дорівнює $0,1$. Яка ймовірність того, що серед 400 навмання куплених білетів не менше 50 і не більше 60 безвиграшних?
283. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 100 випадкових перехожих буде 32 жінки (припускається, що число чоловіків і жінок у місті однакове)?
284. Ймовірність появи події А в кожному з 100 незалежних випробувань дорівнює $0,8$. Знайти ймовірність того, що подія А з'явиться в цих випробуваннях: 1) рівно 90 разів?; 2) не менше 80 і не більше 90 разів.
285. Ймовірність одужання хворого внаслідок застосування нового засобу лікування дорівнює $0,3$. Скільки одужавших із 100 хворих можна очікувати з ймовірністю $0,075$?
286. Гральну кістку підкидають 320 разів. Яка ймовірність того, що цифра 5 при цьому випаде не менше 70 і не більше 83 разів?

287. Ймовірність того, що пасажир запізниться до відправлення поїзда, дорівнює 0,02. Знайти найбільш ймовірне число пасажирів, що запізнилися, з 625 пасажирів і ймовірність цієї події.
288. При проведенні експерименту монету підкидають 4095 разів, причому герб випав 2058 разів. З якою ймовірністю можна було очікувати цей результат?
289. Знайти ймовірність того, що в партії з 900 виробів число виробів вищого сорту знаходиться між 600 і 700. Ймовірність появи виробу вищого сорту в партії дорівнює 0,8.
290. Гральний кубик підкинули 125 разів. Яка ймовірність того, що цифра 8 з'явиться не більше 60 разів?

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

10.5. Випадкові величини. Числові характеристики і закони розподілу випадкової величини

10.5.1. Дискретна випадкова величина

291. Проводиться три незалежні випробування, в кожному з яких подія А відбувається з ймовірністю 0,6. Випадкова величина $X =$ (кількість появ події А в трьох випробуваннях). Необхідно:
- побудувати ряд розподілу величини X ;
 - знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
 - знайти $P(2 \leq X \leq 3)$.
292. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. На одному проміжку часу будь-який абонент незалежно один від одного може зробити виклик з ймовірністю 0,005. Знайти :
- перші сім членів ряду розподілу випадкової величини $X =$ (кількість викликів протягом даного проміжку часу);
 - математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
 - ймовірність того, що протягом даного часу буде не менше, ніж 2 виклики.
293. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі дорівнює 0,9. Стрільцеві видають патрони до тих пір, доки він не зробить промах. Необхідно знайти:
- ряд розподілу випадкової величини $X =$ (кількість патронів, що були

- видані стрільцеві);
- б) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
- в) ймовірність того, що стрілець одержить не більше 5 патронів, але й не менше 2 патронів.
294. Ймовірність того, що в бібліотеці є необхідна студенту книжка, дорівнює 0,4. Студент відвідує бібліотеки доти, доки не знайде необхідну книжку. Скласти закон розподілу кількості бібліотек, що відвідає студент, якщо в місті є 5 бібліотек. Також необхідно:
- а) знайти моду, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
- б) знайти ймовірність того, що студент відвідає не менше 4 бібліотек.
295. У партії 10 деталей, серед них - 4 стандартних. Навмання відбирають 5 деталей. Для випадкової величини X =(кількість стандартних деталей серед відібраних), необхідно:
- а) побудувати ряд розподілу;
- б) побудувати многокутник розподілу;
- в) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
- г) знайти ймовірність того, що серед відібраних буде не більше 2 стандартних деталей.
296. У готелі є 1000 номерів, у кожному з яких поставлено електронний замок. Ймовірність того, що електронний замок вийде з ладу протягом часу t дорівнює 0,002. Необхідно:
- а) побудувати ряд розподілу випадкової величини X = (кількість електронних замків, що вийшли з ладу протягом часу t);
- б) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
- в) знайти ймовірність того, що протягом даного часу вийдуть із ладу не більше трьох, але не менше двох замків.
297. Проводяться послідовні випробування приладів на надійність. Кожний наступний прилад випробується лише в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Вважаючи, що ймовірність витримати випробування для кожного з приладів дорівнює 0,8, необхідно:
- а) побудувати ряд розподілу, функцію розподілу та многокутник розподілу випадкової величини X = (кількість приладів, що випробовувались);
- б) знайти моду, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- в) знайти ймовірність того, що випробовувалось не менше 4 приладів.

298. В екзаменаційному білеті - 4 запитання, на кожне з яких студент може відповісти з ймовірністю 0,6. Необхідно:
- побудувати ряд розподілу випадкової величини $X =$ (кількість запитань екзаменаційного білету, на які студент може відповісти);
 - знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
 - знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти принаймні на 3 запитання.
299. Дві монети підкидають доти, доки на обох монетах не випаде "герб". Необхідно:
- скласти ряд розподілу випадкової величини $X =$ (кількість підкидань монет);
 - знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величини X ;
 - знайти ймовірність того, що буде зроблено не більше 4 підкидань, але й не менше 2.
300. З партії в 25 виробів, серед яких 6 пошкоджено, навмання виймають 3 вироби для перевірки на якість. Необхідно:
- побудувати ряд розподілу випадкової величини $X =$ (кількість пошкоджених виробів серед 3^x відібраних);
 - знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
 - знайти наймовірніше число пошкоджених виробів серед відібраних.

10.5.2. Неперервна випадкова величина. Нормальний розподіл

Задані математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X . Знайти:

- ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $|X - m|$ буде менше ніж δ ;
- ймовірність того, що X прийме значення, яке належить проміжку (α, β) .

301. $m = 15, \sigma = 2, \alpha = 16, \beta = 25, \delta = 4.$
 302. $m = 14, \sigma = 4, \alpha = 18, \beta = 34, \delta = 8.$
 303. $m = 13, \sigma = 4, \alpha = 15, \beta = 17, \delta = 6.$
 304. $m = 12, \sigma = 5, \alpha = 17, \beta = 22, \delta = 15.$
 305. $m = 11, \sigma = 3, \alpha = 17, \beta = 26, \delta = 12.$
 306. $m = 10, \sigma = 2, \alpha = 11, \beta = 13, \delta = 5.$
 307. $m = 9, \sigma = 4, \alpha = 15, \beta = 19, \delta = 18.$

308. $m = 8, \sigma = 2, \alpha = 6, \beta = 15, \delta = 8.$
 309. $m = 7, \sigma = 5, \alpha = 2, \beta = 22, \delta = 20.$
 310. $m = 6, \sigma = 3, \alpha = 0, \beta = 9, \delta = 9.$

**10.6. Основні поняття математичної статистики.
Точкові оцінки параметрів розподілу**

311 – 320. Нижче наведені дані про відсоток вільних місць у готелі, що досліджувалися протягом 100 днів. Використовуючи ці дані необхідно:

- 1) побудувати інтервальний варіаційний ряд з довжиною інтервалу 3%;
- 2) побудувати полігон частот і гістограму вибірки;
- 3) знайти вибіркочну середню, вибіркочну дисперсію та вибіркоче середнє квадратичне відхилення.

311.

17	15	15	15	14	23	23	19	14	16
20	14	2	19	16	12	16	13	16	20
10	9	9	15	18	17	30	18	11	17
29	13	16	10	13	16	14	14	21	14
13	18	16	0	14	11	14	7	20	7
22	21	11	15	12	24	23	17	4	25
19	6	19	15	18	13	14	11	22	15
17	13	17	14	26	23	20	9	19	12
21	16	15	12	28	14	12	13	14	15
4	13	17	8	7	11	11	15	17	18

312.

9	16	13	15	19	14	8	11	19	16
16	19	9	14	16	18	15	30	16	20
21	22	13	19	12	15	21	11	12	20
8	7	14	14	7	13	19	16	18	8
17	10	20	13	17	22	23	9	10	17
15	8	14	27	16	14	18	5	17	31
14	10	13	4	14	10	15	17	22	22
1	11	10	16	14	18	13	14	18	12
19	10	28	14	15	7	15	15	9	9
10	13	10	11	14	9	22	7	19	24

313.

29	19	8	3	10	16	14	16	14	22
6	0	26	12	21	23	19	11	6	19
9	17	11	14	22	26	16	13	21	15
21	9	18	12	15	23	8	26	24	3
11	13	20	19	8	18	11	9	21	22
30	18	15	14	15	7	22	10	10	13
12	6	11	12	15	6	20	18	3	28
14	16	12	3	19	14	1	11	14	14
10	8	15	15	10	5	16	26	11	11
17	22	8	7	17	11	20	13	21	4

314.

10	11	19	16	25	14	12	17	17	11
13	13	14	12	16	30	17	24	19	14
12	22	12	5	18	8	19	30	2	16
15	20	18	14	5	15	9	24	10	12
19	10	11	22	19	11	17	14	17	25
7	18	7	20	2	6	12	23	15	21
11	0	18	18	19	12	29	6	21	11
25	4	24	10	4	18	24	17	15	11
8	21	12	20	18	16	12	12	10	20
14	12	15	8	6	24	15	27	7	17

315.

7	2	20	8	21	13	6	12	12	9
8	21	15	14	23	7	10	26	14	21
15	10	9	1	17	7	21	15	14	20
13	3	19	10	10	5	12	13	20	6
16	17	13	15	12	12	11	22	9	27
9	17	24	10	9	14	11	18	10	12
22	23	14	21	21	30	18	10	7	19
10	18	18	16	13	0	4	13	9	18
7	17	18	13	18	17	19	14	13	9
15	21	9	8	19	19	29	15	15	22

316.

6	23	19	12	7	15	6	25	19	24
14	11	11	15	19	20	16	17	22	6
13	15	13	16	7	18	11	16	24	21
30	19	6	8	16	15	12	5	14	9
26	7	7	18	17	25	20	18	2	11
15	15	9	15	15	16	23	9	14	17
9	15	27	15	0	9	19	11	15	24
23	19	8	13	9	15	16	16	23	4
20	16	15	21	7	18	21	1	14	13
17	18	9	15	20	20	12	21	6	6

317.

15	18	17	18	14	6	13	20	18	23
16	14	13	14	21	16	17	2	19	12
25	18	16	15	11	13	18	11	6	15
11	6	13	12	11	13	16	0	15	11
14	12	11	8	16	19	25	17	8	20
19	16	21	5	15	22	20	10	23	18
18	12	14	16	18	10	27	15	10	15
18	7	21	19	4	17	14	14	10	16
11	15	11	20	13	18	15	19	6	3
15	10	21	18	16	11	16	7	11	30

318.

2	13	13	18	25	12	18	21	20	11
13	24	25	23	21	15	11	22	16	19
19	24	16	20	12	17	13	12	7	17
12	8	3	18	22	24	16	0	13	11
17	11	16	16	17	7	10	28	20	21
14	27	17	29	16	15	22	14	17	17
16	5	15	10	12	26	18	20	14	9
14	12	18	9	18	20	13	17	30	1
16	20	7	19	16	11	14	15	19	10
11	18	5	18	6	9	20	24	13	19

319.

26	11	19	10	16	15	22	22	6	11
12	17	14	2	23	17	21	4	20	13
19	16	14	24	12	16	24	12	11	9
22	13	15	11	1	12	24	10	27	15
20	14	9	16	23	10	17	8	15	21
30	14	18	14	5	12	16	9	16	24
15	19	23	18	22	18	0	17	12	14
13	20	18	8	17	13	19	29	20	13
13	19	11	12	21	12	14	19	15	20
6	20	13	14	18	14	13	21	19	12

320.

17	22	26	18	2	23	14	15	22	7
19	23	16	6	9	23	28	11	26	15
19	16	27	1	10	12	16	17	18	9
22	8	21	13	24	20	20	29	27	23
9	19	14	12	13	11	16	21	22	6
22	22	6	26	8	10	17	12	0	12
19	11	30	9	12	15	16	9	18	12
27	11	25	18	10	18	7	11	17	17
24	15	12	16	16	13	17	12	13	17
17	21	18	13	14	21	18	12	16	4

10.7. Елементи теорії кореляції. Лінійна кореляція.

321 – 330. Знайти вибіркве рівняння прямої $\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$ регресії

Y на X по даній кореляційній таблиці.

321.

Y	X						n _y
	5	10	15	20	25	30	
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n _x	2	10	6	64	15	3	n=100

322.

Y	X						n_y
	15	20	25	30	35	40	
30	2	6					8
40		4	4				8
50			7	35	8		50
60			2	10	8		20
70				5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	$n=100$

323.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
5	4	2					6
10		6	4				10
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	$n=100$

324.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	$n=100$

325.

Y	X						n_y
	11	16	21	26	31	36	
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	$n=100$

326.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
8	2	4					6
12		3	7				10
16			5	30	10		45
20			7	10	8		25
24				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n=100$

327.

Y	X						n_y
	11	16	21	26	31	36	
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

328.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	$n=100$

329.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
8	3	3					6
18		5	4				9
28			40	2	8		50
38			5	10	6		21
48				4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n=100$

330.

Y	X						
	2	7	12	17	22	27	n_y
11	2	5					7
21		5	3				8
31			6	45	3		54
41			2	8	7		17
51				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	$n=100$

11. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

11.1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса-Жордана

331 – 340. Дослідити і розв'язати у випадку сумісності наступні системи рівнянь, використовуючи таблиці Гауса.

$$331. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$$

$$332. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$$

$$333. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

$$334. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4. \end{cases}$$

335.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 = 84, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 6, \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 = 27. \end{cases}$$

$$336. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

$$337. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 6x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 17, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases}$$

$$338. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8, \end{cases}$$

$$339. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 = 24, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

$$340. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

11.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

341 – 360. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом.

а)

$$341. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = 7x_1 + 6x_2 \quad (\max).$$

$$343. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ x_1 + 4x_2 \geq 27, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = 3x_1 - 2x_2 \quad (\min).$$

$$345. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$z = -5x_1 + 2x_2 \quad (\min).$$

$$342. \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 \quad (\max).$$

$$344. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 26, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = x_1 + 2x_2 \quad (\max).$$

$$346. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = 5x_1 - 3x_2 \quad (\min).$$

$$347. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 3. \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\text{max}).$$

$$349. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + x_2 \quad (\text{max}).$$

$$348. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 5x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 + 5x_2 \geq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$z = 7x_1 - x_2 \quad (\text{min}).$$

$$350. \begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 10x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$z = -7x_1 - 2x_2 \quad (\text{min}).$$

б)

$$351. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 4x_1 - x_2 \geq -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = -6x_1 + x_2 \quad (\text{min}).$$

$$352. \begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \quad (\text{min}).$$

$$353. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 2x_2 \quad (\text{max}).$$

$$354. \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2, \end{cases}$$

$$z = x_1 + 3x_2 \quad (\text{min}).$$

$$355. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \geq 15, \\ -3x_1 - 4x_2 \leq 1, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 40, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = -5x_1 - 3x_2 \quad (\max).$$

$$357. \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = x_1 - x_2 \quad (\min).$$

$$359. \begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \quad (\min).$$

$$356. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 \quad (\max).$$

$$358. \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 - 2x_2 \quad (\max).$$

$$360. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -5x_1 + x_2 \leq 0, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \quad (\max).$$

11.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

361 – 370. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом.

$$361. \begin{cases} 3x_1 + 17x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$$z = 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \quad (\min).$$

$$362. \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 13x_1 + 2x_2 \leq 26, \\ 2x_1 - 13x_2 \geq -26, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = 4x_1 - 3x_2 \quad (\max).$$

$$363. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -7, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad (\max).$$

$$365. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 1, \\ -4x_1 - 12x_2 + x_3 - 4x_4 \leq -1, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5} \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \quad (\min).$$

$$367. \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ 6x_2 + x_3 = 9, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 8x_2 + x_3 - 2x_4 \quad (\min).$$

$$369. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max).$$

$$364. \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_3 \quad (\min).$$

$$366. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 = -20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \end{cases}$$

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (\max).$$

$$368. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 7, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \end{cases}$$

$$z = 5x_1 - x_2 + x_3 \quad (\min).$$

$$370. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 30, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -12, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$$z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 \quad (\max).$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 8

11.4. Двоїста задача

371–380. Записати до даної задачі двоїсту задачу і, розв'язавши симплексним методом одну задачу, знайти розв'язок двоїстої до неї.

$$371. \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -4, \\ -5x_1 + x_3 \geq -12, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -4, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \end{cases}$$
$$z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \quad (\max).$$

$$373. \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 102, \\ -2x_1 - 5x_2 \geq -80, \\ x_1 + 5x_2 \leq 75, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = 3x_1 + 10x_2 \quad (\max).$$

$$375. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = 18x_1 + 4x_2 + x_3 \quad (\min).$$

$$377. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq -7, \\ 2x_1 + 10x_2 \leq 23, \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + 2x_2 \quad (\max).$$

$$379. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -3x_1 - x_2 \leq -3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + 4x_2 \quad (\min).$$

$$372. \begin{cases} 20x_1 + 7x_2 - 3x_3 \geq 1, \\ 15x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \end{cases}$$
$$z = 120x_1 + 42x_2 + 8x_3 \quad (\min).$$

$$374. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -3x_1 - x_2 \leq -3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + 4x_2 \quad (\min).$$

$$376. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \geq 27, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 28, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = 2x_1 + 5x_2 \quad (\min).$$

$$378. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 2, \\ 14x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq -6, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \end{cases}$$
$$z = 50x_1 + 45x_2 + 8x_3 \quad (\min).$$

$$380. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -2x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 - 2x_2 \quad (\min).$$

11.5. Теореми двоїстості

381 – 390. Записати до задачі 11.2. двоїсту задачу і знайти її розв'язок, використовуючи раніше знайдений розв'язок задачі 11.2. і теореми двоїстості.

11.6. Транспортна задача

391 – 400. На три станції A_1, A_2, A_3 надійшов деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом замовникам B_1, B_2, B_3, B_4 . Потреби замовників (в умовних одиницях), кількість вантажів на кожній станції (у тих же одиницях), і тарифи (вартість перевезення одиниці вантажу з даної станції даному замовнику) вказані в таблиці.

Потрібно спланувати перевезення так, щоб загальна сума вартості перевезень була б найменшою.

391.

Пункт призначення \ Пункт відправлення	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	7	4	15	9	120
A_2	11	2	7	3	80
A_3	4	5	12	8	100
Потреби	85	65	90	60	300

392.

Пункт призначення \ Пункт відправлення	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	2	10	15	14	130
A_2	3	7	12	3	170
A_3	21	18	6	13	20
Потреби	100	90	160	150	500

393.

Пункт призначення / Пункт відправлення	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	Запаси
А ₁	14	8	17	5	90
А ₂	21	10	7	11	180
А ₃	3	5	8	4	130
Потреби	70	120	105	105	400

394.

Пункт призначення / Пункт відправлення	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	Запаси
А ₁	12	9	7	11	105
А ₂	4	3	12	2	165
А ₃	5	17	9	4	180
Потреби	90	120	110	130	450

395.

Пункт призначення / Пункт відправлення	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	Запаси
А ₁	3	8	7	11	160
А ₂	14	3	1	8	400
А ₃	9	5	16	7	240
Потреби	180	200	190	230	800

396.

Пункт призначення / Пункт відправлення	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	Запаси
А ₁	2	4	11	5	250
А ₂	8	7	13	7	180
А ₃	14	10	5	8	270
Потреби	120	230	190	160	700

397.

Пункт призначення / Пункт відправлення	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Запаси
A ₁	21	18	14	3	350
A ₂	7	11	10	5	450
A ₃	4	8	16	7	400
Потреби	300	280	330	290	1200

398.

Пункт призначення / Пункт відправлення	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Запаси
A ₁	3	10	11	15	560
A ₂	22	11	4	2	420
A ₃	8	1	7	15	520
Потреби	300	380	450	370	1500

399.

Пункт призначення / Пункт відправлення	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Запаси
A ₁	11	4	15	7	250
A ₂	20	9	7	14	350
A ₃	18	9	3	8	300
Потреби	180	220	230	270	900

400.

Пункт призначення / Пункт відправлення	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Запаси
A ₁	1	4	5	11	300
A ₂	12	8	3	14	320
A ₃	10	15	7	9	380
Потреби	250	200	290	250	1000

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.И. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1980. – 190 с.
2. Ефимов Л.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1972. – 272 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука. - Т.1. - 1985. – 429 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука. – Т. 2. - 1985. – 560 с.
5. Дубовик В.Н., Юрик І.І. Вища математика. - К.: Вища школа, 1993. – 648с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.:Высшая школа, 1997. - 450 с.
7. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. - Л.: Світ, 1995. - 214 с.
8. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. - К: Вища школа, 1979. - 454 с.
9. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. - М.: Наука, 1967. - 312 с.
10. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966. - 460 с.
11. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Х.: Госуниверситет, 1967. - 946 с.
12. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1975. – 333 с.
13. Калихман И.А. Сборник задач по линейной алгебре и математическому программированию. - М.: Высшая школа, 1969. - 158 с.