МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З ЕЛЕМЕНТІВ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
для студентів економічних спеціальностей

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 7 від 29.01.2003 р.

Черкаси, ЧДТУ, 2003

Методичні вказівки до розрахунково-графічних завдань з елементів лінійної алгебри і аналітичної геометрії (Укл. Дискант В.І., Грижук О.П., Півненко С.І., Кондратьєва О.М.– Черкаси: ЧДТУ, 2003.)

Укладачі:	**Діскант В.І.**
	Грижук О.П.
	Півненко С.І.
	Кондратьєва О. М.
Відповідальний редактор	**Дідковський Р.М.**
Рецензент	**Ламзіна Т.Б.**

ЗМІСТ

Передмова

Важливим фактором засвоєння математики і оволодіння її методами являється самостійна робота студентів. Дані методичні вказівки мають своєю метою активізувати самостійну роботу студентів і сприяти більш глибокому засвоєнню розділу математики "Лінійна алгебра та елементи аналітичної геометрії".

Методичні вказівки для розрахунково-графічних завдань з елементів лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів економічних спеціальностей складаються з 12 параграфів. Кожний параграф має таку структуру:

1) наведені посилання на відповідну учбову літературу;
2) зразки розв'язання типових задач;
3) розрахункові завдання.

Кожна задача має 30 варіантів.

Підібрані для самостійної роботи задачі дають можливість відпрацьовувати техніку розв'язання основних типів задач з лінійної алгебри та елементів аналітичної геометрії.

Завдання, розміщені в даних методичних вказівках можуть бути використані також для проведення практичних занять та для оцінювання знань по кредитно-модульній системі.

Методичні вказівки рекомендовані для використання студентам економічних спеціальностей.

§ 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язування матричних рівнянь. Правило Крамера.

Основні поняття і теореми [5, с. 25-27, 66, 67].

Зразки розв’язування задач

Задача.

Розв’язати систему лінійних рівнянь двома способами:

а) за правилом Крамера;

б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 - \ x_3 = 5, \\ \ x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв’язання.

а) Обчислимо детермінант матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

маємо

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

Так як визначник системи $\Delta = -9 \neq 0$, то система має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}\,;\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}\,;\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

В цьому прикладі маємо

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9\,; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18\,;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

б) Дана система рівносильна наступному матричному рівнянню

$$AX = B, \text{ де}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи можна знайти за формулою

$X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1}– обернена до *A* матриця,що має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Так як $|A| = \Delta = -9 \neq 0,$ то матриця A має обернену.

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до A.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ Звідси $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь двома способами:

а) за правилом Крамера;

б) матричним способом.

1.1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 17, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -22. \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 14, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 13. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

1.14 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 16, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 14. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

1.16 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

1.17 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

1.19 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$

1.21 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ 1.25. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ 1.28. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 37. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ 1.29 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 = -7, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 15, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

§ 2. Лінійний простір.

Основні поняття і теореми [5, ст. 40 – 43].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Перевірити, чи є лінійним простором множина L квадратичних матриць 2-го порядку з дійсними елементами, якщо за операції додавання елементів і множення числа на елемент цієї множини взяти операції додавання матриць і множення матриці на число.

Розв'язання.

Нехай

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}, \qquad \vec{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} -$$

довільні матриці цієї множини. Тоді

$$\vec{X} + \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix},$$

$$\lambda \vec{X} = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix}, \text{ де } \lambda \in R.$$

Перевіримо виконання аксіом 1 – 8. Для операцій додавання матриць $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ мають місце такі властивості:

1. $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$.
2. $\vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) = (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z}$.

Справді:

1. $\vec{X} + \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix},$

$$\vec{Y} + \vec{X} = \begin{pmatrix} y_{11} + x_{11} & y_{12} + x_{12} \\ y_{21} + x_{21} & y_{22} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix},$$

тобто $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$.

2. $\vec{X} + \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y} + \vec{Z} = \begin{pmatrix} y_{11} + z_{11} & y_{12} + z_{12} \\ y_{21} + z_{21} & y_{22} + z_{22} \end{pmatrix},$

$$(\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} + z_{11} & x_{12} + y_{12} + z_{12} \\ x_{21} + y_{21} + z_{21} & x_{22} + y_{22} + z_{22} \end{pmatrix},$$

$$\vec{X}+\left(\vec{Y}+\vec{Z}\right)=\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11}+z_{11} & x_{12}+y_{12}+z_{12} \\ x_{21}+y_{21}+z_{21} & x_{22}+y_{22}+z_{22} \end{pmatrix}.$$

Отже, $\left(\vec{X}+\vec{Y}\right)+\vec{Z}=\vec{X}+\left(\vec{Y}+\vec{Z}\right)$. Це означає, що для елементів даної множини виконується перша і друга аксіоми означення лінійного простору.

3. Нульовим вектором є $\vec{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Дійсно

$$\vec{X}+\vec{O}=\begin{pmatrix} x_{11}+0 & x_{12}+0 \\ x_{21}+0 & x_{22}+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\vec{X}.$$

Це означає виконання для L третьої аксіоми означення лінійного простору.

4. Вектор $\vec{X}'=\begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{12} \\ -x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix}$ є протилежним вектору $\vec{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$,

оскільки $\vec{X}+\vec{X}'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{12} \\ -x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\vec{O}$.

Це означає виконання для L четвертої аксіоми означення лінійного простору.

5. $1\cdot\vec{X}=\begin{pmatrix} 1\cdot x_{11} & 1\cdot x_{12} \\ 1\cdot x_{21} & 1\cdot x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\vec{X}$.

6. $\lambda\left(\mu\vec{X}\right)=\lambda\begin{pmatrix} \mu x_{11} & \mu x_{12} \\ \mu x_{21} & \mu x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\mu x_{11} & \lambda\mu x_{12} \\ \lambda\mu x_{21} & \lambda\mu x_{22} \end{pmatrix}=(\lambda\mu)\vec{X}$.

7. $(\lambda+\mu)\vec{X}=\begin{pmatrix} (\lambda+\mu)x_{11} & (\lambda+\mu)x_{12} \\ (\lambda+\mu)x_{21} & (\lambda+\mu)x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mu x_{11} & \mu x_{12} \\ \mu x_{21} & \mu x_{22} \end{pmatrix}=$

$=\lambda\vec{X}+\mu\vec{Y}$.

8. $\lambda\left(\vec{X}+\vec{Y}\right)=\lambda\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\,(x_{11}+y_{11}) & \lambda\,(x_{12}+y_{12}) \\ \lambda\,(x_{21}+y_{21}) & \lambda\,(x_{22}+y_{22}) \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda y_{11} & \lambda y_{12} \\ \lambda y_{21} & \lambda y_{22} \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}=\lambda\vec{X}+\lambda\vec{Y}$.

Це означає, що для елементів даної множини виконуються п’ята, шоста, сьома і восьма аксіоми означення лінійного простору.

Отже, множина L квадратних матриць 2-го порядку є лінійним простором.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 2.

Визначити, чи утворює лінійний простір множина елементів, заданих в умові задачі.

2.1. Множина R_2 всіх упорядкованих пар дійсних чисел $\vec{x}(\alpha_1;\alpha_2)$ з операціями:

а) якщо $\vec{x}=(\alpha_1;\alpha_2)$ і $\vec{y}=(\beta_1;\beta_2)$, то $\vec{x}+\vec{y}=(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2)$;

б) для довільного дійсного числа λ, $\lambda\vec{x}=(\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2)$.

2.2. Множина дійсних чисел зі звичайними операціями додавання та множення.

2.3. Множина S' всіх нескінчених послідовностей дійсних чисел $\vec{x}=(\alpha_1;\alpha_2;..;\alpha_n;...)$. В S' введені операції:

а) якщо $\vec{x}=(\alpha_1;\alpha_2;..;\alpha_n;...)$ і $\vec{y}=(\beta_1;\beta_2;..;\beta_n;..)$, то $\vec{x}+\vec{y}=(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2;..;\alpha_n+\beta_n;...)$;

б) для довільного дійсного числа λ, $\lambda\vec{x}=(\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2;..;\lambda\alpha_n;...)$.

2.4. Множина R^+ додатніх дійсних чисел, в якій операції додавання і множення на число означені таким чином:

а) сума двох елементів $\vec{x}=x$ і $\vec{y}=y$ цієї множини дорівнює добутку цих дійсних чисел xy;

б) добуток елемента $\vec{x}$ на дійсне число λ визначимо як піднесення дійсного додатнього числа x до степеня λ.

2.5. Множина матриць-рядків довжини n з операціями додавання і множення на число для матриць.

2.6. Множина матриць-стовпчиків висоти n з операціями додавання і множення на число для матриць.

2.7. Множина прямокутних матриць $m\times n$, якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

2.8. Множина всіх квадратних матриць порядку n, якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

2.9. Множина всіх діагональних матриць $A=\|a_{ik}\|, B=\|b_{ik}\|$ однакового розміру $n\times n$, якщо за операцію суми на цій множині взяти добуток матриць – AB, а добуток A на число λ дорівнює λA.

2.10. Множина функцій $f(t)=a_1e^t+a_2e^{2t}+\ldots+a_ne^{nt}$, де a_1, a_2, a_n – довільні дійсні числа з природно введеними операціями додавання функцій і множення функції на число.

2.11. Множина $P_2(t)$ всіх багаточленів 2-го степеня $P_2(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$ з природно введеними операціями додавання багаточленів і множення їх на число.

2.12. Множина функцій $f(t) = ae^{t} + be^{-t}$ з природно введеними операціями додавання функцій і множення функції на число.
2.13. Множина всіх парних функцій $u = f(t), v = g(t)$, заданих на відрізку $[-t, t]$, якщо сума *f(t)* і *g(t)* дорівнює *f(t)·g(t)*, а добуток α на *f(t)* дорівнює $\alpha f(t)$.
2.14. Множина всіх лінійних функцій $u = f(x, y), v = g(x, y)$, якщо сума $f(x, y)$ і $g(x, y)$ дорівнює $f(x, y) + g(x, y)$, а добуток α на $f(x, y)$ дорівнює $\alpha f(x, y)$.
2.15. Множина $C_{[a,b]}$ усіх функцій *x=x(t)*, означених і неперервних на відрізку $a \le t \le b$, із звичайними операціями додавання двох функцій і множення функції на дійсне число.
2.16. Множина всіх функцій інтегрованих на відрізку $[a, b]$, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
2.17. Множина всіх функцій диференційованих на відрізку $[a, b]$, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
2.18. Множина тригонометричних багаточленів порядку $\le n$, тобто множина функцій, що мають вигляд:

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
2.19. Множина функцій вигляду

$$f(t) = e^{\alpha t}(a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

де α - фіксоване дійсне число, з природно введеними операціями додавання функцій і множення їх на число.
2.20. Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

2.21. Множина V_0, яка складається з одного елемента θ. Операції в V_0 означені таким чином: $\theta + \theta = \theta$, $\lambda\theta = \theta$.
2.22. Множина всіх збіжних послідовностей, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
2.23. Множина всіх розбіжних послідовностей, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

Перевірити чи є лінійним простором множини векторів на площині із звичайними операціями додавання векторів і множення вектора на число (вважається, що початок кожного вектора співпадає з початком координат):
2.24. Усі вектори, кінці яких лежать на даній прямій.
2.25. Усі вектори, кінці яких лежать в першій чверті системи координат.
2.26. Усі вектори, кінці яких лежать в першій, або в другій чверті.
2.27. Усі вектори, кінці яких лежать в першій, або в третій чверті.

2.28. Усі вектори, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 = 0$.

2.29. Усі вектори, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 = 1$.

2.30. Усі вектори, кінці яких лежать в першій, або в четвертій чверті.

§ 3. Ранг матриці.

Основні поняття і теореми [5, с. 61 – 64].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Обчислити ранг матриці.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Виконуємо такі елементарні перетворення матриці A. Переставивши місцями 1-й і 3-й стовпці матриці A, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до елементів 2-го рядка елементи 1-го рядка, а до 3-го елементи 1-го рядка, помножені на (–5). Тоді маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Додаючи до 3-го рядка елементи 2-го, помножені на 3, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здобули трапецієподібну матрицю, для якої $l=2$. Отже, $r(A)=2$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 3.

Знайти ранг матриці.

3.1. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 3.2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 12 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 3.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3.4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 3.5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 3.6. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3.7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 3.8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 3.9. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3.10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 3.11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 3.12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

3.13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 3.14. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3.15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3.16. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -7 & -1 & -3 \\ 10 & -18 & 2 & -23 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 3.17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3.18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 12 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

3.19. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 9 \\ 5 & -7 & 0 & 10 & -9 \end{pmatrix}$ 3.20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 3.21. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 3.23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3.24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3.25. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{pmatrix}$ 3.26. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ 3.27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

3.28. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 3.29. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ 3.30. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

§ 4. Лінійна залежність векторів.

Основні поняття і теореми [5, ст. 35 – 36].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Дослідити на лінійну залежність систему векторів:

$$\vec{a}(2;5;6;3),\vec{b}(-1;2;3;4),\vec{c}(1;3;5;2).$$

Розв'язання.

Складемо матрицю A з координат даних векторів

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, в якій елементи першого рядка – координати вектора $\vec{a}$, другого – координати вектора $\vec{b}$, третього – координати вектора $\vec{c}$.

Знайдемо ранг цієї матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Маємо $rang\ A=3$, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – лінійно незалежні.

Так як ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, як вектори лінійного простору L_4 лінійно незалежні.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 4.

Дослідити на лінійну залежність систему векторів.

4.1.	$\vec{a}$ (2;3;1;1),	$\vec{b}$ (-1;0;-1;2),	$\vec{c}$ (2;2;2;-1).
4.2.	$\vec{a}$ (3;2;1;4),	$\vec{b}$ (2;3;4;1),	$\vec{c}$ (3;1;-1;4).
4.3.	$\vec{a}$ (1;5;2;3),	$\vec{b}$ (-1;1;-1;0),	$\vec{c}$ (1;1;1;-1).
4.4.	$\vec{a}$ (1;-1;-3;1),	$\vec{b}$ (3;2;1;4),	$\vec{c}$ (2;3;4;2).
4.5.	$\vec{a}$ (3;3;1;5),	$\vec{b}$ (1;-2;1;3),	$\vec{c}$ (1;1;1;3).
4.6.	$\vec{a}$ (3;1;-1;3),	$\vec{b}$ (-2;-1;0;1),	$\vec{c}$ (5;2;-1;2).
4.7.	$\vec{a}$ (4;3;1;1),	$\vec{b}$ (1;-2;1;-1),	$\vec{c}$ (2;2;2;1).
4.8.	$\vec{a}$ (4;3;2;1),	$\vec{b}$ (6;7;4;1),	$\vec{c}$ (2;0;-1;1).
4.9.	$\vec{a}$ (3;2;1;-1),	$\vec{b}$ (1;-3;-7;1),	$\vec{c}$ (1;2;3;3).
4.10.	$\vec{a}$ (3;7;2;1)	$\vec{b}$ (-2;0;-1;2),	$\vec{c}$ (2;2;1;2).
4.11.	$\vec{a}$ (1;-2;6;1),	$\vec{b}$ (1;0;1;3),	$\vec{c}$ (2;-6;17;4).
4.12.	$\vec{a}$ (6;3;4;3),	$\vec{b}$ (-1;-2;-1;2),	$\vec{c}$ (2;1;2;2).
4.13.	$\vec{a}$ (7;3;4;1),	$\vec{b}$ (-1;-2;-1;3),	$\vec{c}$ (4;2;4;1).
4.14 .	$\vec{a}$ (2;3;2;-1),	$\vec{b}$ (4;7;5;2),	$\vec{c}$ (2;0;-1;2).
4.15 .	$\vec{a}$ (5;3;4;3),	$\vec{b}$ (-1;0;-1;1),	$\vec{c}$ (4;2;4;1).
4.16.	$\vec{a}$ (3;10;5;-1),	$\vec{b}$ (-2;-3;-2;1),	$\vec{c}$ (2;4;1;1).
4.17.	$\vec{a}$ (-2;-4;-3;1),	$\vec{b}$ (4;3;1;-1),	$\vec{c}$ (1;6;7;4).
4.18.	$\vec{a}$ (3;1;-1;2),	$\vec{b}$ (1;0;-1;2),	$\vec{c}$ (8;3;-2;1).
4.19.	$\vec{a}$ (4;2;2;1),	$\vec{b}$ (-3;-3;-3;1),	$\vec{c}$ (2;1;2;1).
4.20.	$\vec{a}$ (4;1;2;-1),	$\vec{b}$ (9;2;5;4),	$\vec{c}$ (1;-1;1;-1).
4.21.	$\vec{a}$ (5;3;4;1),	$\vec{b}$ (4;3;3;1),	$\vec{c}$ (9;5;8;2).
4.22.	$\vec{a}$ (3;4;2;2),	$\vec{b}$ (1;1;0;1),	$\vec{c}$ (8;11;6;1).
4.23.	$\vec{a}$ (4;-1;-6;1),	$\vec{b}$ (1;-2;-7;3),	$\vec{c}$ (2;-1;-4;2).
4.24.	$\vec{a}$ (3;1;0;1),	$\vec{b}$ (-5;-4;-5;2),	$\vec{c}$ (4;2;4;1).
4.25.	$\vec{a}$ (3;0;3;2),	$\vec{b}$ (8;1;6;-1),	$\vec{c}$ (1;1;-1;2).
4.26.	$\vec{a}$ (1;-1;4;2),	$\vec{b}$ (1;0;3;1),	$\vec{c}$ (1;-3;8;2).
4.27.	$\vec{a}$ (6;3;4;2),	$\vec{b}$ (-1;-2;-1;4),	$\vec{c}$ (2;1;2;-1).
4.28.	$\vec{a}$ (4;1;1;3),	$\vec{b}$ (-9;-4;-9;1),	$\vec{c}$ (6;2;6;3).
4.29.	$\vec{a}$ (-3;3;3;5),	$\vec{b}$ (-4;7;6;3),	$\vec{c}$ (3;0;-1;2).
4.30.	$\vec{a}$ (-7;10;-5;9),	$\vec{b}$ (0;-2;-1;0),	$\vec{c}$ (-2;4;-1;1).

§5. Базис. Координати вектора.

Основні поняття і теореми [5, ст. 45 – 47].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис в L_3 і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі:

$$\vec{e}_1 = (2;1;7), \vec{e}_2 = (1;-2;1), \vec{e}_3 = (-1;2;-2), \vec{x} = (5;-5;12).$$

Розв'язання.

Покажемо, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійно незалежні. Складемо матрицю *A*, елементами якої будуть координати векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ранг матриці *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо $rang\, A = 3$, отже вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійно незалежні.

Будь-які три лінійно незалежні вектори утворюють в базис. Знайдемо координати $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ вектора $\vec{x}$ цьому базисі.

Маємо

$$\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3,$$

або

$$(5,-5,12) = \alpha(2,1,7) + \beta(1,-2,1) + \gamma(-1,2,-2).$$

Звідки $\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta - \gamma, \\ -5 = \alpha - 2\beta + 2\gamma, \\ 12 = 7\alpha + \beta - 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 5 \\ \alpha - 2\beta + 2\gamma = -5, \\ 7\alpha + \beta - 2\gamma = 12. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему матричним способом, або по формулах Крамера, знаходимо $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = -2$.

Отже, $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 5.

Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис в L_3 і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

5.1. $\vec{e}_1$=(1,2,1), $\vec{e}_2$=(-2,3,3), $\vec{e}_3$=(-1,-9,-5), $\vec{x}$=(1,2,2).
5.2. $\vec{e}_1$=(2,7,6), $\vec{e}_2$=(-4,1,7), $\vec{e}_3$=(9,-1,3), $\vec{x}$=(22,-3,-1).
5.3. $\vec{e}_1$=(2,1,3), $\vec{e}_2$=(1,-1,4), $\vec{e}_3$=(-1,7,5), $\vec{x}$=(2,7,12).
5.4. $\vec{e}_1$=(1,1,1), $\vec{e}_2$=(1,2,-3), $\vec{e}_3$=(-1,3,2), $\vec{x}$=(-1,17,3).
5.5. $\vec{e}_1$=(4,3,2), $\vec{e}_2$=(3,2,1), $\vec{e}_3$=(2,1,5), $\vec{x}$=(2,3,-2).
5.6. $\vec{e}_1$=(5,7,1), $\vec{e}_2$=(3,5,7), $\vec{e}_3$=(7,1,3), $\vec{x}$=(0,8,-8).
5.7. $\vec{e}_1$=(1,2,-1), $\vec{e}_2$=(-1,-3,3), $\vec{e}_3$=(-1,3,-1), $\vec{x}$=(-1,2,1).
5.8. $\vec{e}_1$=(-3,4,-1), $\vec{e}_2$=(1,1,4), $\vec{e}_3$=(6,5,3), $\vec{x}$=(6,5,3).
5.9. $\vec{e}_1$=(2,1,5), $\vec{e}_2$=(1,-1,2), $\vec{e}_3$=(-1,1,2), $\vec{x}$=(2,1,-1).
5.10. $\vec{e}_1$=(1,3,-1), $\vec{e}_2$=(1,-1,2), $\vec{e}_3$=(1,2,3), $\vec{x}$=(4,3,6).
5.11. $\vec{e}_1$=(1,-1,2), $\vec{e}_2$=(2,-2,1), $\vec{e}_3$=(-3,1,1), $\vec{x}$=(4,-4,5).
5.12. $\vec{e}_1$=(1,-2,1), $\vec{e}_2$=(2,3,4), $\vec{e}_3$=(3,4,-3), $\vec{x}$=(-2,-8,8).
5.13. $\vec{e}_1$=(-1,4,3), $\vec{e}_2$=(2,-1,4), $\vec{e}_3$=(3,2,1), $\vec{x}$=(-2,22,-4).
5.14. $\vec{e}_1$=(1,2,4), $\vec{e}_2$=(2,3,1), $\vec{e}_3$=(-3,1,-2), $\vec{x}$=(1,8,7).
5.15. $\vec{e}_1$=(3,-2,1), $\vec{e}_2$=(2,1,3), $\vec{e}_3$=(-1,1,2), $\vec{x}$=(5,-3,4).
5.16. $\vec{e}_1$=(1,5,3), $\vec{e}_2$=(2,1,1), $\vec{e}_3$=(3,-2,1), $\vec{x}$=(7,-7,-3).
5.17. $\vec{e}_1$=(0,-4,-3), $\vec{e}_2$=(3,0,1), $\vec{e}_3$=(5,-2,1), $\vec{x}$=(-3,2,2).
5.18. $\vec{e}_1$=(4,3,-1), $\vec{e}_2$=(-2,-2,2), $\vec{e}_3$=(-3,-4,3), $\vec{x}$=(1,2,-1).
5.19. $\vec{e}_1$=(1,1,-1), $\vec{e}_2$=(3,4,5), $\vec{e}_3$=(1,2,3), $\vec{x}$=(-2,-3,-10).
5.20. $\vec{e}_1$=(2,4,1), $\vec{e}_2$=(-2,3,-4), $\vec{e}_3$=(1,-1,2), $\vec{x}$=(-6,3,-9).
5.21. $\vec{e}_1$=(-3,-2,-4), $\vec{e}_2$=(2,3,3), $\vec{e}_3$=(-2,1,-1), $\vec{x}$=(4,8,7).
5.22. $\vec{e}_1$=(7,-1,1), $\vec{e}_2$=(2,3,-4), $\vec{e}_3$=(4,2,-1), $\vec{x}$=(1,-2,15).
5.23. $\vec{e}_1$=(1,-1,4), $\vec{e}_2$=(4,5,-6), $\vec{e}_3$=(-2,3,-1), $\vec{x}$=(8,-1,-4).
5.24. $\vec{e}_1$=(2,3,1), $\vec{e}_2$=(1,1,3), $\vec{e}_3$=(3,2,2), $\vec{x}$=(5,1,11).
5.25. $\vec{e}_1$=(1,5,3), $\vec{e}_2$=(2,1,-1), $\vec{e}_3$=(4,2,1), $\vec{x}$=(31,29,10).
5.26. $\vec{e}_1$=(1,-1,1), $\vec{e}_2$=(4,2,2), $\vec{e}_3$=(4,2,1), $\vec{x}$=(-2,-4,-1).
5.27. $\vec{e}_1$=(1,-1,1), $\vec{e}_2$=(-3,1,2), $\vec{e}_3$=(1,2,3), $\vec{x}$=(6,5,7).
5.28. $\vec{e}_1$=(1,3,2), $\vec{e}_2$=(-5,4,-3), $\vec{e}_3$=(2,-1,5), $\vec{x}$=(10,-3,15).
5.29. $\vec{e}_1$=(2,3,3), $\vec{e}_2$=(-1,4,-2), $\vec{e}_3$=(-1,-2,4), $\vec{x}$=(4,11,11).
5.30. $\vec{e}_1$=(-2,4,1), $\vec{e}_2$=(1,7,-8), $\vec{e}_3$=(-3,-2,5), $\vec{x}$=(-4,9,2).

§ 6. Метод Гаусса.

Основні поняття і теореми [5, ст. 70]

Зразки розв’язування задач

Задача.

Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases} \tag{1}$$

Розв’язання.

Маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -8 & -3 & 1 & -21 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 21 & 9 & 99 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -72 \end{array}\right).$$

Звідси $r(A) = r(B)$. Система сумісна. Оскільки ранг матриці A дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв’язок, який знайдемо, записавши перетворену систему за здобутою матрицею. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ x_3 + 3x_4 = 15, \\ -18x_4 = -72. \end{cases}.$$

Звідси

$$x_4 = 4,$$
$$x_3 = 15 - 3x_4 = 15 - 12 = 3,$$
$$x_2 = 15 - 3x_3 - x_4 = 15 - 9 - 4 = 2,$$
$$x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 8 - 4 - 3 = 1.$$

або

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4).$$

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 6. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

6.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 10x_5 = -22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -7, \\ x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 18x_5 = -39. \end{cases}$

6.9 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 + 3x_5 = 1, \\ 8x_1 - 12x_2 + 12x_3 + 17x_4 + 5x_5 = 4. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 25, \\ 15x_1 + 20x_2 + 6x_3 + 11x_4 - 7x_5 = 16. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 21x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 22, \\ 3x_1 + 13x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 20. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 - x_5 = 18, \\ 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 18x_4 + 4x_5 = 17. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 8, \\ 15x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 19. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15, \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 17x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 14x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 6. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 + -2x_4 = -2. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 8. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5, \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 32. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 13x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \\ 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 18x_4 = 17. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 9, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 14. \end{cases}$

§ 7. Системи лінійних однорідних рівнянь.

Основні поняття і теореми [5, ст. 79 – 81].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо основну матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Одержали трапецієподібну матрицю *B* рівносильну матриці *A*. Дана система рівносильна системі, для якої основною матрицею є матриця *B*, тобто дана система рівносильна системі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_4 - 3x_5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

В цій системі x_1, x_2, x_4 є базисні, x_3, x_5 – вільні невідомі. Розв'яжемо цю систему, тобто виразимо базисні невідомі через вільні. Маємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = -x_3, \\ x_4 = -x_5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -x_3, \\ x_4 = -x_5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_2 = -1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_4 = 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_5, \\ x_5 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5. \end{cases}$$

Тобто

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = \left(0, -1, 1, 0, 0\right) x_3 + \left(0, 0, 0, -1, 1\right) x_5,$$

або $\vec{x} = x_3 \cdot \vec{c}_1 + x_5 \cdot \vec{c}_2$, де $\vec{c}_1 = \left(0, -1, 1, 0, 0\right)$ i $\vec{c}_2 = \left(0, 0, 0, -1, 1\right)$.

Ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, складеної з координат векторів $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ дорівнює 2, отже вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ – лінійно незалежні в L^5. Вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ утворюють базис у підпросторі розв'язків, так як будь-який вектор-розв'язок $\vec{x}$ даної системи має вигляд $\vec{x} = \cdot x_3 \cdot \vec{c}_1 + x_5 \cdot \vec{c}_2$, тобто є лінійною комбінацією лінійно незалежних векторів $\vec{c}_1, \vec{c}_2$. Так як базис підпростору розв'язків складається з двох векторів $\vec{c}_1, \vec{c}_2$, то розмірність підпростору розв'язків дорівнює двом (числу вільних невідомих).

Відповідь: Вектори $\vec{c}_1 = \left(0, -1, 1, 0, 0\right), \vec{c}_2 = \left(0, 0, 0, -1, 1\right)$ утворюють базис підпростору розв'язків даної системи лінійних рівнянь, розмірність цього підпростору дорівнює 2.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 7.

Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.

7.1. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

7.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

7.24. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7.25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

7.26. $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$

7.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7.28. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

7.29. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

7.30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

§ 8. Пряма в E_2.

Основні поняття і теореми [5, ст. 140 – 144].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Дано координати вершин трикутника $A_1(1;1)$, $A_2(10;13)$, $A_3(13,6)$.

Знайти:

1) рівняння сторони A_1A_2;
2) рівняння висоти, опущеної з вершини A_3 на сторону A_1A_2 і обчислити її довжину;
3) точку перетину медіан;
4) рівняння бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A_1;
5) рівняння прямої, що проходить через A_2 паралельно прямій A_1A_3, і знайти відстань між цими прямими.

Розв'язання.

Побудуємо рисунок до задачі.

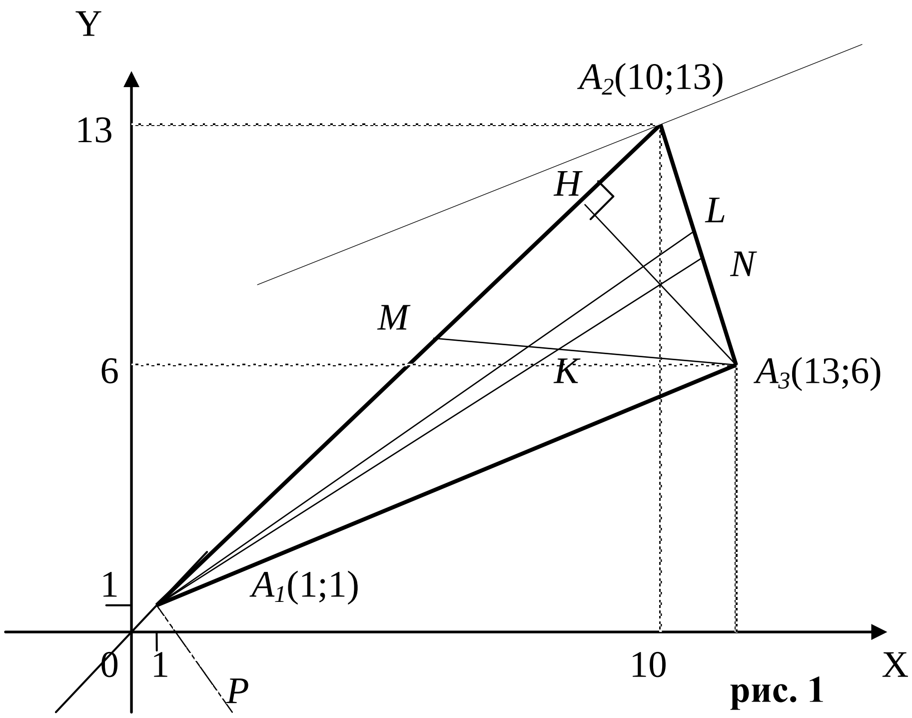


рис. 1

На рисунку 1:

A_1N – медіана, опущена з вершини A_1 на сторону A_2A_3, A_1L – бісектриса кута A_1, A_3H – медіана опущена з вершини A_3 на сторону A_1A_2, A_3M – медіана опущена з вершини A_3 на сторону A_1A_2.

1) Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тому рівняння сторони A_1A_2:

$$\frac{x-1}{10-1}=\frac{y-1}{13-1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{12}\Leftrightarrow 4x-3y-1=0.$$

.

2) Канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{l}=(p;q)$ має вигляд

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}.$$

Висота A_3H проходить через точку $A_3(13;6)$ і паралельна вектору $\vec{n}=(4;-3)$, вектора колінеарного прямій A_3H. В даному випадку – це вектор перпендикулярний прямій A_1A_2, тобто нормальний вектор прямої A_1A_2: $\vec{n}=(4;-3)$. Отже, рівняння висоти

$$A_3H:\ \frac{x-13}{4}=\frac{y-6}{-3}\Leftrightarrow 3x+4y-63=0.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою

$$\alpha=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Довжина висоти A_3H дорівнює відстані від точки A_3 до прямої A_1A_2, тому

$$|A_3H|=\frac{|4\cdot 13-3\cdot 6-1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{33}{5}.$$

3) *К* – точка перетину медіан A_1N , A_3M . Знайдемо рівняння медіани A_3M :

$$\frac{x-13}{\frac{11}{2}-13}=\frac{y-6}{7-6}\Leftrightarrow 2x+15y-116=0,$$

де $M\left(\frac{11}{2};7\right)$– середина відрізка A_1A_2.

Знайдемо рівняння медіани A_1N :

$$\frac{x-1}{\frac{23}{2}-1}=\frac{y-1}{\frac{19}{2}-1}\Leftrightarrow 17x-21y+4=0.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 15y - 116 = 0, \\ 17x - 21y + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = \dfrac{20}{3}, \end{cases}$

знайдемо координати точки $K\left(8; \dfrac{20}{3}\right)$.

4) Нехай точка L – точка перетину бісектриси внутрішнього кута при вершині A_1 із стороною A_2A_3. Координати точки K знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\ ;\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Із властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника слідує, що

$$\frac{|A_2L|}{|L A_3|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|} = \lambda\,.$$

Так як

$$|A_1A_2| = \sqrt{(10-1)^2 + (13-1)^2} = \sqrt{225} = 15,$$
$$|A_1A_3| = \sqrt{(13-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{169} = 13,$$

то $\lambda = \dfrac{15}{13}$.

Знаходимо координати точки L:

$$x = \frac{10 + \frac{15}{13}\cdot 13}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{325}{28}\ ,\quad y = \frac{13 + \frac{15}{13}\cdot 6}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{259}{28}.$$

Отже, $L\left(\dfrac{325}{28}; \dfrac{259}{28}\right)$.

Рівняння прямої A_1L – бісектриси внутрішнього кута при вершині A_1:

$$\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1} = \frac{y-1}{\frac{259}{28}-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\frac{297}{28}} = \frac{y-1}{\frac{231}{28}} \Leftrightarrow 7x - 9y + 2 = 0.$$

Бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів взаємно перпендикулярні, тому для знаходження рівняння бісектриси зовнішнього кута, скористаємось канонічним рівнянням прямої $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$. За напрямний вектор бісектриси зовнішнього кута при вершині A_1, приймемо вектор $\vec{n}(7;-9)$ – нормальний вектор прямої A_1L: $\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{-9} \Leftrightarrow 9x+7y-16=0$.

5) Скористаємося канонічним рівнянням прямої

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q},$$

$(x_0;y_0)$ – координати точки $A_2(10;13)$.

За напрямний вектор $(p;q)$ візьмемо вектор $\overrightarrow{A_1A_3}=(12;5)$.

Рівняння прямої, що проходить через точку A_2 паралельно прямій

A_1A_3: $\frac{x-10}{12}=\frac{y-13}{5} \Leftrightarrow 5(x-10)=12(y-13) \Leftrightarrow$ $\mathbf{5x-12y+106=0}$.

Знайдемо відстань між цими прямими, як відстань від точки $A_1(1;1)$ до прямої $5x-12y+106=0$, тобто $d=\frac{|5\cdot 1-12\cdot 1+106|}{\sqrt{25+144}}=\frac{99}{13}$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 8.

Дано координати вершин трикутника A_1, A_2, A_3. Знайти:

1) рівняння сторін A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3;
2) рівняння висоти, опущеної з вершини A_1 на сторону A_2A_3 і обчислити її довжину;
3) точку перетину медіан трикутника;
4) рівняння бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A_2.
5) рівняння прямої, що проходить через A_2 паралельно прямій A_1A_3, і знайти відстань між цими прямими.

8.1. $A_1(3;3)$,	$A_2(-1;0)$,	$A_3(7;-6)$.
8.2. $A_1(5;-2)$,	$A_2(1;1)$,	$A_3(-7;-5)$.
8.3. $A_1(6;1)$,	$A_2(2;-2)$,	$A_3(10;-8)$.
8.4. $A_1(7;0)$,	$A_2(3;-3)$,	$A_3(-5;3)$.
8.5. $A_1(-3;-3)$,	$A_2(1;0)$,	$A_3(-7;6)$.
8.6. $A_1(-2;-4)$,	$A_2(2;-1)$,	$A_3(-6;5)$.
8.7. $A_1(-1;-5)$,	$A_2(3;-2)$,	$A_3(-5;4)$.
8.8. $A_1(9;2)$,	$A_2(5;5)$,	$A_3(-3;-1)$.
8.9. $A_1(8;-1)$,	$A_2(4;2)$,	$A_3(-4;-4)$.
8.10. $A_1(-4;-2)$,	$A_2(0;1)$,	$A_3(-7;6)$.
8.11. $A_1(-5;-2)$,	$A_2(-1;1)$,	$A_3(7;-5)$.
8.12. $A_1(6;1)$,	$A_2(2;-2)$,	$A_3(10;-8)$.
8.13. $A_1(-7;0)$,	$A_2(-3;3)$,	$A_3(5;-3)$.
8.14. $A_1(-8;1)$,	$A_2(-4;-2)$,	$A_3(4;4)$.
8.15. $A_1(-9;-2)$,	$A_2(-5;-5)$,	$A_3(3;1)$.
8.16. $A_1(7;8)$,	$A_2(3;5)$,	$A_3(11;-1)$.
8.17. $A_1(6;7)$,	$A_2(2;4)$,	$A_3(10;-2)$.
8.18. $A_1(4;5)$,	$A_2(0;2)$,	$A_3(8;-4)$.
8.19. $A_1(5;6)$,	$A_2(1;3)$,	$A_3(9;-3)$.
8.20. $A_1(3;3)$,	$A_2(-1;0)$,	$A_3(7;-6)$.
8.21. $A_1(7;5)$,	$A_2(11;2)$,	$A_3(3;-4)$.
8.22. $A_1(8;6)$,	$A_2(4;3)$,	$A_3(12;-3)$.
8.23. $A_1(6;4)$,	$A_2(10;1)$,	$A_3(2;-5)$.
8.24. $A_1(0;6)$,	$A_2(4;3)$,	$A_3(-4;-3)$.
8.25. $A_1(-1;-5)$,	$A_2(-5;-2)$,	$A_3(3;4)$.
8.26. $A_1(-2;-6)$,	$A_2(-6;-3)$,	$A_3(2;3)$.
8.27. $A_1(-1;-2)$,	$A_2(7;4)$,	$A_3(3;7)$.
8.28. $A_1(0;-3)$,	$A_2(8;3)$,	$A_3(4;6)$.
8.29. $A_1(13;-4)$,	$A_2(5;2)$,	$A_3(9;6)$.
8.30. $A_1(1;-4)$,	$A_2(9;2)$,	$A_3(5;5)$.

§ 9. Графічний метод розв'язування систем лінійних нерівностей.

Зразки розв'язування задач

Задача.

Знайти графічним методом множину невід'ємних розв'язків $(x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0)$ системи нерівностей:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 56, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4. \end{cases}$$

Розв'язання.

Множиною розв'язків лінійної нерівності з двома невідомими є півплощина, що лежить по одну сторону від граничної прямої, рівняння якої можна отримати, якщо замінити знак нерівності знаком рівності. Таким чином, отримаємо в даній задачі рівняння трьох граничних прямих:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 = 6, \qquad (1)$$

$$4x_1 + 8x_2 = 56, \qquad (2)$$

$$2x_1 + 3x_2 = 4. \qquad (3)$$

Побудуємо ці прямі на площині X_1OX_2:

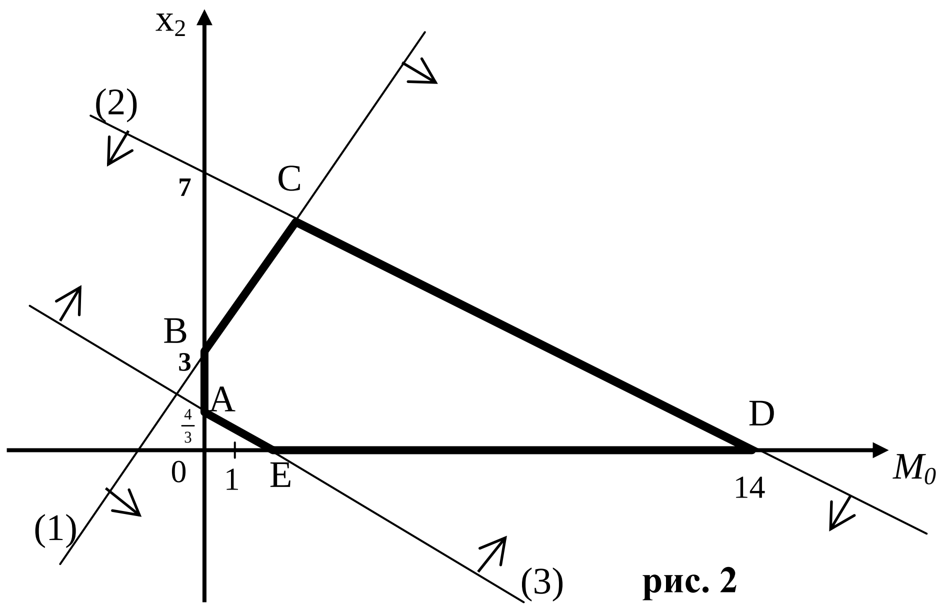


рис. 2

Лінійній нерівності $Ax_1 + Bx_2 + C < 0$ задовольняють координати точок $M(x_1; x_2)$ півплощини, обмеженої прямою $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ і тільки координати точок цієї півплощини.

Тому для того, щоб визначити розташування відповідної півплощини відносно граничної прямої, підставимо координати будь-якої точки (найпростіше – початку координат), в ліву частину нерівності. Так, наприклад, при підстановці значень $x_1 = 0$ *і* $x_2 = 0$ в 1-у нерівність отримаємо $0 \le 6$. Таким чином, множина розв'язків цієї нерівності містить початок координат. Аналогічний результат отримаємо для 2-ої нерівності: $0 \le 56$. Для 3-ої нерівності отримаємо $0 \ge 4$, що невірно. Таким чином координати початку координат не задовольняють 3-ій нерівності, тому відповідна півплощина розташована по інший бік, ніж початок координат, від 3-ої граничної прямої.

Розташування вказаних півплощин вказано стрілками. Очевидно, множиною розв'язків даної системи нерівностей буде многокутник *ABCD* з вершинами, що є точками перетину вказаних прямих. Для знаходження координат отриманого многокутника необхідно розв'язати сумісно відповідні пари рівнянь.

Наприклад, для того щоб знайти координати точки *C*, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 6, \\ 4x_1 + 8x_2 = 56, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 6, \end{cases} \quad C(2;6).$$

Зауваження. Якщо гранична пряма проходить через початок координат, то замість точки *O*(0 ; 0) необхідно взяти будь-яку іншу точку.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 9. Знайти графічним методом множину невід'ємних розв'язків $\left(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right)$ системи нерівностей.

9.1. $\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \leq 56, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1 \leq 15. \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 90, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 3. \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 0, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 30, \\ x_1 \leq 7. \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \geq 30, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -3x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$

9.8. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 42. \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 42. \end{cases}$

9.10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ -x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases}$

9.11. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 7x_2 \geq 42, \\ x_2 \leq 7. \end{cases}$

9.12. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 2. \end{cases}$

9.13. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2. \end{cases}$

9.15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4. \end{cases}$

9.16 . $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$

9.17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$

9.18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$

9.19. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 56, \\ x_1 - x_2 \leq 5. \end{cases}$

9.20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$

9.14. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$

9.21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$

9.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$

9.25. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$

9.28. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 5. \end{cases}$

9.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$

9.26. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24. \end{cases}$

9.29. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 3. \end{cases}$

9.24. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 21, \\ x_1 + x_2 \leq 9. \end{cases}$

9.27. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$

9.30 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$

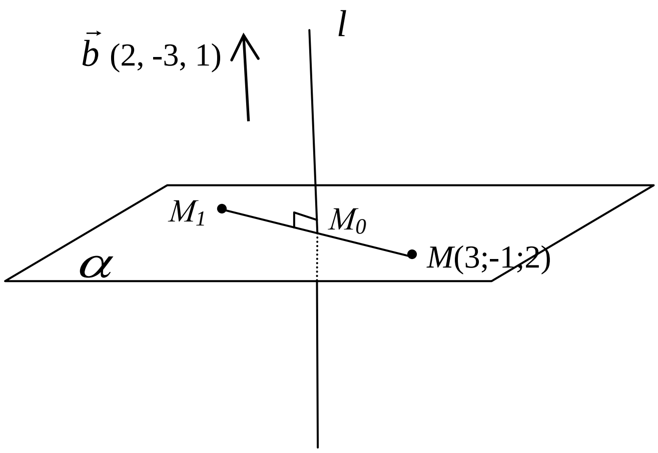
§ 10. Площина і пряма в E_3.

Основні поняття і теореми [5, ст. 140 – 144].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Знайти точку M_1, яка симетрична точці $M(3;-1;2)$ відносно прямої, яка задана рівнянням $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-5}{-1}$.



Розв'язання.

Рівняння площини α, яка проходить через точку M перпендикулярно прямій l (рис. 1) має вигляд

$$2(x-3)-3(y+1)-(z-2)=0,$$
$$2x-3y-z-7=0.$$

Вектор $\vec{b}(2,-3,1)$ паралельний даній прямій *l*.

Координати точки M_0, яка є точкою перетину прямої l і площини α, є розв'язком системи:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-5}{-1}=t, \\ 2x-3y-z-7=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+2, \\ y=-3t-5, \\ z=-t+5, \\ 2x-3y-z-7=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2}, \\ x=1, \\ y=-\frac{7}{2}, \\ z=\frac{11}{2}. \end{cases}$$

Точка $M_0\left(1;-\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$ є серединою відрізка M_1M, отже, координати точки M_1 можна знайти таким чином:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2}=1, \\ \frac{y-1}{2}=-\frac{7}{2}, \\ \frac{z+2}{2}=\frac{11}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=-6, \\ z=9. \end{cases}$$

Відповідь: $M_1(-1;-6;9)$.

Задача 2.

Знайти точку M_1, яка симетрична точці $M\left(3;5;-2\right)$ відносно площини α, що задана рівнянням $3x-5y+7z-5=0$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння прямої *l*, яка перпендикулярна площині α і проходить через точку M (рис. 2):

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z=2}{7}.$$

Точка M_0 є точкою перетину прямої *l* і площини α, отже, її координати – це розв'язок системи рівнянь:

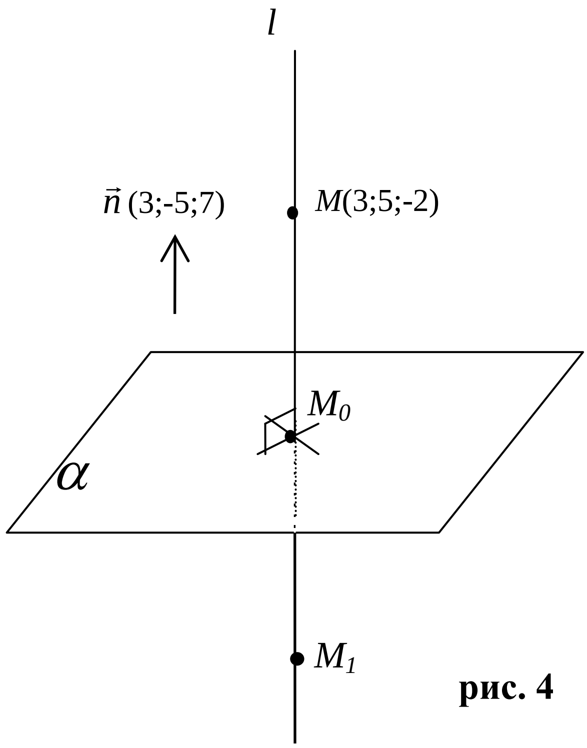


рис. 4

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z+2}{7},\\ 3x-5y+7z-5=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3t+3,\\ y=-5t+5,\\ z=7t-2,\\ 3x-5y+7-5=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{35}{83},\\ x=\dfrac{354}{83},\\ y=\dfrac{240}{83},\\ z=\dfrac{79}{83}.\end{cases}$$

Точка $M_0\left(\frac{354}{83};\frac{240}{83};\frac{79}{83}\right)$ є серединою відрізка MM_1, отже, координати точки M_1 можна знайти наступним чином:

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{354}{83},\\ \dfrac{y+5}{2}=\dfrac{240}{83},\\ \dfrac{z-2}{2}=\dfrac{79}{83},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{459}{83},\\ y=\dfrac{65}{83},\\ z=\dfrac{324}{83}.\end{cases}$$

Відповідь: точка $M_1\left(\frac{459}{83};\frac{65}{83};\frac{324}{83}\right)$.

Задача 3.

Обчислити відстань від точки $M(2\,;-1\,;3)$ до прямої l, що задана рівнянням $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-1}$.

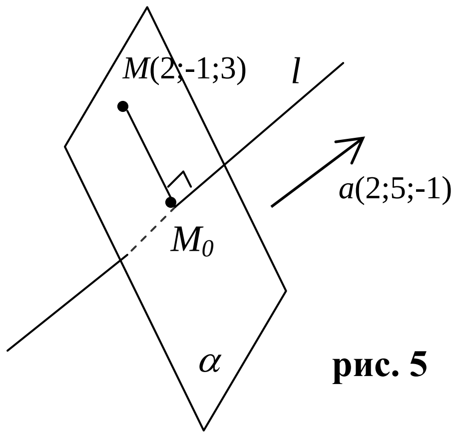


рис. 5

Розв'язання.

Знайдемо рівняння площини α, яка проходить через точку M перпендикулярно прямій l (рис. 3):

$$2(x-2)+5(y+1)-(z-3)=0,$$

$$2x+5y+-z+4=0.$$

Точка M_0 є точкою перетину прямої l і площини α, отже, її координати – це розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-1}=t,\\ 2x+5y+-z+4=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2t-3,\\ y=5t,\\ z=-t+1,\\ 2x+5y+-z+4=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{1}{10},\\ x=-\frac{14}{5},\\ y=\frac{1}{2},\\ z=\frac{9}{10}.\end{cases}$$

Відстанню d між точкою M і прямою l буде відстань між точками M і M_0. Отже,

$$d=\sqrt{\left(2+\frac{14}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-\frac{9}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{330}}{10}.$$

Відповідь: $d=\frac{3\sqrt{330}}{10}$.

Задача 4.

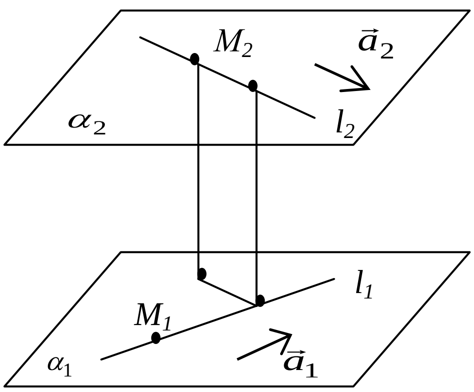


рис. 6

Знайти відстань між прямими l_1 і l_2, які задані рівняннями:

$$l_1:\begin{cases}x+y-z-3=0,\\ 2x+y-z-4=0.\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}x+2y-z-4=0,\\ x+2y+2z+2=0.\end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, які є напрямними відповідно до прямих l_1 і l_2 (рис.4):

$$\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{j} - \vec{k} = (0;-1;-1),$$

$$\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} = (6;-3;0).$$

Знайдемо координати, деякої точки M_1, яка належить прямій l_1. Для цього у системі рівнянь, що визначає пряму l_1, покладемо, наприклад $z = 0$:

$$l_1 : \begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ 2x + y - z - 4 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Знайдемо рівняння площини α_1, що проходить через точку $M_1(1;2;0)$ паралельно до векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 5 = 0.$$

Відстань d між прямими l_1 і l_2 буде рівна відстані між будь-якою точкою прямої l_2 і площиною α_1. Знайдемо координати деякої точки M_2, яка належить прямій l_2:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0, \\ x + 2y + 2z + 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z - 4 = 0, \\ 2y + 2z + 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ z = -2. \end{cases}$$

Отже,

$$d = \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $d = \dfrac{1}{3}$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 10.

Знайти точку M_1, яка симетрична точці M відносно прямої.

10.1. $M(0,-3,-2)$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}$.

10.2. $M(2,-1,1)$, $\frac{x-4{,}5}{1}=\frac{y+3}{-0{,}5}=\frac{z-2}{1}$.

10.3. $M(1,1,1)$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1{,}5}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

10.4. $M(1,2,3)$, $\frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z-1{,}5}{1}$.

10.5. $M(1,0,-1)$, $\frac{x-3{,}5}{2}=\frac{y-1{,}5}{2}=\frac{z}{0}$.

10.6. $M(2,1,0)$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z+0{,}5}{1}$.

10.7. $M(-2,-3,0)$, $\frac{x+0{,}5}{1}=\frac{y+1{,}5}{0}=\frac{z-0{,}5}{1}$.

10.8. $M(-1,0,-1)$, $\frac{x}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-2}{1}$.

Знайти точку M_1, яка симетрична точці M відносно площини.

10.9. $M(1,0,1)$, $4x+6y+4z-25=0$.

10.10. $M(-1,0,-1)$, $2x+6y+2z+11=0$.

10.11. $M(0,2,1)$, $2x+4y-3=0$.

10.12. $M(1,0,1)$, $y+z+2=0$.

10.13. $M(-1,2,0)$, $4x-5y-z-7=0$.

10.14. $M(2,-1,1)$, $x-y+2z-2=0$.

10.15. $M(1,1,1)$, $x+4y+3z+5=0$.

10.16. $M(1,0,1)$, $2x+10y+10z-1=0$.

Обчислити відстань від точки M до прямої.

10.17. $M(1,-1,-2)$, $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

10.18. $M(2,0,-1)$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$.

10.19. $M(3,2,1)$, $\frac{x}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-1}{1}$.

10.20. $M(4,2,-2)$, $\frac{x+4}{1}=\frac{y-5}{0}=\frac{z+2}{-2}$.

10.21. $M(3,-2,0)$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-4}$.

10.22. $M(-1,2,2)$, $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

10.23. $M(5,1,-1)$, $\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{-5}$.

Знайти відстань між прямими.

10.24. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ і $\frac{x}{6}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{-1}$

10.25. $\frac{x+12}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+34}{-4}$ і $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$.

10.26. $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ і $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

10.27. $\frac{x+4}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ і $\frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}$.

10.28. $\frac{x-10}{0}=\frac{y-16}{3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-7}{0}$

10.29. $\frac{x}{1}=\frac{y+5}{16}=\frac{z+3}{11}$ і $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{4}$.

10.30. $\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{9}{2}}{2}=\frac{z+\frac{1}{2}}{0}$ і $\frac{x+2}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{4}$

§11. Площина і пряма в E_n.

Основні поняття і теореми [5, ст. 140 – 144].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Знайти рівняння гіперплощини, що проходить через точку $M(-5;2;3;-2)$ паралельно гіперплощині $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 5 = 0$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{n}(2;-1;3;-7)$ є перпендикулярним до обох гіперплощин. Отже, рівняння шуканої гіперплощини має вигляд:

$$2(x_1 + 5) - (x_2 - 2) + 3(x_3 - 3) - 7(x_4 + 2) = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 11 = 0.$$

Відповідь: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 11 = 0$.

Задача 2.

Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами α_1 і α_2, заданих відповідно рівняннями:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 + x_5 - 4 = 0 \text{ і}$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 + x_5 - 7 = 0.$$

Розв'язання.

Знайдемо координати якої-небудь точки, що належить площині α_1, наприклад $M_1(0;0;0;0;4)$. Тоді, відстань між точкою M_1 і площиною α_2 буде шуканою відстанню *d* між даними гіперплощинами:

$$d = \frac{|4 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-7)^2 + 1^2}} = \frac{3}{8}.$$

Відповідь: $d = \frac{3}{8}$.

Задача 3.

Знайти кут між гіперплощинами α_1 і α_2, заданих відповідно рівняннями:

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 7 = 0 \text{ і } 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 5 = 0.$$

Розв'язання.

Вектори, які є нормальними до даних гіперплощин, відповідно

$$\vec{n}_1(2;3;-1;5) \text{ і } \vec{n}_2(5;-2;1;-3).$$

Кут між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ і є кутом між гіперплощинами. Отже,

$$\cos\alpha=\frac{2\cdot 5+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+5\cdot(-3)}{\sqrt{4+9+1+25}\cdot\sqrt{25+4+1+9}}=-\frac{12}{39},$$
$$\alpha=\arccos\left(-\frac{12}{39}\right)=\pi-\arccos\frac{12}{39}$$

Відповідь: $\alpha=\pi-\arccos\dfrac{12}{39}$.

Задача 4.

Знайти рівняння гіперплощин, які віддалені від даної гіперплощини, що задана рівнянням
$$2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5+5=0,$$
на відстань 5-ти одиниць.

Розв'язання.

Шукані гіперплощини – це множини точок, які віддалені від даної гіперплощини α на відстань 5-ти одиниць. Отже, шукані гіперплощини мають рівняння:
$$\frac{|2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5+5|}{\sqrt{4+1+9+1+1}}=5 \Leftrightarrow |2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5+5|=20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5-15=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5+25=0. \end{array}\right.$$

Відповідь: $2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5-15=0,\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5+25=0.$

Задача 5.

Знайти проекцію точки $M(5;-2;-4;1;0)$ на гіперплощину $2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5+6=0$.

Розв'язання.

Запишемо канонічне рівняння прямої l , що проходить через точку *M*, перпендикулярно до заданої гіперплощини:
$$\frac{x_1-5}{2}=\frac{x_2+2}{-1}=\frac{x_3+4}{3}=\frac{x_4-1}{-2}=\frac{x_5}{1}.$$
Шуканою проекцією точки *M* є точка M_0 перетину прямої l та заданої гіперплощини:
$$\begin{cases} \dfrac{x_1-5}{2}=\dfrac{x_2+2}{-1}=\dfrac{x_3+4}{3}=\dfrac{x_4-1}{-2}=\dfrac{x_5}{1}, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5+6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\ \ 2t+5, \\ x_2=\ -t-2, \\ x_3=\ \ 3t-4, \\ x_4=-2t+1, \\ x_5=\ \ t, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5+6=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{4}{19} \\ x_1 = \dfrac{87}{19}, \\ x_2 = -\dfrac{34}{19}, \\ x_3 = -\dfrac{88}{19}, \\ x_4 = \dfrac{27}{19}, \\ x_5 = -\dfrac{4}{19}. \end{cases}$$

Відповідь: $M_0\left(\dfrac{87}{19}; -\dfrac{34}{19}; -\dfrac{88}{19}; \dfrac{27}{19}; -\dfrac{4}{19}\right)$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 11.

Знайти рівняння гіперплощини, яка проходить через точку M паралельно іншій гіперплощині.

11.1. $M(1;-2;4;3)$, $2x_1+x_2-3x_3+x_4=0$.

11.2. $M(0;-1;2;1;5)$, $x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=3$.

11.3. $M(2;-1;0;2)$, $3x_1-x_2+4x_3+5x_4=0$.

11.4. $M(1;3;-1;2;0)$, $4x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1$.

11.5. $M(1;-3;2;-4)$, $x_1+3x_2-5x_3+2x_4=7$.

11.6. $M(0;3;-1;2;4)$, $2x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5=3$.

Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами.

11.7. $3x_1+x_2-2x_3+x_4=0$,
$3x_1+x_2-2x_3+x_4-1=0$.

11.8. $x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5+3=0$,
$x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5-6=0$.

11.9. $5x_1-x_2+3x_3-2x_4-6=0$,
$5x_1-x_2+3x_3-2x_4+1=0$.

11.10. $-2x_1+x_2-x_3+4x_4-x_5-3=0$,
$2x_1-x_2+x_3-4x_4+x_5-2=0$.

11.11. $3x_1-x_2+2x_3-x_4+7=0$,
$3x_1-x_2+2x_3-x_4+5=0$.

11.12. $x_1-2x_2+x_3-3x_4+2x_5-3=0$,
$x_1-2x_2+x_3-3x_4+2x_5-6=0$.

Знайти кут між гіперплощинами.

11.13. $2x_1+3x_2+x_3-2x_4+x_5+4=0$,
$x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5+6=0$.

11.14. $3x_1-x_2+2x_3-x_4+3=0$,
$x_1+4x_2-x_3+2x_4-1=0$.

11.15. $5x_1+6x_2-x_3+4x_4+x_5-5=0$,
$x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5+7=0$.

11.16. $2x_1+x_2+3x_3-x_4+5=0$,
$x_1+x_2-4x_3+x_4-6=0$.

11.17. $x_1+5x_2-x_3+3x_4-x_5+1=0$,
$x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0$.

11.18. $3x_1-x_2+2x_3-x_4+8=0$,
$x_1+2x_2-3x_3+7x_4-3=0$.

Знайти рівняння гіперплощин, які віддалені від даної гіперплощини на відстань 4-ох одиниць.

11.19. $5x_1+3x_2-x_3+x_4+3=0$.

11.20. $7x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5=7$.

11.21. $x_1+2x_2-x_3+2x_4=6$.

11.22. $3x_1-x_2+5x_3-2x_4+6x_5=1$.

11.23. $x_1+8x_2+9x_3-5x_4=3$.

11.24. $4x_1+5x_2-7x_3+8x_4+9x_5=10$.

Знайти проекцію точки на гіперплощину.

11.25. $M(3;2;-1;0;3)$,
$3x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=3$.

11.26. $M(-1;0;2;-4)$,
$5x_1+x_2+2x_3-x_4=5$.

11.27. $M(-2;3;4;-1;0)$,
$x_1+3x_2+x_3-5x_4+x_5=6$.

11.28. $M(-2;0;1;1)$,
$3x_1-x_2+x_3-3x_4=1$.

11.29. $M(1;3;-1;2;0)$,
$x_1-4x_2+2x_3-x_4+2x_5=3$.

11.30. $M(1;3;-1;2;0)$,
$-x_1+2x_2-x_3+3x_4=5$.

§ 12. Криві другого порядку.

Основні поняття і теореми [5, ст. 203 – 205; 208 – 211; 215 – 217].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$ і відстань між його фокусами $2c = 6\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Координати точки M повинні задовольняти це рівняння. Отже, маємо $\frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$. Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то $a^2-b^2=27$.

Тоді з системи рівнянь

$$\begin{cases}\frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=27,\end{cases}$$

знайдемо $a^2=36,\ b^2=9$.

Отже, рівняння еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 2.

Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між вершинами гіперболи дорівнює 48, а рівняння її асимптот $y=\pm\frac{5}{12}x$.

Розв'язання.

Оскільки відстань між вершинами гіперболи дорівнює $2a$, то $2a = 48$, отже a=24.

Оскільки асимптоти гіперболи мають рівняння $y=\pm\frac{5}{12}x$, то $\frac{b}{a}=\frac{5}{12}$, звідки b=10.

Отже рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1.$

Задача 3.

Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо відомо, що вона симетрична відносно осі OX і відтинає від прямої $y=2\sqrt{2}\,x$ хорду довжиною $\frac{3}{4}$

Розв'язок.

Знайдемо координати точок перетину заданої прямої $y=2\sqrt{2}\,x$ і параболи, рівняння якої $y^2=2px$ (оскільки, за умовою, парабола симетрична відносно OX і має вершину в початку координат):

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=2\sqrt{2}\,x, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{p}{4}, \\ y=\dfrac{p}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, точки перетину: $A_1(0;0)$ і $A_2\left(\frac{p}{4};\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$.

Тоді, довжина хорди A_1A_2 – це відстань між точками A_1 і A_2:

$$\sqrt{\frac{p^2}{16}+\frac{p^2}{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow p=1.$$

Отже, рівняння параболи: $y^2=-2x$.

Відповідь: $y^2=-2x$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 12.

У варіантах 1 – 8 скласти рівняння еліпса.

12.1. Точки $F_1(5;1)$ і $F_2(-1;1)$ – фокуси еліпса, а пряма x=31/3 – його директриса.

12.2. Точка $F_1(-6;2)$ є одним з фокусів еліпса, точка $A(2;2)$ є кінцем великої вісі, а ексцентриситет еліпса рівний 2/3.

12.3. Вісі еліпса паралельні вісям координат, точки $A(4;0)$ і $B(0;4)$ належать еліпсу, при цьому точка B знаходиться на відстані $3\sqrt{2}$ від одного з фокусів і на відстані 6 від відповідної директриси.

12.4. Точки $F_1(-1;-1)$ і $F_2(1;1)$ є фокуси еліпса, а сума його фокальних радіусів дорівнює $2\sqrt{3}$.

12.5. Точки $A_1(1;0)$ і $A_2(9;0)$ – точки перетину еліпса з віссю Ox, а точка $A_3(0;3)$– точка дотику еліпса з віссю Oy. Відомо, що вісі еліпса паралельні вісям координат.

12.6. Вісі еліпса паралельні вісям координат, а точки (5;0) і (0;3) – точки дотику еліпса відповідно до вісей Ox і Oy.

12.7. Ексцентриситет еліпса рівний 1/2, а точка $F(1;2)$ – його фокус. Рівняння відповідної директриси має вигляд x-4=0.

12.8. Ексцентриситет еліпса рівний 3/4, точка $F(-3;2)$ – його фокус, а y+2=0 – рівняння відповідної директриси.

У варіантах 9 – 16 скласти рівняння гіперболи.

12.9. Точка (1;0) належить гіперболі, а прямі x=0 і y=1 – її асимптоти.

12.10. Точки $F_1(-3;-4)$ і $F_2(3;4)$ – фокуси гіперболи, а відстань між її директрисами дорівнює 3,6.

12.11. Ексцентриситет гіперболи рівний $\sqrt{5}$, фокус знаходиться в точці $F(2;-3)$, а рівняння відповідної директриси має вигляд 3x-y+3=0.

12.12. Фокуси гіперболи знаходяться в точках $F_1(3;-2)$ і $F_2(5;-2)$, а пряма x=7/2 –

12.13. Точка $F(1;3)$ є одним з фокусів гіперболи, точка A(-4;3) – її вершина, а ексцентриситет рівний 3/2.

12.14. Точка $F(0;0)$ є одним з фокусів гіперболи, а прямі $x+y+2=0$, $x-y+2=0$ – її асимптоти.

12.15. Ексцентриситет гіперболи рівний 4/3, її фокус знаходиться в точці (3;1), а рівняння відповідної директриси має вигляд x-2=0.

12.16. Ексцентриситет гіперболи рівний 10/9, її фокус знаходиться в точці (0;10), а рівняння відповідної директриси 10y-81=0.

У варіантах 17 – 25 скласти рівняння параболи.

12.17. Фокус параболи знаходиться в точці $F(5;3)$, а рівняння її директриси $x-y+2=0$.

12.18. Фокус параболи знаходиться в точці $F(3;2)$, а рівняння її директриси $y+2=0$.

12.19. Фокус параболи знаходиться в точці $F(6;1)$, а рівняння її директриси $x-3=0$.

12.20. Вершина параболи знаходиться в точці $A(1;1)$, а рівняння її директриси $x+y+1=0$.

12.21. Фокус параболи знаходиться в точці $F(-5;0)$, а рівняння її директриси $x-5=0$.

12.22. Фокус параболи знаходиться в точці $F(-3;-1)$, а рівняння її директриси $x+2y-4=0$.

12.23. Вершина параболи знаходиться в точці $A(4;-1)$, а рівняння її директриси $2x-y-2=0$.

12.24. Фокус параболи знаходиться в точці $F(-2;-1)$, а рівняння її директриси $x-3=0$.

12.25. Вершина параболи знаходиться в точці $A(-2;-3)$, а рівняння її директриси $2x+3y-6=0$.

12.26. Знайти точки гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, які знаходяться на віддалі 7 від її фокуса.

12.27. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{24}=1$, паралельних прямій 10x-3y+9=0.

12.28. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Скласти рівняння гіперболи, яка має з еліпсом спільні фокальні хорди.

12.29. В точці $A(\frac{10}{3};\frac{5}{3})$ проведені дотичні до еліпса, рівняння якого $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. Скласти рівняння цих дотичних.

12.30. В точці $A(10;-8)$ проведені дотичні до еліпса, рівняння якого $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Скласти рівняння хорди, яка з′єднує точки дотику.

§13. Модель Леонтьєва.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу.

Будемо вважати, що всі величини, які описують даний процес виробництва $\left(x_i, x_{ij}, y_j\right)$ вимірюються у вартісних одиницях. У такому випадку кажуть про модель міжгалузевого балансу у вартісному виразі.

Нехай x_i – загальний (валовий) об'єм продукції i-ї галузі (i=1,2,...,n);

x_{ij} – об'єм продукції i-ї галузі, яку вживає j-а галузь у процесі виробництва (j=1,2,...,n);

y_i – об′єм кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничого вживання.
Мають місце так звані співвідношення балансу:

(*)
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \ (i=1,2,...,n).$$

Система лінійних рівнянь (*) – математична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва).

Коефіцієнти прямих витрат a_{ij} показують витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ (i,j=1,2,...,n).$$

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – вектор валового випуску, Y – вектор кінцевого продукту, A – матриця прямих витрат. Тоді

$$X=AX+Y, \text{ (за формулами (*))}.$$

Звідси

$$X=(E-A)^{-1} \cdot Y, \text{ якщо } |E-A| \neq 0.$$

Матриця A називається *продуктивною*, якщо існують два вектори $Y > 0$ і $X \geq 0$ такі , що

$$X - AX = Y.$$

Продуктивність матриці A означає, що виробнича система здатна забезпечити деякий додатній кінцевий випуск по всіх видах продукту.

Однією з умов продуктивності матриці A є виконання умови

$$(E-A)^{-1} \geq 0.$$

<u>Зауваження.</u>

Матриця $S = (E-A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат.

Кожен елемент s_{ij} матриці S є величина валового випуску продукції i-ї галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі.

Зразки розв'язування задач

У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітній період, ум. грош. од.:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Галузь</th><th colspan="2">Потреби</th><th rowspan="2">Кінцевий продукт</th><th rowspan="2">Валовий випуск</th></tr>
<tr><th>Енергетика</th><th>Машинобудування</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Енергетика</td><td>7</td><td>21</td><td>72</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Машино-будування</td><td>12</td><td>15</td><td>123</td><td>150</td></tr>
</table>

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт енергетичної галузі збільшиться у двічі, а машинобудування збережеться на попередньому рівні.

Розв'язання.

Маємо: $x_1 = 100$, $x_2 = 150$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 123$.

Знаходимо коефіцієнти прямих витрат:
$a_{11} = 0{,}07$, $a_{12} = 0{,}14$, $a_{21} = 0{,}12$, $a_{22} = 0{,}1$, тобто матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи та задовольняє критерію продуктивності. Тому для будь-якого вектора кінцевого продукту Y можна знайти необхідний об'єм валового випуску X за формулою

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$:

$E-A=\begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}$. Тоді $S=(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{0,8202}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,24 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}$.

За умовою вектор кінцевого продукту $Y=\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$.

Тоді отримаємо:

$$X=S\cdot Y=\frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,24 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 179 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: валовий випуск в енергетичній галузі потрібно збільшити до 179 ум. од., а в машинобудуванні – до 160,5 ум. грош. од.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 13.

У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітний період, ум. грош. од.:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Потреби</td><td rowspan="2">Кінцевий продукт</td><td rowspan="2">Валовий випуск</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>1</td><td>100+V</td><td>160+V</td><td>240</td><td>500</td></tr>
<tr><td>2</td><td>275+V</td><td>40+V</td><td>85</td><td>400</td></tr>
</table>

З’ясувати питання про продуктивність матриці прямих витрат.

У випадку продуктивності матриці прямих витрат обчислити необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі повинен збільшитися у K разів, а другої галузі на V %.

$$K = \frac{V}{100} + 2\,.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. **Я.С. БУГРОВ, С.М. НИКОЛЬСКИЙ.** ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.– М.: НАУКА, 1980.
2. **В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.– М.: НАУКА, 1978.
3. **Н.В. ЕФИМОВ.** КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И МАТРИЦЫ.– М.: НАУКА, 1967.
4. **А.В. ЕФИМОВ, Б.П. ДЕМИДОВИЧ.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.– М.: НАУКА, 1981.
5. **В.І. ДІСКАНТ, Л.Р. БЕРЕЗА, О.П. ГРИЖУК, Л.М. ЗАХАРЕНКО.** ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.– К.: ВИЩА ШКОЛА, 2001.
6. **И.В. ПРОСКУРЯКОВ.** СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ.– М.: НАУКА, 1967.
7. **Х.Д. ИКРАМОВ.** ЗАДАЧНИК ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ.– М.: НАУКА, 1975.
8. **Г.И. КРУЧНИКОВ, Г.М. МОРДАСОВА И ДР.** СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ.– М.: ВЫСШ. ШК., 1970.
9. **Д.В. КЛЕТЕННИК.** СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.– М.: НАУКА, 1975.
10. **О.Н. ЦУБЕРБИЛЛЕР.** ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.– М.: НАУКА, 1968.
11. **П.Е. ДАНКО, А.Г. ПОПОВ, Т.Я. КОЖЕВНИКОВА.** ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ВУПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ.– М.: ВЫСШ. ШК., 1980.
12. **А.Н. РУБЛЕВ.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.–М.: ВЫСШ. ШК., 1968.
13. **Д.В. БЕКЛЕМЕШЕВ.** КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.– М.: НАУКА, 1976.
14. **Н.В. ЕФИМОВ, Э.Р. РОЗЕНДОРН.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.– М.: НАУКА, 1970.
15. **М.А. АКИВИС, В.В. ГОЛЬДБЕРГ.** ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.– М.: НАУКА, 1969.