

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З ЕЛЕМЕНТІВ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
для студентів економічних спеціальностей

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 7 від 29.01.2003 р.

Черкаси, ЧДТУ, 2003

Методичні вказівки до розрахунково-графічних завдань з елементів лінійної алгебри і аналітичної геометрії (Укл. Діскант В.І., Грижук О.П., Півненко С.І., Кондратьєва О.М.– Черкаси: ЧДТУ, 2003.)

Укладачі:	Діскант В.І. Грижук О.П. Півненко С.І. Кондратьєва О. М.
Відповідальний редактор	Дідковський Р.М.
Рецензент	Ламзіна Т.Б.

ЗМІСТ

§ 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування матричних рівнянь. Правило Крамера.....	5
Розрахункові завдання.....	7
§ 2. Лінійний простір.....	9
Розрахункові завдання.....	11
§ 3. Ранг матриці.....	14
Розрахункові завдання.....	15
§ 4. Лінійна залежність векторів.....	17
Розрахункові завдання.....	18
§ 5. Базис. Координати вектора.....	19
Розрахункові завдання.....	20
§ 6. Метод Гаусса.....	21
Розрахункові завдання.....	22
§ 7. Системи лінійних однорідних рівнянь.....	24
Розрахункові завдання.....	26
§ 8. Пряма в E_2.....	28
Розрахункові завдання.....	32
§ 9. Графічний метод розв'язування систем лінійних нерівностей.....	33
Розрахункові завдання.....	35
§ 10. Площина і пряма в E_3.....	37
Розрахункові завдання.....	41
§ 11. Площина і пряма в E_n.....	43
Розрахункові завдання.....	46
§ 12. Криві другого порядку.....	47
Розрахункові завдання.....	49
§ 13. Модель Леонтьєва.....	51
Розрахункові завдання.....	54

Передмова

Важливим фактором засвоєння математики і оволодіння її методами являється самостійна робота студентів. Дані методичні вказівки мають своєю метою активізувати самостійну роботу студентів і сприяти більш глибокому засвоєнню розділу математики "Лінійна алгебра та елементи аналітичної геометрії".

Методичні вказівки для розрахунково-графічних завдань з елементів лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів економічних спеціальностей складаються з 12 параграфів. Кожний параграф має таку структуру:

- 1) наведені посилання на відповідну учбову літературу;
- 2) зразки розв'язання типових задач;
- 3) розрахункові завдання.

Кожна задача має 30 варіантів.

Підібрані для самостійної роботи задачі дають можливість відпрацювати техніку розв'язання основних типів задач з лінійної алгебри та елементів аналітичної геометрії.

Завдання, розміщені в даних методичних вказівках можуть бути використані також для проведення практичних занять та для оцінювання знань по кредитно-модульній системі.

Методичні вказівки рекомендовані для використання студентам економічних спеціальностей.

**§ 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язування матричних рівнянь. Правило Крамера.**

Основні поняття і теореми [5, с. 25-27, 66, 67].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Розв'язати систему лінійних рівнянь двома способами:

- а) за правилом Крамера;
- б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

- а) Обчислимо детермінант матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

маємо

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

Так як визначник системи $\Delta = -9 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

В цьому прикладі маємо

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

б) Дана система рівносильна наступному матричному рівнянню

$$AX = B, \text{ де}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи можна знайти за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B, \text{ де } A^{-1} - \text{обернена до } A \text{ матриця, що має вигляд}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Так як $|A| = \Delta = -9 \neq 0$, то матриця A має обернену.

Знаходимо матрицю A^{-1} , обернену до A .

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Звідси } x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1.$$

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь двома способами:

а) за правилом Крамера;

б) матричним способом.

1.1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$	1.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$	1.15. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$
1.2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$	1.9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$	1.16. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$
1.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$	1.10. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$	1.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$
1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$	1.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -22. \end{cases}$	1.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$
1.5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$	1.12. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 14, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 13. \end{cases}$	1.19. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$
1.6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 17, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$	1.13. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$	1.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$
1.7. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$	1.14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 16, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 14. \end{cases}$	1.21. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$

$$\begin{array}{l}
1.22. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 4. \end{cases} \\
1.23. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases} \\
1.24. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 = -7, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \\
1.25. \begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases} \\
1.26. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \\
1.27. \begin{cases} -4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases} \\
1.28. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 37. \end{cases} \\
1.29. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15. \end{cases} \\
1.30. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 15, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}
\end{array}$$

§ 2. Лінійний простір.

Основні поняття і теореми [5, ст. 40 – 43].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Перевірити, чи є лінійним простором множина L квадратичних матриць 2-го порядку з дійсними елементами, якщо за операції додавання елементів і множення числа на елемент цієї множини взяти операції додавання матриць і множення матриці на число.

Розв'язання.

Нехай

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} -$$

довільні матриці цієї множини. Тоді

$$\vec{X} + \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix},$$

$$\lambda \vec{X} = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix}, \text{ де } \lambda \in R.$$

Перевіримо виконання аксіом 1 – 8. Для операцій додавання матриць $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ мають місце такі властивості:

1. $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$.
2. $\vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) = (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z}$.

Справді:

$$1. \vec{X} + \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix},$$

$$\vec{Y} + \vec{X} = \begin{pmatrix} y_{11} + x_{11} & y_{12} + x_{12} \\ y_{21} + x_{21} & y_{22} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix},$$

тобто $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$.

$$2. \vec{X} + \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{Y} + \vec{Z} = \begin{pmatrix} y_{11} + z_{11} & y_{12} + z_{12} \\ y_{21} + z_{21} & y_{22} + z_{22} \end{pmatrix},$$

$$(\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} + z_{11} & x_{12} + y_{12} + z_{12} \\ x_{21} + y_{21} + z_{21} & x_{22} + y_{22} + z_{22} \end{pmatrix},$$

$$\vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} + z_{11} & x_{12} + y_{12} + z_{12} \\ x_{21} + y_{21} + z_{21} & x_{22} + y_{22} + z_{22} \end{pmatrix}.$$

Отже, $(\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z})$. Це означає, що для елементів даної множини виконується перша і друга аксіоми означення лінійного простору.

3. Нульовим вектором є $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Дійсно

$$\vec{X} + \vec{O} = \begin{pmatrix} x_{11} + 0 & x_{12} + 0 \\ x_{21} + 0 & x_{22} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \vec{X}.$$

Це означає виконання для L третьої аксіоми означення лінійного простору.

4. Вектор $\vec{X}' = \begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{12} \\ -x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix}$ є протилежним вектору $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$,

$$\text{оскільки } \vec{X} + \vec{X}' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{12} \\ -x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{O}.$$

Це означає виконання для L четвертої аксіоми означення лінійного простору.

$$5. 1 \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_{11} & 1 \cdot x_{12} \\ 1 \cdot x_{21} & 1 \cdot x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \vec{X}.$$

$$6. \lambda(\mu \vec{X}) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_{11} & \mu x_{12} \\ \mu x_{21} & \mu x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mu x_{11} & \lambda \mu x_{12} \\ \lambda \mu x_{21} & \lambda \mu x_{22} \end{pmatrix} = (\lambda \mu) \vec{X}.$$

$$7. (\lambda + \mu) \vec{X} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_{11} & (\lambda + \mu)x_{12} \\ (\lambda + \mu)x_{21} & (\lambda + \mu)x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_{11} & \mu x_{12} \\ \mu x_{21} & \mu x_{22} \end{pmatrix} = \\ = \lambda \vec{X} + \mu \vec{X}.$$

$$8. \lambda(\vec{X} + \vec{Y}) = \lambda \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_{11} + y_{11}) & \lambda(x_{12} + y_{12}) \\ \lambda(x_{21} + y_{21}) & \lambda(x_{22} + y_{22}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_{11} & \lambda y_{12} \\ \lambda y_{21} & \lambda y_{22} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \lambda \vec{X} + \lambda \vec{Y}.$$

Це означає, що для елементів даної множини виконуються п'ята, шоста, сьома і восьма аксіоми означення лінійного простору.

Отже, множина L квадратних матриць 2-го порядку є лінійним простором.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 2.

Визначити, чи утворює лінійний простір множина елементів, заданих в умові задачі.

2.1. Множина R_2 всіх упорядкованих пар дійсних чисел $\vec{x}(\alpha_1; \alpha_2)$ з операціями:

а) якщо $\vec{x} = (\alpha_1; \alpha_2)$ і $\vec{y} = (\beta_1; \beta_2)$, то $\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2)$;

б) для довільного дійсного числа λ , $\lambda\vec{x} = (\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2)$.

2.2. Множина дійсних чисел зі звичайними операціями додавання та множення.

2.3. Множина S' всіх нескінчених послідовностей дійсних чисел $\vec{x} = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n; \dots)$. В S' введені операції:

а) якщо $\vec{x} = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n; \dots)$ і $\vec{y} = (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n; \dots)$, то $\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \dots; \alpha_n + \beta_n; \dots)$;

б) для довільного дійсного числа λ , $\lambda\vec{x} = (\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \dots; \lambda\alpha_n; \dots)$.

2.4. Множина R^+ додатніх дійсних чисел, в якій операції додавання і множення на число означені таким чином:

а) сума двох елементів $\vec{x} = x$ і $\vec{y} = y$ цієї множини дорівнює добутку цих дійсних чисел xu ;

б) добуток елемента \vec{x} на дійсне число λ визначимо як піднесення дійсного додатнього числа x до степеня λ .

2.5. Множина матриць-рядків довжини n з операціями додавання і множення на число для матриць.

2.6. Множина матриць-стовпчиків висоти n з операціями додавання і множення на число для матриць.

2.7. Множина прямокутних матриць $m \times n$, якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

2.8. Множина всіх квадратних матриць порядку n , якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

2.9. Множина всіх діагональних матриць $A = \|a_{ik}\|, B = \|b_{ik}\|$ однакового розміру $n \times n$, якщо за операцію суми на цій множині взяти добуток матриць $- AB$, а добуток A на число λ дорівнює λA .

2.10. Множина функцій $f(t) = a_1 e^t + a_2 e^{2t} + \dots + a_n e^{nt}$, де a_1, a_2, a_n – довільні дійсні числа з природно введеними операціями додавання функцій і множення функції на число.

2.11. Множина $P_2(t)$ всіх багаточленів 2-го степеня $P_2(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ з природно введеними операціями додавання багаточленів і множення їх на число.

- 2.12. Множина функцій $f(t) = ae^t + be^{-t}$ з природно введеними операціями додавання функцій і множення функції на число.
- 2.13. Множина всіх парних функцій $u = f(t), v = g(t)$, заданих на відрізку $[-t, t]$, якщо сума $f(t)$ і $g(t)$ дорівнює $f(t) \cdot g(t)$, а добуток α на $f(t)$ дорівнює $\alpha f(t)$.
- 2.14. Множина всіх лінійних функцій $u = f(x, y), v = g(x, y)$, якщо сума $f(x, y)$ і $g(x, y)$ дорівнює $f(x, y) + g(x, y)$, а добуток α на $f(x, y)$ дорівнює $\alpha f(x, y)$.
- 2.15. Множина $C_{[a,b]}$ усіх функцій $x = x(t)$, означених і неперервних на відрізку $a \leq t \leq b$, із звичайними операціями додавання двох функцій і множення функції на дійсне число.
- 2.16. Множина всіх функцій інтегрованих на відрізку $[a, b]$, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
- 2.17. Множина всіх функцій диференційованих на відрізку $[a, b]$, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
- 2.18. Множина тригонометричних багаточленів порядку $\leq n$, тобто множина функцій, що мають вигляд:

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

- 2.19. Множина функцій вигляду

$$f(t) = e^{\alpha t} (a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

де α - фіксоване дійсне число, з природно введеними операціями додавання функцій і множення їх на число.

- 2.20. Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

- 2.21. Множина V_θ , яка складається з одного елемента θ . Операції в V_θ означені таким чином: $\theta + \theta = \theta, \lambda\theta = \theta$.
- 2.22. Множина всіх збіжних послідовностей, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
- 2.23. Множина всіх розбіжних послідовностей, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

Перевірити чи є лінійним простором множини векторів на площині із звичайними операціями додавання векторів і множення вектора на число (вважається, що початок кожного вектора співпадає з початком координат):

- 2.24. Усі вектори, кінці яких лежать на даній прямій.
- 2.25. Усі вектори, кінці яких лежать в першій чверті системи координат.
- 2.26. Усі вектори, кінці яких лежать в першій, або в другій чверті.
- 2.27. Усі вектори, кінці яких лежать в першій, або в третій чверті.

- 2.28. Усі вектори, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 = 0$.
- 2.29. Усі вектори, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 = 1$.
- 2.30. Усі вектори, кінці яких лежать в першій, або в четвертій чверті.

§ 3. Ранг матриці.

Основні поняття і теореми [5, с. 61 – 64].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Обчислити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Виконуємо такі елементарні перетворення матриці A . Переставивши місцями 1-й і 3-й стовпці матриці A , дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до елементів 2-го рядка елементи 1-го рядка, а до 3-го елементи 1-го рядка, помножені на (-5) . Тоді маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Додаючи до 3-го рядка елементи 2-го, помножені на 3, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здобули трапецієподібну матрицю, для якої $l = 2$. Отже, $r(A) = 2$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 3.

Знайти ранг матриці.

- | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.1. | 3.2. | 3.3. |
| $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 12 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 3.4. | 3.5. | 3.6. |
| $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 3.7. | 3.8. | 3.9. |
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ |
| 3.10. | 3.11. | 3.12. |
| $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 3.13. | 3.14. | 3.15. |
| $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3.16. | 3.17. | 3.18. |
| $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -7 & -1 & -3 \\ 10 & -18 & 2 & -23 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 12 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 3.19. | 3.20. | 3.21. |
| $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 9 \\ 5 & -7 & 0 & 10 & -9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |

$$3.22. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.23. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.24. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3.25. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3.26. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$3.27. \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.28. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3.29. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3.30. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

§ 4. Лінійна залежність векторів.

Основні поняття і теореми [5, ст. 35 – 36].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Дослідити на лінійну залежність систему векторів:

$$\vec{a}(2;5;6;3), \vec{b}(-1;2;3;4), \vec{c}(1;3;5;2).$$

Розв'язання.

Складемо матрицю A з координат даних векторів

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ в якій елементи першого рядка – координати вектора } \vec{a},$$

другого – координати вектора \vec{b} , третього – координати вектора \vec{c} .

Знайдемо ранг цієї матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Маємо $\text{rang } A = 3$, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні.

Так як ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як вектори лінійного простору L_4 лінійно незалежні.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 4.

Дослідити на лінійну залежність систему векторів.

- | | | | |
|-------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| 4.1. | $\vec{a}(2;3;1;1),$ | $\vec{b}(-1;0;-1;2),$ | $\vec{c}(2;2;2;-1).$ |
| 4.2. | $\vec{a}(3;2;1;4),$ | $\vec{b}(2;3;4;1),$ | $\vec{c}(3;1;-1;4).$ |
| 4.3. | $\vec{a}(1;5;2;3),$ | $\vec{b}(-1;1;-1;0),$ | $\vec{c}(1;1;1;-1).$ |
| 4.4. | $\vec{a}(1;-1;-3;1),$ | $\vec{b}(3;2;1;4),$ | $\vec{c}(2;3;4;2).$ |
| 4.5. | $\vec{a}(3;3;1;5),$ | $\vec{b}(1;-2;1;3),$ | $\vec{c}(1;1;1;3).$ |
| 4.6. | $\vec{a}(3;1;-1;3),$ | $\vec{b}(-2;-1;0;1),$ | $\vec{c}(5;2;-1;2).$ |
| 4.7. | $\vec{a}(4;3;1;1),$ | $\vec{b}(1;-2;1;-1),$ | $\vec{c}(2;2;2;1).$ |
| 4.8. | $\vec{a}(4;3;2;1),$ | $\vec{b}(6;7;4;1),$ | $\vec{c}(2;0;-1;1).$ |
| 4.9. | $\vec{a}(3;2;1;-1),$ | $\vec{b}(1;-3;-7;1),$ | $\vec{c}(1;2;3;3).$ |
| 4.10. | $\vec{a}(3;7;2;1)$ | $\vec{b}(-2;0;-1;2),$ | $\vec{c}(2;2;1;2).$ |
| 4.11. | $\vec{a}(1;-2;6;1),$ | $\vec{b}(1;0;1;3),$ | $\vec{c}(2;-6;17;4).$ |
| 4.12. | $\vec{a}(6;3;4;3),$ | $\vec{b}(-1;-2;-1;2),$ | $\vec{c}(2;1;2;2).$ |
| 4.13. | $\vec{a}(7;3;4;1),$ | $\vec{b}(-1;-2;-1;3),$ | $\vec{c}(4;2;4;1).$ |
| 4.14. | $\vec{a}(2;3;2;-1),$ | $\vec{b}(4;7;5;2),$ | $\vec{c}(2;0;-1;2).$ |
| 4.15. | $\vec{a}(5;3;4;3),$ | $\vec{b}(-1;0;-1;1),$ | $\vec{c}(4;2;4;1).$ |
| 4.16. | $\vec{a}(3;10;5;-1),$ | $\vec{b}(-2;-3;-2;1),$ | $\vec{c}(2;4;1;1).$ |
| 4.17. | $\vec{a}(-2;-4;-3;1),$ | $\vec{b}(4;3;1;-1),$ | $\vec{c}(1;6;7;4).$ |
| 4.18. | $\vec{a}(3;1;-1;2),$ | $\vec{b}(1;0;-1;2),$ | $\vec{c}(8;3;-2;1).$ |
| 4.19. | $\vec{a}(4;2;2;1),$ | $\vec{b}(-3;-3;-3;1),$ | $\vec{c}(2;1;2;1).$ |
| 4.20. | $\vec{a}(4;1;2;-1),$ | $\vec{b}(9;2;5;4),$ | $\vec{c}(1;-1;1;-1).$ |
| 4.21. | $\vec{a}(5;3;4;1),$ | $\vec{b}(4;3;3;1),$ | $\vec{c}(9;5;8;2).$ |
| 4.22. | $\vec{a}(3;4;2;2),$ | $\vec{b}(1;1;0;1),$ | $\vec{c}(8;11;6;1).$ |
| 4.23. | $\vec{a}(4;-1;-6;1),$ | $\vec{b}(1;-2;-7;3),$ | $\vec{c}(2;-1;-4;2).$ |
| 4.24. | $\vec{a}(3;1;0;1),$ | $\vec{b}(-5;-4;-5;2),$ | $\vec{c}(4;2;4;1).$ |
| 4.25. | $\vec{a}(3;0;3;2),$ | $\vec{b}(8;1;6;-1),$ | $\vec{c}(1;1;-1;2).$ |
| 4.26. | $\vec{a}(1;-1;4;2),$ | $\vec{b}(1;0;3;1),$ | $\vec{c}(1;-3;8;2).$ |
| 4.27. | $\vec{a}(6;3;4;2),$ | $\vec{b}(-1;-2;-1;4),$ | $\vec{c}(2;1;2;-1).$ |
| 4.28. | $\vec{a}(4;1;1;3),$ | $\vec{b}(-9;-4;-9;1),$ | $\vec{c}(6;2;6;3).$ |
| 4.29. | $\vec{a}(-3;3;3;5),$ | $\vec{b}(-4;7;6;3),$ | $\vec{c}(3;0;-1;2).$ |
| 4.30. | $\vec{a}(-7;10;-5;9),$ | $\vec{b}(0;-2;-1;0),$ | $\vec{c}(-2;4;-1;1).$ |

§5. Базис. Координати вектора.

Основні поняття і теореми [5, ст. 45 – 47].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис в L_3 і знайти координати вектора \vec{x} в цьому базисі:

$$\vec{e}_1 = (2; 1; 7), \vec{e}_2 = (1; -2; 1), \vec{e}_3 = (-1; 2; -2), \vec{x} = (5; -5; 12).$$

Розв'язання.

Покажемо, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійно незалежні. Складемо матрицю A , елементами якої будуть координати векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ранг матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо $\text{rang } A = 3$, отже вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійно незалежні.

Будь-які три лінійно незалежні вектори утворюють в базис. Знайдемо координати α, β, γ вектора \vec{x} цьому базисі.

Маємо

$$\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3,$$

або

$$(5, -5, 12) = \alpha(2, 1, 7) + \beta(1, -2, 1) + \gamma(-1, 2, -2).$$

$$\text{Звідки } \begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta - \gamma, \\ -5 = \alpha - 2\beta + 2\gamma, \\ 12 = 7\alpha + \beta - 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 5 \\ \alpha - 2\beta + 2\gamma = -5, \\ 7\alpha + \beta - 2\gamma = 12. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему матричним способом, або по формулах Крамера, знаходимо $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$.

Отже, $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 5.

Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис в L_3 і знайти координати вектора \vec{x} в цьому базисі.

- | | | | |
|-------------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| 5.1. $\vec{e}_1=(1,2,1),$ | $\vec{e}_2=(-2,3,3),$ | $\vec{e}_3=(-1,-9,-5),$ | $\vec{x}=(1,2,2).$ |
| 5.2. $\vec{e}_1=(2,7,6),$ | $\vec{e}_2=(-4,1,7),$ | $\vec{e}_3=(9,-1,3),$ | $\vec{x}=(22,-3,-1).$ |
| 5.3. $\vec{e}_1=(2,1,3),$ | $\vec{e}_2=(1,-1,4),$ | $\vec{e}_3=(-1,7,5),$ | $\vec{x}=(2,7,12).$ |
| 5.4. $\vec{e}_1=(1,1,1),$ | $\vec{e}_2=(1,2,-3),$ | $\vec{e}_3=(-1,3,2),$ | $\vec{x}=(-1,17,3).$ |
| 5.5. $\vec{e}_1=(4,3,2),$ | $\vec{e}_2=(3,2,1),$ | $\vec{e}_3=(2,1,5),$ | $\vec{x}=(2,3,-2).$ |
| 5.6. $\vec{e}_1=(5,7,1),$ | $\vec{e}_2=(3,5,7),$ | $\vec{e}_3=(7,1,3),$ | $\vec{x}=(0,8,-8).$ |
| 5.7. $\vec{e}_1=(1,2,-1),$ | $\vec{e}_2=(-1,-3,3),$ | $\vec{e}_3=(-1,3,-1),$ | $\vec{x}=(-1,2,1).$ |
| 5.8. $\vec{e}_1=(-3,4,-1),$ | $\vec{e}_2=(1,1,4),$ | $\vec{e}_3=(6,5,3),$ | $\vec{x}=(6,5,3).$ |
| 5.9. $\vec{e}_1=(2,1,5),$ | $\vec{e}_2=(1,-1,2),$ | $\vec{e}_3=(-1,1,2),$ | $\vec{x}=(2,1,-1).$ |
| 5.10. $\vec{e}_1=(1,3,-1),$ | $\vec{e}_2=(1,-1,2),$ | $\vec{e}_3=(1,2,3),$ | $\vec{x}=(4,3,6).$ |
| 5.11. $\vec{e}_1=(1,-1,2),$ | $\vec{e}_2=(2,-2,1),$ | $\vec{e}_3=(-3,1,1),$ | $\vec{x}=(4,-4,5).$ |
| 5.12. $\vec{e}_1=(1,-2,1),$ | $\vec{e}_2=(2,3,4),$ | $\vec{e}_3=(3,4,-3),$ | $\vec{x}=(-2,-8,8).$ |
| 5.13. $\vec{e}_1=(-1,4,3),$ | $\vec{e}_2=(2,-1,4),$ | $\vec{e}_3=(3,2,1),$ | $\vec{x}=(-2,22,-4).$ |
| 5.14. $\vec{e}_1=(1,2,4),$ | $\vec{e}_2=(2,3,1),$ | $\vec{e}_3=(-3,1,-2),$ | $\vec{x}=(1,8,7).$ |
| 5.15. $\vec{e}_1=(3,-2,1),$ | $\vec{e}_2=(2,1,3),$ | $\vec{e}_3=(-1,1,2),$ | $\vec{x}=(5,-3,4).$ |
| 5.16. $\vec{e}_1=(1,5,3),$ | $\vec{e}_2=(2,1,1),$ | $\vec{e}_3=(3,-2,1),$ | $\vec{x}=(7,-7,-3).$ |
| 5.17. $\vec{e}_1=(0,-4,-3),$ | $\vec{e}_2=(3,0,1),$ | $\vec{e}_3=(5,-2,1),$ | $\vec{x}=(-3,2,2).$ |
| 5.18. $\vec{e}_1=(4,3,-1),$ | $\vec{e}_2=(-2,-2,2),$ | $\vec{e}_3=(-3,-4,3),$ | $\vec{x}=(1,2,-1).$ |
| 5.19. $\vec{e}_1=(1,1,-1),$ | $\vec{e}_2=(3,4,5),$ | $\vec{e}_3=(1,2,3),$ | $\vec{x}=(-2,-3,-10).$ |
| 5.20. $\vec{e}_1=(2,4,1),$ | $\vec{e}_2=(-2,3,-4),$ | $\vec{e}_3=(1,-1,2),$ | $\vec{x}=(-6,3,-9).$ |
| 5.21. $\vec{e}_1=(-3,-2,-4),$ | $\vec{e}_2=(2,3,3),$ | $\vec{e}_3=(-2,1,-1),$ | $\vec{x}=(4,8,7).$ |
| 5.22. $\vec{e}_1=(7,-1,1),$ | $\vec{e}_2=(2,3,-4),$ | $\vec{e}_3=(4,2,-1),$ | $\vec{x}=(1,-2,15).$ |
| 5.23. $\vec{e}_1=(1,-1,4),$ | $\vec{e}_2=(4,5,-6),$ | $\vec{e}_3=(-2,3,-1),$ | $\vec{x}=(8,-1,-4).$ |
| 5.24. $\vec{e}_1=(2,3,1),$ | $\vec{e}_2=(1,1,3),$ | $\vec{e}_3=(3,2,2),$ | $\vec{x}=(5,1,11).$ |
| 5.25. $\vec{e}_1=(1,5,3),$ | $\vec{e}_2=(2,1,-1),$ | $\vec{e}_3=(4,2,1),$ | $\vec{x}=(31,29,10).$ |
| 5.26. $\vec{e}_1=(1,-1,1),$ | $\vec{e}_2=(4,2,2),$ | $\vec{e}_3=(4,2,1),$ | $\vec{x}=(-2,-4,-1).$ |
| 5.27. $\vec{e}_1=(1,-1,1),$ | $\vec{e}_2=(-3,1,2),$ | $\vec{e}_3=(1,2,3),$ | $\vec{x}=(6,5,7).$ |
| 5.28. $\vec{e}_1=(1,3,2),$ | $\vec{e}_2=(-5,4,-3),$ | $\vec{e}_3=(2,-1,5),$ | $\vec{x}=(10,-3,15).$ |
| 5.29. $\vec{e}_1=(2,3,3),$ | $\vec{e}_2=(-1,4,-2),$ | $\vec{e}_3=(-1,-2,4),$ | $\vec{x}=(4,11,11).$ |
| 5.30. $\vec{e}_1=(-2,4,1),$ | $\vec{e}_2=(1,7,-8),$ | $\vec{e}_3=(-3,-2,5),$ | $\vec{x}=(-4,9,2).$ |

§ 6. Метод Гаусса.

Основні поняття і теореми [5, ст. 70]

Зразки розв'язування задач

Задача.

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язання.

Маємо

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -8 & -3 & 1 & -21 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 21 & 9 & 99 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 30 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 33 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -72 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Звідси $r(A) = r(B)$. Система сумісна. Оскільки ранг матриці A дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, який знайдемо, записавши перетворену систему за здобутою матрицею. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ x_3 + 3x_4 = 15, \\ -18x_4 = -72. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{aligned} x_4 &= 4, \\ x_3 &= 15 - 3x_4 = 15 - 12 = 3, \\ x_2 &= 15 - 3x_3 - x_4 = 15 - 9 - 4 = 2, \\ x_1 &= 8 - 2x_2 - x_3 = 8 - 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

або

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4).$$

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 6. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$6.1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$6.2. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

$$6.3. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$$

$$6.4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

$$6.5. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

$$6.6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$6.7. \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

$$6.8. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 10x_5 = -22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -7, \\ x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 18x_5 = -39. \end{cases}$$

$$6.9. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 + 3x_5 = 1, \\ 8x_1 - 12x_2 + 12x_3 + 17x_4 + 5x_5 = 4. \end{cases}$$

$$6.10. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 25, \\ 15x_1 + 20x_2 + 6x_3 + 11x_4 - 7x_5 = 16. \end{cases}$$

$$6.11. \begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 21x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 22, \\ 3x_1 + 13x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 20. \end{cases}$$

$$6.12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 - x_5 = 18, \\ 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 18x_4 + 4x_5 = 17. \end{cases}$$

$$6.13. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 8, \\ 15x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 19. \end{cases}$$

$$6.14. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

$$6.15. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$6.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$6.17. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15, \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

$$6.18. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 17x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 14x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6.19. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 6. \end{cases}$$

$$6.20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

$$6.21. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 + -2x_4 = -2. \end{cases}$$

$$6.29. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

$$6.22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 8. \end{cases}$$

$$6.23. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

$$6.24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6.25. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

$$6.26. \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5, \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 32. \end{cases}$$

$$6.27. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 13x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases}$$

$$6.28. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \\ 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 18x_4 = 17. \end{cases}$$

$$6.30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 9, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 14. \end{cases}$$

§ 7. Системи лінійних однорідних рівнянь.

Основні поняття і теореми [5, ст. 79 – 81].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо основну матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Одержали трапецієподібну матрицю B рівносильну матриці A . Дана система рівносильна системі, для якої основною матрицею є матриця B , тобто дана система рівносильна системі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_4 - 3x_5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

В цій системі x_1, x_2, x_4 є базисні, x_3, x_5 – вільні невідомі. Розв'яжемо цю систему, тобто виразимо базисні невідомі через вільні. Маємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = -x_3, \\ x_4 = -x_5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -x_3, \\ x_4 = -x_5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_2 = -1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_4 = 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_5, \\ x_5 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5. \end{cases}$$

Тобто

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, -1, 1, 0, 0)x_3 + (0, 0, 0, -1, 1)x_5,$$

або $\vec{x} = x_3 \cdot \vec{c}_1 + x_5 \cdot \vec{c}_2$, де $\vec{c}_1 = (0, -1, 1, 0, 0)$ і $\vec{c}_2 = (0, 0, 0, -1, 1)$.

Ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, складеної з координат векторів \vec{c}_1, \vec{c}_2

дорівнює 2, отже вектори \vec{c}_1, \vec{c}_2 – лінійно незалежні в L^5 . Вектори \vec{c}_1, \vec{c}_2 утворюють базис у підпросторі розв'язків, так як будь-який вектор-розв'язок \vec{x} даної системи має вигляд $\vec{x} = x_3 \cdot \vec{c}_1 + x_5 \cdot \vec{c}_2$, тобто є лінійною комбінацією лінійно незалежних векторів \vec{c}_1, \vec{c}_2 . Так як базис підпростору розв'язків складається з двох векторів \vec{c}_1, \vec{c}_2 , то розмірність підпростору розв'язків дорівнює двом (числу вільних невідомих).

Відповідь: Вектори $\vec{c}_1 = (0, -1, 1, 0, 0), \vec{c}_2 = (0, 0, 0, -1, 1)$ утворюють базис підпростору розв'язків даної системи лінійних рівнянь, розмірність цього підпростору дорівнює 2.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 7.

Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.

$$7.1. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.4. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.6. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.7. \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.8. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.9. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$7.10. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$7.11. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.12. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.13. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.14. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$7.15. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.16. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.17. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.18. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.19. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.21. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.23. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.24. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.25. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.26. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.28. \begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7.29. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$7.30. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

§ 8. Пряма в E_2 .

Основні поняття і теореми [5, ст. 140 – 144].

Зразки розв'язування задач

Задача.

Дано координати вершин трикутника $A_1(1;1)$, $A_2(10;13)$, $A_3(13;6)$.

Знайти:

- 1) рівняння сторони A_1A_2 ;
- 2) рівняння висоти, опущеної з вершини A_3 на сторону A_1A_2 і обчислити її довжину;
- 3) точку перетину медіан;
- 4) рівняння бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A_1 ;
- 5) рівняння прямої, що проходить через A_2 паралельно прямій A_1A_3 , і знайти відстань між цими прямими.

Розв'язання.

Побудуємо рисунок до задачі.

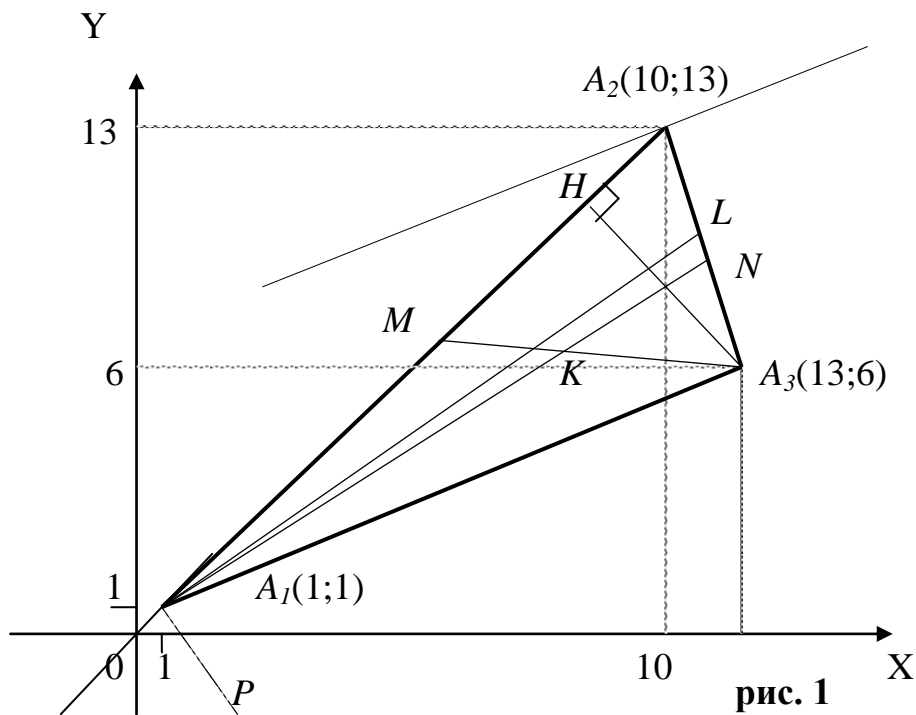


рис. 1

На рисунку 1:

A_1N – медіана, опущена з вершини A_1 на сторону A_2A_3 , A_1L – бісектриса кута A_1 , A_3H – медіана опущена з вершини A_3 на сторону A_1A_2 , A_3M – медіана опущена з вершини A_3 на сторону A_1A_2 .

1) Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тому рівняння сторони A_1A_2 :

$$\frac{x - 1}{10 - 1} = \frac{y - 1}{13 - 1} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{9} = \frac{y - 1}{12} \Leftrightarrow 4x - 3y - 1 = 0.$$

2) Канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{l} = (p; q)$ має вигляд

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Висота A_3H проходить через точку $A_3(13; 6)$ і паралельна вектору $\vec{n} = (4; -3)$, вектора колінеарного прямій A_3H . В даному випадку – це вектор перпендикулярний прямій A_1A_2 , тобто нормальний вектор прямої A_1A_2 : $\vec{n} = (4; -3)$. Отже, рівняння висоти

$$A_3H: \frac{x - 13}{4} = \frac{y - 6}{-3} \Leftrightarrow 3x + 4y - 63 = 0.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Довжина висоти A_3H дорівнює відстані від точки A_3 до прямої A_1A_2 , тому

$$|A_3H| = \frac{|4 \cdot 13 - 3 \cdot 6 - 63|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{33}{5}.$$

3) K – точка перетину медіан A_1N , A_3M . Знайдемо рівняння медіани A_3M :

$$\frac{x - 13}{\frac{11}{2} - 13} = \frac{y - 6}{7 - 6} \Leftrightarrow 2x + 15y - 116 = 0,$$

де $M\left(\frac{11}{2}; 7\right)$ – середина відрізка A_1A_2 .

Знайдемо рівняння медіани A_1N :

$$\frac{x - 1}{\frac{23}{2} - 1} = \frac{y - 1}{\frac{19}{2} - 1} \Leftrightarrow 17x - 21y + 4 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 15y - 116 = 0, \\ 17x - 21y + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = \frac{20}{3}, \end{cases}$

знайдемо координати точки $K\left(8; \frac{20}{3}\right)$.

4) Нехай точка L – точка перетину бісектриси внутрішнього кута при вершині A_1 із стороною A_2A_3 . Координати точки K знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Із властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника слідує, що

$$\frac{|A_2L|}{|LA_3|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|} = \lambda.$$

Так як

$$\begin{aligned} |A_1A_2| &= \sqrt{(10-1)^2 + (13-1)^2} = \sqrt{225} = 15, \\ |A_1A_3| &= \sqrt{(13-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{169} = 13, \end{aligned}$$

то $\lambda = \frac{15}{13}$.

Знаходимо координати точки L :

$$x = \frac{10 + \frac{15}{13} \cdot 13}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{325}{28}, \quad y = \frac{13 + \frac{15}{13} \cdot 6}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{259}{28}.$$

Отже, $L\left(\frac{325}{28}; \frac{259}{28}\right)$.

Рівняння прямої A_1L – бісектриси внутрішнього кута при вершині A_1 :

$$\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1} = \frac{y-1}{\frac{259}{28}-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{297} = \frac{y-1}{231} \Leftrightarrow 7x - 9y + 2 = 0.$$

Бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів взаємно перпендикулярні, тому для знаходження рівняння бісектриси зовнішнього кута, скористаємось канонічним рівнянням прямої $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$. За напрямний вектор бісектриси зовнішнього кута при вершині A_1 , прийmemo вектор $\vec{n}(7;-9)$ – нормальний вектор прямої A_1L : $\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{-9} \Leftrightarrow 9x + 7y - 16 = 0$.

5) Скористаємось канонічним рівнянням прямої

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q},$$

$(x_0; y_0)$ – координати точки $A_2(10;13)$.

За напрямний вектор $(p; q)$ візьmemo вектор $\vec{A_1A_3} = (12;5)$.

Рівняння прямої, що проходить через точку A_2 паралельно прямій

$$A_1A_3: \frac{x-10}{12} = \frac{y-13}{5} \Leftrightarrow 5(x-10) = 12(y-13) \Leftrightarrow \mathbf{5x - 12y + 106 = 0}.$$

Знайdemo відстань між цими прямими, як відстань від точки $A_1(1;1)$ до прямої $5x - 12y + 106 = 0$, тобто $d = \frac{|5 \cdot 1 - 12 \cdot 1 + 106|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{99}{13}$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 8.

Дано координати вершин трикутника A_1, A_2, A_3 . Знайти:

- 1) рівняння сторін A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 ;
- 2) рівняння висоти, опущеної з вершини A_1 на сторону A_2A_3 і обчислити її довжину;
- 3) точку перетину медіан трикутника;
- 4) рівняння бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A_2 .
- 5) рівняння прямої, що проходить через A_2 паралельно прямій A_1A_3 , і знайти відстань між цими прямими.

8.1. $A_1(3;3),$	$A_2(-1;0),$	$A_3(7;-6).$
8.2. $A_1(5;-2),$	$A_2(1;1),$	$A_3(-7;-5).$
8.3. $A_1(6;1),$	$A_2(2;-2),$	$A_3(10;-8).$
8.4. $A_1(7;0),$	$A_2(3;-3),$	$A_3(-5;3).$
8.5. $A_1(-3;-3),$	$A_2(1;0),$	$A_3(-7;6).$
8.6. $A_1(-2;-4),$	$A_2(2;-1),$	$A_3(-6;5).$
8.7. $A_1(-1;-5),$	$A_2(3;-2),$	$A_3(-5;4).$
8.8. $A_1(9;2),$	$A_2(5;5),$	$A_3(-3;-1).$
8.9. $A_1(8;-1),$	$A_2(4;2),$	$A_3(-4;-4).$
8.10. $A_1(-4;-2),$	$A_2(0;1),$	$A_3(-7;6).$
8.11. $A_1(-5;-2),$	$A_2(-1;1),$	$A_3(7;-5).$
8.12. $A_1(6;1),$	$A_2(2;-2),$	$A_3(10;-8).$
8.13. $A_1(-7;0),$	$A_2(-3;3),$	$A_3(5;-3).$
8.14. $A_1(-8;1),$	$A_2(-4;-2),$	$A_3(4;4).$
8.15. $A_1(-9;-2),$	$A_2(-5;-5),$	$A_3(3;1).$
8.16. $A_1(7;8),$	$A_2(3;5),$	$A_3(11;-1).$
8.17. $A_1(6;7),$	$A_2(2;4),$	$A_3(10;-2).$
8.18. $A_1(4;5),$	$A_2(0;2),$	$A_3(8;-4).$
8.19. $A_1(5;6),$	$A_2(1;3),$	$A_3(9;-3).$
8.20. $A_1(3;3),$	$A_2(-1;0),$	$A_3(7;-6).$
8.21. $A_1(7;5),$	$A_2(11;2),$	$A_3(3;-4).$
8.22. $A_1(8;6),$	$A_2(4;3),$	$A_3(12;-3).$
8.23. $A_1(6;4),$	$A_2(10;1),$	$A_3(2;-5).$
8.24. $A_1(0;6),$	$A_2(4;3),$	$A_3(-4;-3).$
8.25. $A_1(-1;-5),$	$A_2(-5;-2),$	$A_3(3;4).$
8.26. $A_1(-2;-6),$	$A_2(-6;-3),$	$A_3(2;3).$
8.27. $A_1(-1;-2),$	$A_2(7;4),$	$A_3(3;7).$
8.28. $A_1(0;-3),$	$A_2(8;3),$	$A_3(4;6).$
8.29. $A_1(13;-4),$	$A_2(5;2),$	$A_3(9;6).$
8.30. $A_1(1;-4),$	$A_2(9;2),$	$A_3(5;5).$

§ 9. Графічний метод розв'язування систем лінійних нерівностей.

Зразки розв'язування задач

Задача.

Знайти графічним методом множину невід'ємних розв'язків ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) системи нерівностей:

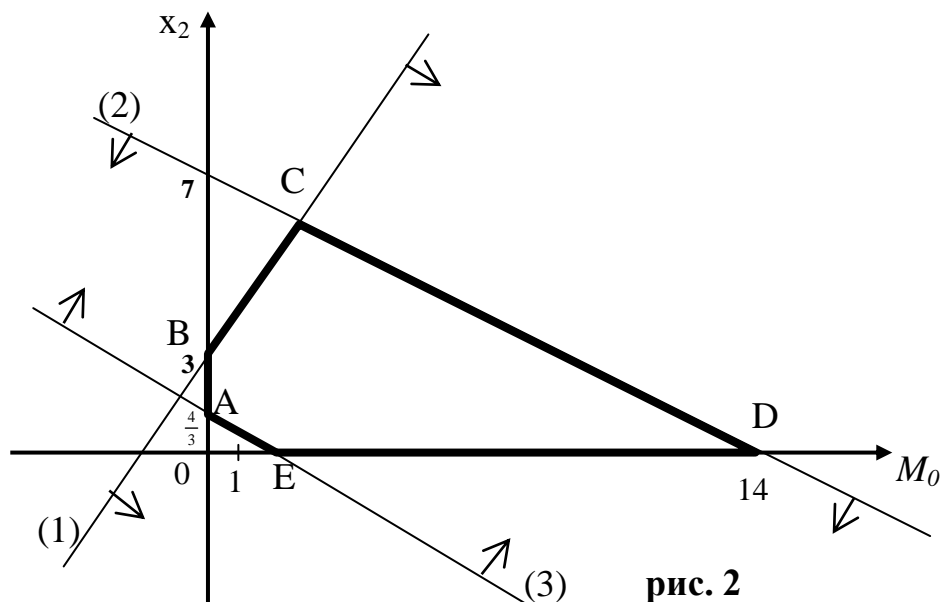
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 56, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4. \end{cases}$$

Розв'язання.

Множиною розв'язків лінійної нерівності з двома невідомими є півплощина, що лежить по одну сторону від граничної прямої, рівняння якої можна отримати, якщо замінити знак нерівності знаком рівності. Таким чином, отримаємо в даній задачі рівняння трьох граничних прямих:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 6, & (1) \\ 4x_1 + 8x_2 &= 56, & (2) \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4. & (3) \end{aligned}$$

Побудуємо ці прямі на площині X_1OX_2 :



Лінійній нерівності $Ax_1 + Bx_2 + C < 0$ задовольняють координати точок $M(x_1; x_2)$ півплощини, обмеженої прямою $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ і тільки координати точок цієї півплощини.

Тому для того, щоб визначити розташування відповідної півплощини відносно граничної прямої, підставимо координати будь-якої точки (найпростіше – початку координат), в ліву частину нерівності. Так, наприклад, при підстановці значень $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$ в 1-у нерівність отримуємо $0 \leq 6$. Таким чином, множина розв'язків цієї нерівності містить початок координат. Аналогічний результат отримуємо для 2-ої нерівності: $0 \leq 56$. Для 3-ої нерівності отримуємо $0 \geq 4$, що невірно. Таким чином координати початку координат не задовольняють 3-ій нерівності, тому відповідна півплощина розташована по іншій бік, ніж початок координат, від 3-ої граничної прямої.

Розташування вказаних півплощин вказано стрілками. Очевидно, множиною розв'язків даної системи нерівностей буде многокутник $ABCD$ з вершинами, що є точками перетину вказаних прямих. Для знаходження координат отриманого многокутника необхідно розв'язати сумісно відповідні пари рівнянь.

Наприклад, для того щоб знайти координати точки C , розв'яжемо систему

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 6, \\ 4x_1 + 8x_2 = 56, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 6, \end{cases} \quad C(2;6).$$

Зауваження. Якщо гранична пряма проходить через початок координат, то замість точки $O(0 ; 0)$ необхідно взяти будь-яку іншу точку.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 9. Знайти графічним методом множину невід'ємних розв'язків ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) системи нерівностей.

$$9.1. \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \leq 56, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1 \leq 15. \end{cases}$$

$$9.8. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 42. \end{cases}$$

$$9.15. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$9.2. \begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 90, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

$$9.9. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 42. \end{cases}$$

$$9.16. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$9.3. \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 3. \end{cases}$$

$$9.10. \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ -x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases}$$

$$9.17. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

$$9.4. \begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 0, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 30, \\ x_1 \leq 7. \end{cases}$$

$$9.11. \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 7x_2 \geq 42, \\ x_2 \leq 7. \end{cases}$$

$$9.18. \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

$$9.5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$$

$$9.12. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 2. \end{cases}$$

$$9.19. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 56, \\ x_1 - x_2 \leq 5. \end{cases}$$

$$9.6. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \geq 30, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -3x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$9.13. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2. \end{cases}$$

$$9.20. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

$$9.7. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

$$9.14. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$9.21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$9.22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$9.25. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$9.28. \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 5. \end{cases}$$

$$9.23. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$9.26. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24. \end{cases}$$

$$9.29. \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 3. \end{cases}$$

$$9.24. \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 21, \\ x_1 + x_2 \leq 9. \end{cases}$$

$$9.27. \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$9.30. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

§ 10. Площина і пряма в E_3 .

Основні поняття і теореми [5, ст. 140 – 144].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Знайти точку M_1 , яка симетрична точці $M(3; -1; 2)$ відносно прямої, яка задана рівнянням $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-5}{-1}$.

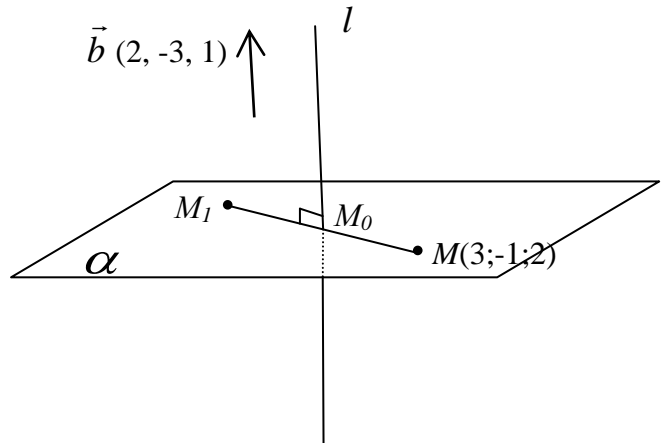
Розв'язання.

Рівняння площини α , яка проходить через точку M перпендикулярно прямій l (рис. 1) має вигляд

$$\begin{aligned} 2(x-3) - 3(y+1) - (z-2) &= 0, \\ 2x - 3y - z - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Вектор $\vec{b}(2, -3, 1)$ паралельний даній прямій l .

Координати точки M_0 , яка є точкою перетину прямої l і площини α , є розв'язком системи:



$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-5}{-1} = t, \\ 2x - 3y - z - 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = -3t - 5, \\ z = -t + 5, \\ 2x - 3y - z - 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2}, \\ x = 1, \\ y = -\frac{7}{2}, \\ z = \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Точка $M_0\left(1; -\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$ є серединою відрізка M_1M , отже, координати точки M_1 можна знайти таким чином:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = 1, \\ \frac{y-1}{2} = -\frac{7}{2}, \\ \frac{z+2}{2} = \frac{11}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -6, \\ z = 9. \end{cases}$$

Відповідь: $M_1(-1; -6; 9)$.

Задача 2.

Знайти точку M_1 , яка симетрична точці $M(3;5;-2)$ відносно площини α , що задана рівнянням $3x - 5y + 7z - 5 = 0$.

Розв'язання.

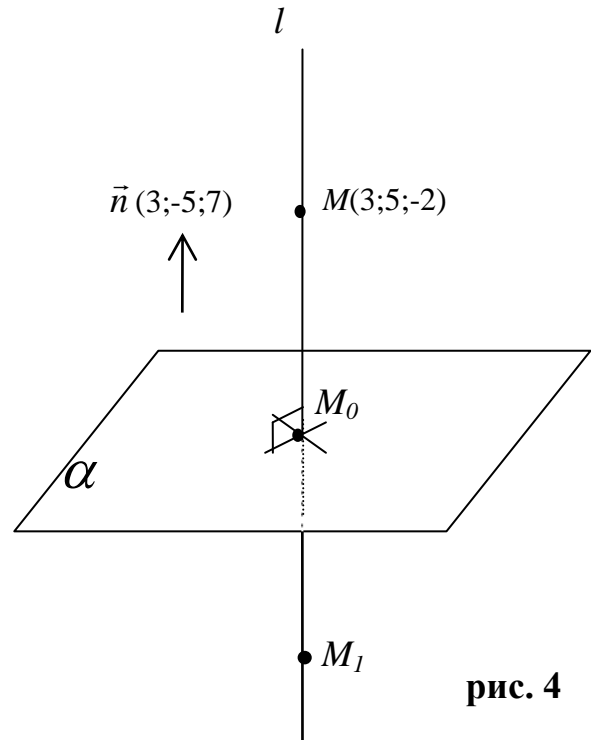
Канонічне рівняння прямої l , яка перпендикулярна площині α і проходить через точку M (рис. 2):

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+2}{7}.$$

Точка M_0 є точкою перетину прямої l і площини α , отже, її координати – це розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+2}{7}, \\ 3x - 5y + 7z - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 3, \\ y = -5t + 5, \\ z = 7t - 2, \\ 3x - 5y + 7z - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{35}{83}, \\ x = \frac{354}{83}, \\ y = \frac{240}{83}, \\ z = \frac{79}{83}. \end{cases}$$



Точка $M_0\left(\frac{354}{83}; \frac{240}{83}; \frac{79}{83}\right)$ є серединою відрізка MM_1 , отже, координати точки

M_1 можна знайти наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = \frac{354}{83}, \\ \frac{y+5}{2} = \frac{240}{83}, \\ \frac{z-2}{2} = \frac{79}{83}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{459}{83}, \\ y = \frac{65}{83}, \\ z = \frac{324}{83}. \end{cases}$$

Відповідь: точка $M_1\left(\frac{459}{83}; \frac{65}{83}; \frac{324}{83}\right)$.

Задача 3.

Обчислити відстань від точки $M(2; -1; 3)$ до прямої l , що задана рівнянням $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння площини α , яка проходить через точку M перпендикулярно прямій l (рис. 3):

$$\begin{aligned} 2(x-2) + 5(y+1) - (z-3) &= 0, \\ 2x + 5y - z + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Точка M_0 є точкою перетину прямої l і площини α , отже, її координати – це розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1} = t, \\ 2x + 5y - z + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 5t, \\ z = -t + 1, \\ 2x + 5y - z + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{10}, \\ x = -\frac{14}{5}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Відстанню d між точкою M і прямою l буде відстань між точками M і M_0 . Отже,

$$d = \sqrt{\left(2 + \frac{14}{5}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{330}}{10}.$$

Відповідь: $d = \frac{3\sqrt{330}}{10}$.

Задача 4.

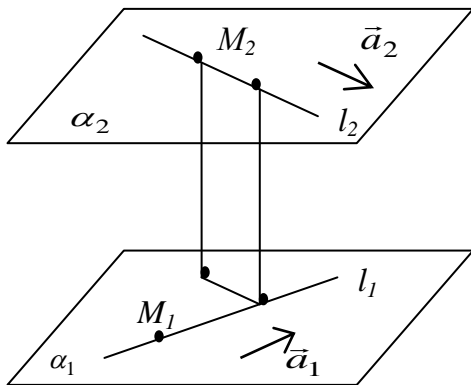


рис. 6

Знайти відстань між прямими l_1 і l_2 , які задані рівняннями:

$$\begin{aligned} l_1: & \begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ 2x + y - z - 4 = 0. \end{cases} \\ l_2: & \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0, \\ x + 2y + 2z + 2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язання.

Знайдемо вектори \vec{a}_1 і \vec{a}_2 , які є напрямними відповідно до прямих l_1 і l_2 (рис.4):

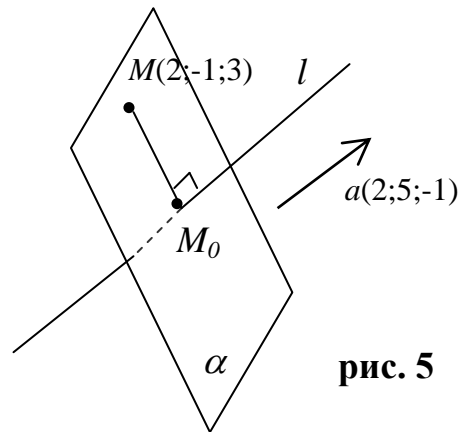


рис. 5

$$\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{j} - \vec{k} = (0; -1; -1),$$

$$\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} = (6; -3; 0).$$

Знайдемо координати, деякої точки M_1 , яка належить прямій l_1 . Для цього у системі рівнянь, що визначає пряму l_1 , покладемо, наприклад $z = 0$:

$$l_1: \begin{cases} x + y - z - 3 = 0, \\ 2x + y - z - 4 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Знайдемо рівняння площини α_1 , що проходить через точку $M_1(1; 2; 0)$ паралельно до векторів \vec{a}_1 і \vec{a}_2 :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 5 = 0.$$

Відстань d між прямими l_1 і l_2 буде рівна відстані між будь-якою точкою прямої l_2 і площиною α_1 . Знайдемо координати деякої точки M_2 , яка належить прямій l_2 :

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0, \\ x + 2y + 2z + 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z - 4 = 0, \\ 2y + 2z + 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ z = -2. \end{cases}$$

Отже,

$$d = \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $d = \frac{1}{3}$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 10.

Знайти точку M_1 , яка симетрична точці M відносно прямої.

10.1. $M(0,-3,-2)$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$.

10.5. $M(1,0,-1)$, $\frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}$.

10.2. $M(2,-1,1)$, $\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}$.

10.6. $M(2,1,0)$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}$.

10.3. $M(1,1,1)$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

10.7. $M(-2,-3,0)$, $\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}$.

10.4. $M(1,2,3)$, $\frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}$.

10.8. $M(-1,0,-1)$, $\frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Знайти точку M_1 , яка симетрична точці M відносно площини.

10.9. $M(1,0,1)$, $4x+6y+4z-25=0$.

10.13. $M(-1,2,0)$, $4x-5y-z-7=0$.

10.10. $M(-1,0,-1)$, $2x+6y+2z+11=0$.

10.14. $M(2,-1,1)$, $x-y+2z-2=0$.

10.11. $M(0,2,1)$, $2x+4y-3=0$.

10.15. $M(1,1,1)$, $x+4y+3z+5=0$.

10.12. $M(1,0,1)$, $y+z+2=0$.

10.16. $M(1,0,1)$, $2x+10y+10z-1=0$.

Обчислити відстань від точки M до прямої.

10.17. $M(1,-1,-2)$, $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

10.21. $M(3,-2,0)$, $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-4}$.

10.18. $M(2,0,-1)$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$.

10.22. $M(-1,2,2)$, $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$.

10.19. $M(3,2,1)$, $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{1}$.

10.23. $M(5,1,-1)$, $\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-3}{-5}$.

10.20. $M(4,2,-2)$, $\frac{x+4}{1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z+2}{-2}$.

Знайти відстань між прямими.

$$10.24. \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1} ; \frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$10.25. \frac{x+12}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+34}{-4} ; \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}.$$

$$10.26. \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} ; \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

$$10.27. \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2} ; \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}.$$

$$10.28. \frac{x-10}{0} = \frac{y-16}{3} = \frac{z}{1} ; \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{0}$$

$$10.29. \frac{x}{1} = \frac{y+5}{16} = \frac{z+3}{11} ; \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{4}.$$

$$10.30. \frac{x}{1} = \frac{y+\frac{9}{2}}{2} = \frac{z+\frac{1}{2}}{0} ; \frac{x+2}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{4}$$

§11. Площина і пряма в E_n .

Основні поняття і теореми [5, ст. 140 – 144].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Знайти рівняння гіперплощини, що проходить через точку $M(-5; 2; 3; -2)$ паралельно гіперплощині $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 5 = 0$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{n}(2; -1; 3; -7)$ є перпендикулярним до обох гіперплощин. Отже, рівняння шуканої гіперплощини має вигляд:

$$\begin{aligned} 2(x_1 + 5) - (x_2 - 2) + 3(x_3 - 3) - 7(x_4 + 2) &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 11 = 0$.

Задача 2.

Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами α_1 і α_2 , заданих відповідно рівняннями:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 + x_5 - 4 &= 0 \text{ і} \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 + x_5 - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язання.

Знайдемо координати якої-небудь точки, що належить площині α_1 , наприклад $M_1(0; 0; 0; 0; 4)$. Тоді, відстань між точкою M_1 і площиною α_2 буде шуканою відстанню d між даними гіперплощинами:

$$d = \frac{|4 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-7)^2 + 1^2}} = \frac{3}{8}.$$

Відповідь: $d = \frac{3}{8}$.

Задача 3.

Знайти кут між гіперплощинами α_1 і α_2 , заданих відповідно рівняннями:

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 7 = 0 \text{ і } 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 5 = 0.$$

Розв'язання.

Вектори, які є нормальними до даних гіперплощин, відповідно

$$\vec{n}_1(2; 3; -1; 5) \text{ і } \vec{n}_2(5; -2; 1; -3).$$

Кут між векторами \vec{n}_1 і \vec{n}_2 і є кутом між гіперплощинами. Отже,

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{4 + 9 + 1 + 25} \cdot \sqrt{25 + 4 + 1 + 9}} = -\frac{12}{39},$$

$$\alpha = \arccos \left(-\frac{12}{39} \right) = \pi - \arccos \frac{12}{39}$$

Відповідь: $\alpha = \pi - \arccos \frac{12}{39}$.

Задача 4.

Знайти рівняння гіперплощин, які віддалені від даної гіперплощини, що задана рівнянням

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + 5 = 0,$$

на відстань 5-ти одиниць.

Розв'язання.

Шукані гіперплощини – це множини точок, які віддалені від даної гіперплощини α на відстань 5-ти одиниць. Отже, шукані гіперплощини мають рівняння:

$$\frac{|2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9 + 1 + 1}} = 5 \Leftrightarrow |2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + 5| = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - 15 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + 25 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - 15 = 0$, $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + 25 = 0$.

Задача 5.

Знайти проекцію точки $M(5; -2; -4; 1; 0)$ на гіперплощину $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 6 = 0$.

Розв'язання.

Запишемо канонічне рівняння прямої l , що проходить через точку M , перпендикулярно до заданої гіперплощини:

$$\frac{x_1 - 5}{2} = \frac{x_2 + 2}{-1} = \frac{x_3 + 4}{3} = \frac{x_4 - 1}{-2} = \frac{x_5}{1}.$$

Шуканою проекцією точки M є точка M_0 перетину прямої l та заданої гіперплощини:

$$\begin{cases} \frac{x_1 - 5}{2} = \frac{x_2 + 2}{-1} = \frac{x_3 + 4}{3} = \frac{x_4 - 1}{-2} = \frac{x_5}{1}, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 5, \\ x_2 = -t - 2, \\ x_3 = 3t - 4, \\ x_4 = -2t + 1, \\ x_5 = t, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{19} \\ x_1 = \frac{87}{19}, \\ x_2 = -\frac{34}{19}, \\ x_3 = -\frac{88}{19}, \\ x_4 = \frac{27}{19}, \\ x_5 = -\frac{4}{19}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } M_0\left(\frac{87}{19}; -\frac{34}{19}; -\frac{88}{19}; \frac{27}{19}; -\frac{4}{19}\right).$$

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 11.

Знайти рівняння гіперплощини, яка проходить через точку M паралельно іншій гіперплощині.

11.1. $M(1;-2;4;3)$, $2x_1+x_2-3x_3+x_4=0$.

11.2. $M(0;-1;2;1;5)$, $x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=3$.

11.3. $M(2;-1;0;2)$, $3x_1-x_2+4x_3+5x_4=0$.

11.4. $M(1;3;-1;2;0)$, $4x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1$.

11.5. $M(1;-3;2;-4)$, $x_1+3x_2-5x_3+2x_4=7$.

11.6. $M(0;3;-1;2;4)$, $2x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5=3$.

Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами.

11.7. $3x_1+x_2-2x_3+x_4=0$,

$3x_1+x_2-2x_3+x_4-1=0$.

11.8. $x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5+3=0$,

$x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5-6=0$.

11.9. $5x_1-x_2+3x_3-2x_4-6=0$,

$5x_1-x_2+3x_3-2x_4+1=0$.

11.10. $-2x_1+x_2-x_3+4x_4-x_5-3=0$,

$2x_1-x_2+x_3-4x_4+x_5-2=0$.

11.11. $3x_1-x_2+2x_3-x_4+7=0$,

$3x_1-x_2+2x_3-x_4+5=0$.

11.12. $x_1-2x_2+x_3-3x_4+2x_5-3=0$,

$x_1-2x_2+x_3-3x_4+2x_5-6=0$.

Знайти кут між гіперплощинами.

11.13. $2x_1+3x_2+x_3-2x_4+x_5+4=0$,

$x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5+6=0$.

11.14. $3x_1-x_2+2x_3-x_4+3=0$,

$x_1+4x_2-x_3+2x_4-1=0$.

11.15. $5x_1+6x_2-x_3+4x_4+x_5-5=0$,

$x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5+7=0$.

11.16. $2x_1+x_2+3x_3-x_4+5=0$,

$x_1+x_2-4x_3+x_4-6=0$.

11.17. $x_1+5x_2-x_3+3x_4-x_5+1=0$,

$x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0$.

11.18. $3x_1-x_2+2x_3-x_4+8=0$,

$x_1+2x_2-3x_3+7x_4-3=0$.

Знайти рівняння гіперплощин, які віддалені від даної гіперплощини на відстань 4-ох одиниць.

11.19. $5x_1+3x_2-x_3+x_4+3=0$.

11.20. $7x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5=7$.

11.21. $x_1+2x_2-x_3+2x_4=6$.

11.22. $3x_1-x_2+5x_3-2x_4+6x_5=1$.

11.23. $x_1+8x_2+9x_3-5x_4=3$.

11.24. $4x_1+5x_2-7x_3+8x_4+9x_5=10$.

Знайти проекцію точки на гіперплощину.

11.25. $M(3;2;-1;0;3)$,

$3x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=3$.

11.26. $M(-1;0;2;-4)$,

$5x_1+x_2+2x_3-x_4=5$.

11.27. $M(-2;3;4;-1;0)$,

$x_1+3x_2+x_3-5x_4+x_5=6$.

11.28. $M(-2;0;1;1)$,

$3x_1-x_2+x_3-3x_4=1$.

11.29. $M(1;3;-1;2;0)$,

$x_1-4x_2+2x_3-x_4+2x_5=3$.

11.30. $M(1;3;-1;2;0)$,

$-x_1+2x_2-x_3+3x_4=5$.

§ 12. Криві другого порядку.

Основні поняття і теореми [5, ст. 203 – 205; 208 – 211; 215 – 217].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M(-2\sqrt{5}; 2)$ і відстань між його фокусами $2c = 6\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – шукане рівняння еліпса. Координати точки M повинні задовольняти це рівняння. Отже, маємо $\frac{20}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$. Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $a^2 - b^2 = 27$.

Тоді з системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{20}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \\ a^2 - b^2 = 27, \end{cases}$$

знайдемо $a^2 = 36$, $b^2 = 9$.

Отже, рівняння еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 2.

Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між вершинами гіперболи дорівнює 48, а рівняння її асимптот $y = \pm \frac{5}{12}x$.

Розв'язання.

Оскільки відстань між вершинами гіперболи дорівнює $2a$, то $2a = 48$, отже $a = 24$.

Оскільки асимптоти гіперболи мають рівняння $y = \pm \frac{5}{12}x$, то $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$, звідки $b = 10$.

Отже рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1.$

Задача 3.

Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо відомо, що вона симетрична відносно осі OX і відтинає від прямої $y = 2\sqrt{2}x$ хорду довжиною $\frac{3}{4}$.

Розв'язок.

Знайдемо координати точок перетину заданої прямої $y = 2\sqrt{2}x$ і параболи, рівняння якої $y^2 = 2px$ (оскільки, за умовою, парабола симетрична відносно OX і має вершину в початку координат):

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = 2\sqrt{2}x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x = \frac{p}{4}, \\ y = \frac{p}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отже, точки перетину: $A_1(0;0)$ і $A_2\left(\frac{p}{4}; \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$.

Тоді, довжина хорди A_1A_2 – це відстань між точками A_1 і A_2 :

$$\sqrt{\frac{p^2}{16} + \frac{p^2}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow p = 1.$$

Отже, рівняння параболи: $y^2 = -2x$.

Відповідь: $y^2 = -2x$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 12.

У варіантах 1 – 8 скласти рівняння еліпса.

- 12.1. Точки $F_1(5;1)$ і $F_2(-1;1)$ – фокуси еліпса, а пряма $x=31/3$ – його директриса.
- 12.2. Точка $F_1(-6;2)$ є одним з фокусів еліпса, точка $A(2;2)$ є кінцем великої вісі, а ексцентриситет еліпса рівний $2/3$.
- 12.3. Вісі еліпса паралельні вісям координат, точки $A(4;0)$ і $B(0;4)$ належать еліпсу, при цьому точка B знаходиться на відстані $3\sqrt{2}$ від одного з фокусів і на відстані 6 від відповідної директриси.
- 12.4. Точки $F_1(-1;-1)$ і $F_2(1;1)$ є фокуси еліпса, а сума його фокальних радіусів дорівнює $2\sqrt{3}$.
- 12.5. Точки $A_1(1;0)$ і $A_2(9;0)$ – точки перетину еліпса з віссю Ox , а точка $A_3(0;3)$ – точка дотику еліпса з віссю Oy . Відомо, що вісі еліпса паралельні вісям координат.
- 12.6. Вісі еліпса паралельні вісям координат, а точки $(5;0)$ і $(0;3)$ – точки дотику еліпса відповідно до вісей Ox і Oy .
- 12.7. Ексцентриситет еліпса рівний $1/2$, а точка $F(1;2)$ – його фокус. Рівняння відповідної директриси має вигляд $x-4=0$.
- 12.8. Ексцентриситет еліпса рівний $3/4$, точка $F(-3;2)$ – його фокус, а $y+2=0$ – рівняння відповідної директриси.

У варіантах 9 – 16 скласти рівняння гіперболи.

- 12.9. Точка $(1;0)$ належить гіперболі, а прямі $x=0$ і $y=1$ – її асимптоти.
- 12.10. Точки $F_1(-3;-4)$ і $F_2(3;4)$ – фокуси гіперболи, а відстань між її директрисами дорівнює 3,6.
- 12.11. Ексцентриситет гіперболи рівний $\sqrt{5}$, фокус знаходиться в точці $F(2;-3)$, а рівняння відповідної директриси має вигляд $3x-y+3=0$.
- 12.12. Фокуси гіперболи знаходяться в точках $F_1(3;-2)$ і $F_2(5;-2)$, а пряма $x=7/2$ –
- 12.13. Точка $F(1;3)$ є одним з фокусів гіперболи, точка $A(-4;3)$ – її вершина, а ексцентриситет рівний $3/2$.
- 12.14. Точка $F(0;0)$ є одним з фокусів гіперболи, а прямі $x+y+2=0$, $x-y+2=0$ – її асимптоти.
- 12.15. Ексцентриситет гіперболи рівний $4/3$, її фокус знаходиться в точці $(3;1)$, а рівняння відповідної директриси має вигляд $x-2=0$.
- 12.16. Ексцентриситет гіперболи рівний $10/9$, її фокус знаходиться в точці $(0;10)$, а рівняння відповідної директриси $10y-81=0$.

У варіантах 17 – 25 скласти рівняння параболи.

12.17. Фокус параболи знаходиться в точці $F(5;3)$, а рівняння її директриси $x-y+2=0$.

12.18. Фокус параболи знаходиться в точці $F(3;2)$, а рівняння її директриси $y+2=0$.

12.19. Фокус параболи знаходиться в точці $F(6;1)$, а рівняння її директриси $x-3=0$.

12.20. Вершина параболи знаходиться в точці $A(1;1)$, а рівняння її директриси $x+y+1=0$.

12.21. Фокус параболи знаходиться в точці $F(-5;0)$, а рівняння її директриси $x-5=0$.

12.22. Фокус параболи знаходиться в точці $F(-3;-1)$, а рівняння її директриси $x+2y-4=0$.

12.23. Вершина параболи знаходиться в точці $A(4;-1)$, а рівняння її директриси $2x-y-2=0$.

12.24. Фокус параболи знаходиться в точці $F(-2;-1)$, а рівняння її директриси $x-3=0$.

12.25. Вершина параболи знаходиться в точці $A(-2;-3)$, а рівняння її директриси $2x+3y-6=0$.

12.26. Знайти точки гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, які знаходяться на віддалі 7 від її фокуса.

12.27. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1$, паралельних прямій $10x-3y+9=0$.

12.28. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Скласти рівняння гіперболи, яка має з еліпсом спільні фокальні хорди.

12.29. В точці $A(\frac{10}{3}; \frac{5}{3})$ проведені дотичні до еліпса, рівняння якого $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Скласти рівняння цих дотичних.

12.30. В точці $A(10;-8)$ проведені дотичні до еліпса, рівняння якого $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотику.

§13. Модель Леонтьєва.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу.

Будемо вважати, що всі величини, які описують даний процес виробництва (x_i, x_{ij}, y_j) вимірюються у вартісних одиницях. У такому випадку кажуть про модель міжгалузевого балансу у вартісному виразі.

Нехай x_i – загальний (валовий) об'єм продукції i -ї галузі ($i=1,2,\dots,n$);

x_{ij} – об'єм продукції i -ї галузі, яку вживає j -а галузь у процесі виробництва ($j=1,2,\dots,n$);

y_i – об'єм кінцевого продукту i -ї галузі для невиробничого вживання.

Мають місце так звані співвідношення балансу:

$$(*) \quad x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Система лінійних рівнянь $(*)$ – математична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва).

Коефіцієнти прямих витрат a_{ij} показують витрати продукції i -ї галузі на виробництво одиниці продукції j -ї:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad (i,j=1,2,\dots,n).$$

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – вектор валового випуску, Y – вектор кінцевого продукту, A – матриця прямих витрат. Тоді

$$X = AX + Y, \quad (\text{за формулами } (*)).$$

Звідси

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y, \quad \text{якщо } |E - A| \neq 0.$$

Матриця A називається продуктивною, якщо існують два вектори $Y > 0$ і $X \geq 0$ такі, що

$$X - AX = Y.$$

Продуктивність матриці A означає, що виробнича система здатна забезпечити деякий додатній кінцевий випуск по всіх видах продукту.

Однією з умов продуктивності матриці A є виконання умови

$$(E - A)^{-1} \geq 0.$$

Зауваження.

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат.

Кожен елемент s_{ij} матриці S є величина валового випуску продукції i -ї галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j -ї галузі.

Зразки розв'язування задач

У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітній період, ум. грош. од.:

Галузь		Потреби		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		Енергетика	Машинобудування		
Виробництво	Енергетика	7	21	72	100
	Машинобудування	12	15	123	150

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт енергетичної галузі збільшиться у двічі, а машинобудування збережеться на попередньому рівні.

Розв'язання.

Маємо: $x_1 = 100$, $x_2 = 150$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 123$.

Знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$a_{11} = 0,07$, $a_{12} = 0,14$, $a_{21} = 0,12$, $a_{22} = 0,1$, тобто матриця прямих витрат

$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,1 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи та задовольняє критерію

продуктивності. Тому для будь-якого вектора кінцевого продукту Y можна знайти необхідний об'єм валового випуску X за формулою

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}. \text{ Тоді } S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,24 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

За умовою вектор кінцевого продукту $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$.

Тоді отримаємо:

$$X = S \cdot Y = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,24 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: валовий випуск в енергетичній галузі потрібно збільшити до 179 ум. од., а в машинобудуванні – до 160,5 ум. грош. од.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 13.

У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітний період, ум. грош. од.:

Галузь		Потреби		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2		
Виробництво	1	$100+V$	$160+V$	240	500
	2	$275+V$	$40+V$	85	400

З'ясувати питання про продуктивність матриці прямих витрат.

У випадку продуктивності матриці прямих витрат обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі повинен збільшитися у K разів, а другої галузі на V %.

$$K = \frac{V}{100} + 2.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. **Я.С. БУГРОВ, С.М. НИКОЛЬСКИЙ.** ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.– М.: НАУКА, 1980.
2. **В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.– М.: НАУКА, 1978.
3. **Н.В. ЕФИМОВ.** КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И МАТРИЦЫ.– М.: НАУКА, 1967.
4. **А.В. ЕФИМОВ, Б.П. ДЕМИДОВИЧ.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.– М.: НАУКА, 1981.
5. **В.І. ДІСКАНТ, Л.Р. БЕРЕЗА, О.П. ГРИЖУК, Л.М. ЗАХАРЕНКО.** ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.– К.: ВИЩА ШКОЛА, 2001.
6. **И.В. ПРОСКУРЯКОВ.** СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ.– М.: НАУКА, 1967.
7. **Х.Д. ИКРАМОВ.** ЗАДАЧНИК ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ.– М.: НАУКА, 1975.
8. **Г.И. КРУЧНИКОВ, Г.М. МОРДАСОВА И ДР.** СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ.– М.: ВЫСШ. ШК., 1970.
9. **Д.В. КЛЕТЕННИК.** СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.– М.: НАУКА, 1975.
10. **О.Н. ЦУБЕРБИЛЛЕР.** ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.– М.: НАУКА, 1968.
11. **П.Е. ДАНКО, А.Г. ПОПОВ, Т.Я. КОЖЕВНИКОВА.** ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ВУПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ.– М.: ВЫСШ. ШК., 1980.
12. **А.Н. РУБЛЕВ.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.– М.: ВЫСШ. ШК., 1968.
13. **Д.В. БЕКЛЕМЕШЕВ.** КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.– М.: НАУКА, 1976.
14. **Н.В. ЕФИМОВ, Э.Р. РОЗЕНДОРН.** ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.– М.: НАУКА, 1970.
15. **М.А. АКВИС, В.В. ГОЛЬДБЕРГ.** ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.– М.: НАУКА, 1969.