МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-методичні матеріали до виконання розрахунково-графічних завдань з вищої математики для студентів економічних спеціальностей

Розділи: «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

«Інтегральне числення функції однієї змінної»

«Диференціальні рівняння»

Затверджено на засіданні

кафедри вищої математики

протокол №10 від 24.02.2011р.

та методичною радою ЧДТУ

протокол №

Черкаси ЧДТУ 2011

УДК 517(07)
ББК 22.1
Н15

Укладачі: **Грижук** Олександра Павлівна
Півненко Світлана Іванівна

Відповідальний редактор **Кондратьєва О.М.,** к.п.н.

Рецензент **Ковтуненко В.С.,** к.ф.-м.н.

Навчально-методичні матеріали до виконання розрахунково-графічних завдань з вищої математики для студентів економічних спеціальностей.

Розділи: «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»
«Інтегральне числення функції однієї змінної»
«Диференціальні рівняння»/ Укл. Грижук О.П., Півненко С.І., - Черкаси, ЧДТУ, 2011. – 45с.

Дане видання містить зразки розв’язання типових задач, набори задач для індивідуальної самостійної роботи студентів з вищої математики. У кожному параграфі зроблені посилання на відповідні сторінки підручників, де містяться основні формули, означення та теореми, які використовуються при розв’язуванні задач. Навчально-методичні матеріали призначені для студентів економічних спеціальностей.

УДК 517(07)
ББК 22.1

Зміст

Передмова

Підвищення ефективності самостійної роботи студентів є одним з найважливіших факторів успішного засвоєння курсу «Вища математика».

Дане видання сприяє більш глибокому опануванню окремих тем з таких розділів курсу «Вища математика», як «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», «Інтегральне числення функції однієї змінної», «Диференціальні рівняння». Навчально-методичні матеріали до виконання розрахунково-графічних завдань з вищої математики для студентів економічних спеціальностей складаються з трьох параграфів. Кожен параграф містить посилання на відповідну навчальну літературу з вказівками сторінок, де розміщені основні математичні поняття, що використовуються при розв'язуванні завдань відповідної теми, зразки розв'язування типових задач, розрахункові завдання для самостійного розв'язування, а також контрольні запитання. Кожна задача має 25 варіантів, що дає можливість скласти індивідуальний набір завдань для кожного студента.

Завдання для самостійного розв'язування підібрані таким чином, що охоплюють основні теми вказаних розділів, які включені у навчальну програму з курсу вищої математики для студентів економічних спеціальностей. До кожного параграфу включені задачі економічного змісту.

Завдання, що розміщені в даному видані можуть використовуватись і на практичних заняттях, як у процесі засвоєння нового матеріалу, так і під час організації контролю і корекції знань студентів. Дане видання допоможе у процесі навчання, та оцінювання знань студентів економічних спеціальностей за кредитно-модульною системою.

§1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Основні поняття і теореми [1. – ст. 472-504; 2. – ст. 264-292; 3. – ст. 236-257].

Зразки розв'язування задач

Задача 1.1

Знайти частинні похідні другого порядку функції $Z=(1+x^3)^y$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$Z'_x = y(1+x^3)^{y-1}\cdot 3x^2 = 3x^2y(1+x^3)^{y-1};$$

$$Z'_y = (1+x^3)^y \ln(1+x^3).$$

Диференціюємо повторно, дістанемо:

$$Z''_{xx} = 6xy(1+x^3)^{y-1} + 3x^2y(y-1)(1+x^3)^{y-2}3x^2 =$$
$$= 3xy(1+x^3)^{y-2}(2(1+x^3)+3x^3) = 3xy(1+x^3)^{y-2}(5x^3+2);$$

$$Z''_{xy} = 3x^2(1+x^3)^{y-1} + 3x^2y(1+x^3)^{y-1}\ln(1+x^3),$$

$$Z''_{yy} = (1+x^3)^y \ln^2(1+x^3).$$

Задача 1.2

Перевірити, що функція $Z=e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє умові $xZ'_x + yZ'_y = 0.$

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні:

$$Z'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y};$$

$$Z'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Отже,

$$xZ'_x + yZ'_y = xe^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} + ye^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} = 0.$$

Таким чином доведено, що функція $Z = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє умові $xZ'_x + yZ'_y = 0.$

Задача 1.3

Знайти градієнт функції $U = 3x^2 + 2y^3 + z^2$ в точці $M_0(2,-2,1)$ і похідну в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{S} = \overrightarrow{M_0M}$, де $M = (2,1,5)$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні функції $U = 3x^2 + 2y^3 + z^2$ в точці $M_0(2,-2,1)$:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = 6x|_{(2,-2,1)} = 12,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = 6y^2\Big|_{(2,-2,1)} = 24,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} = 2z|_{(2,-2,1)} = 2.$$

За формулою $\overrightarrow{gradU(M_0)} = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\,\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\,\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\,\vec{k}$ дістанемо:

$$\overline{gradU(M_0)} = (12,24,2).$$

Знайдемо похідну функції $U = 3x^2 + 2y^3 + z^2$ в точці M_0 за напрямом вектора $\overrightarrow{M_0M}$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$ та його напрямні косинуси:

$\overrightarrow{M_0M} = (0,3,4)$, отже $\overrightarrow{S} = (0,3,4)$;

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}} = 0, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}} = \frac{3}{5}, \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

За формулою $\frac{\partial U}{\partial \overline{S}}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$ дістанемо:

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{S}}(M_0) = 12\cdot 0 + 24\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{80}{5} = 16.$$

Задача 1.4

Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$.

Використаємо необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$ звідки $x = 0, y = 3$.

Точка $M_0(0;3)$ − стаціонарна (в цій точці виконуються необхідні умови).

Знайдемо значення других похідних у точці $M_0(0;3)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1,$$

тоді $a_{11}=2$, $a_{22}=2$, $a_{12}=1$, отже $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=3>0$. Оскільки $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=3>0$ і $a_{11}=2>0$, то в точці $M_0(0;3)$ функція має мінімум $Z_{\min}=Z(0,3)=-9$.

Задача 1.5

Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їх обсяги через x і y. Нехай ціни на ці товари відповідно $P_x=10$, $P_y=8$ ум. од., а функція витрат $c(x,y)=x^2+xy+y^2$. Знайти максимальний прибуток, який може одержати фірма.

Розв'язання

Функція прибутку фірми: $P(x,y)=10x+8y-x^2-xy-y^2$. Для цієї функції потрібно знайти екстремум. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=10-2x-y;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=8-x-2y;$$

$$\begin{cases}10-2x-y=0,\\ 8-x-2y=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=10,\\ x+2y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4,\\ y=2\end{cases}$$, отже стаціонарна точка $(4;2)$.

Перевіримо достатні умови локального екстремуму.

$$a_{11}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-2;\quad a_{22}=\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=-2;\quad a_{12}=\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}=-1$$

Тоді $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=3>0$, так як $a_{11}<0$, то точка $M(4;2)$ − точка локального максимуму. Максимальний прибуток фірми: $P(4;2)=28$ ум. од.

Таким чином максимальний прибуток фірма отримає при даному спектрі цін, що склалися на ринку, якщо буде випускати 4 одиниці I виду і 2 одиниці II виду товарів.

Задача 1.6

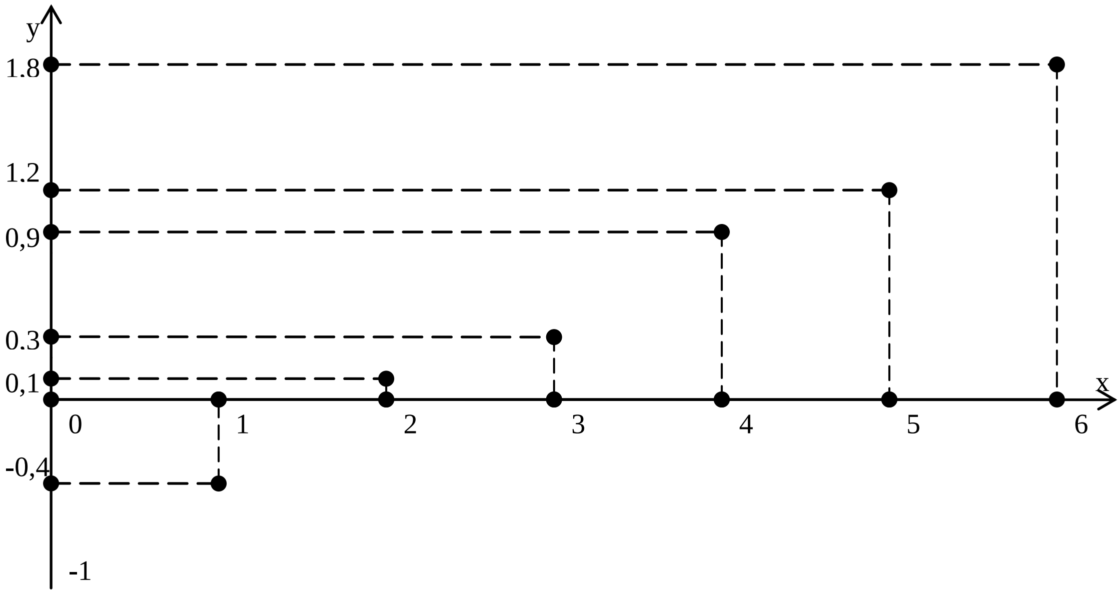
Результати експерименту приведено в таблиці:

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	-0,4	0,1	0,3	0,9	1,2	1,8

Методом найменших квадратів знайти параметри k і b функції $y = kx + b$.

Розв'язання

Побудуємо точки з координатами (x_i, y_i) на координатній площині (мал.1). Припустимо, що між ними існує лінійна залежність $y = kx + b$.



мал. 1

Знайдемо k і b з системи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n. \end{cases}$$

Обчислюємо:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1\cdot(-0,4) + 2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,3 + 4\cdot 0,9 + 5\cdot 1,2 + 6\cdot 1,8 = 21,1;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 1+2+3+4+5+6 = 21;$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = -0,4+0,1+0,3+0,9+1,2+1,8 = 3,9;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} 91k + 21b = 21,1 \\ 21k + 6b = 3,9 \end{cases}$$

Розв’яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 546 - 441 = 105;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21,1 & 21 \\ 3,9 & 6 \end{vmatrix} = 126,6 - 82,9 = 47,7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 21,1 \\ 21 & 3,9 \end{vmatrix} = 354,9 - 443,1 = -88,2;$$

$$k = \frac{47,7}{105} \approx 0,45, \; b = -\frac{88,2}{105} \approx -0,84$$

Таким чином, шукана пряма задається рівнянням $y = 0,45x - 0,84$.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Перевірити, що функція $z = z(x, y)$ задовольняє заданій умові, та знайти частинні похідні другого порядку.

1. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$; $xz'_x + yz'_y = 2$.

2. $z = \sqrt{x} \sin \dfrac{x}{y}$; $2xz'_x + 2yz'_y = z$.

3. $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$; $\dfrac{1}{x} z'_x + \dfrac{1}{y} z'_y = \dfrac{z}{y^2}$.

4. $z = x \ln \dfrac{y}{x}$; $xz'_x + yz'_y = z$.

5. $z = (x^2 + y^2) \cdot tg \dfrac{x}{y}$; $xz'_x + yz'_y = 2z$.

6. $z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$; $xz'_x + yz'_y = -z$.

7. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$; $z'_x + z'_y = \dfrac{2(x + y)}{x - y}$.

8. $z = \ln \dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$; $xz'_x + yz'_y = 3(x^3 - y^3)$.

9. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $x^2 z'_x - xyz'_y + y^2 = 0$.

10. $z = \dfrac{x^2}{y}$; $\dfrac{x}{y} z'_x + 2z'_y = 0$.

11. $z = \cos(x^2 + y^2)$; $yz'_x - xz'_y = 0$.

12. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $xz'_x + yz'_y = 0$.

13. $z = \arcsin \dfrac{x - y}{x + y}$; $xz'_x + z'_y = 0$.

14. $z=\ln(e^{x}+e^{y})$; $z'_x+z'_y=1$.

15. $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$; $yz'_x-xz'_y=-1$.

16. $z=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$; $\dfrac{1}{x}z'_x+\dfrac{1}{y}z'_y-\dfrac{z}{y^2}=0$.

17. $z=\sin x-\ln(\sin y-\sin x)$; $z'_x\cos y+z'_y\cos x=\cos x\cos y$

18. $z=\arccos(x^2+y^2)$; $yz'_x-xz'_y=0$.

19. $z=\dfrac{y}{\ln(x^2-y^2)}$; $\dfrac{1}{x}z'_x+\dfrac{1}{y}z'_y=\dfrac{z}{y^2}$.

20. $z=\dfrac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $xz'_x+yz'_y=0$.

21. $z=\ln(x^2+y^2)$; $yz'_x-xz'_y=0$.

22. $z=ye^{x^2y^2}$; $y^2z'_x-xyz'_y=xz$.

23. $z=\dfrac{y^2}{3x}+e^{xy}$; $x^2z'_x-xyz'_y+y^2=0$.

24. $z=\dfrac{y}{x^2-y^2}$; $\dfrac{1}{x}z'_x+\dfrac{1}{y}z'_y-\dfrac{z}{y^2}=0$

25. $z=\ln(x+e^{-y})$; $xz'_x-z'_y=1$.

Завдання 2. Для функції $U=U(x,y,z)$ знайти градієнт в точці M_0 та похідну за напрямом вектора $\vec{S}$ в точці M_0.

1. $U(x,y,z)=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(1,-3,4)$, $\vec{S}=(1,-3,4)$.

2. $U(x,y,z)=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$, $M_0(1,1,0)$, $\vec{S}=(-2,2,-1)$.

3. $U(x,y,z)=z^2+arctg(x-y)$, $M_0(1,2,-1)$, $\vec{S}=(1,2,-2)$.

4. $U(x,y,z)=xy-\dfrac{x}{z}$, $M_0(-4,3,-1)$, $\vec{S}=(0,3,-4)$.

5. $U(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$, $M_0(1,-3,4)$, $\vec{S}=(-2,1,2)$.

6. $U(x,y,z)=x^2y^2z-\ln(z-1)$, $M_0(1,1,2)$, $\vec{S}=(3,-4,0)$.

7. $U(x,y,z)=\ln(3-x^2)+xy^2z$, $M_0(1,3,2)$, $\vec{S}=(2,2,-1)$.

8. $U(x,y,z)=y\ln\left(1+x^2\right)-arctgz$, $M_0(0,1,1)$, $\vec{S}=(8,4,8)$.

9. $U(x,y,z)=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},3\right)$, $\vec{S}=(0,4,3)$.

10. $U(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}$, $M_0(4,1,-2)$, $\vec{S}=(4,-3,0)$.

11. $U(x,y,z)=xyz$, $M_0(5,1,2)$, $\vec{S}=(4,3,12)$.

12. $U(x,y,z)=x^2y^2z^2$, $M_0(1,-1,3)$, $\vec{S}=(-1,2,-2)$.

13. $U(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+1)-\sqrt{x^2+z^2}$, $M_0(3,0,-4)$, $\vec{S}=(-4,8,-8)$.

14. $U(x,y,z)=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$, $M_0(1,1,0)$, $\vec{S}=(1,2,2)$.

15. $U(x,y,z)=arctg\dfrac{y}{x}+xz$, $M_0(2,2,-1)$, $\vec{S}=(4,3,0)$.

16. $U(x,y,z)=\dfrac{1}{4}x^2y-\sqrt{x^3y}$, $M_0(2,2,4)$, $\vec{S}=\left(2,\dfrac{3}{2},0\right)$.

17. $U(x,y,z)=x^2y^2z-\ln(z-1)$, $M_0(1,1,2)$, $\vec{S}=(1,2,2)$.

18. $U(x,y,z)=x^2-arctg(y+z)$, $M_0(2,1,1)$, $\vec{S}=(0,3,-4)$.

19. $U(x,y,z) = arctg\,\frac{y}{x} + xz$, $M_0(2,2,-1)$, $\vec{S} = (4,3,0)$.

20. $U(x,y,z) = x^2 y + xz^2 + yxz$, $M_0(2,3,4)$, $\vec{S} = (-2,2,-1)$.

21. $U(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(0,3,4)$, $\vec{S} = (8,4,-8)$.

22. $U(x,y,z) = \sqrt{xy^3} + \frac{1}{2}xz^3$, $M_0(-2,-2,1)$, $\vec{S} = (2,-1,2)$.

23. $U(x,y,z) = y^2 + \ln(x + y + z)$, $M_0(0,1,0)$, $\vec{S} = (4,-8,8)$.

24. $U(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}}{z} + y^2$, $M_0(9,1,3)$, $\vec{S} = (0,-3,4)$.

25. $U(x,y,z) = arctg\,\frac{x}{y} + z^2$, $M_0(1,1,2)$, $\vec{S} = (-1,-2,2)$.

Завдання 3. Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їх обсяги через x і y. Нехай ціни на ці товари P_x і P_y ум. од., а функція витрат $C(x,y)$. Знайти максимальний прибуток, який може отримати фірма.

1. $P_x = 15$; $P_y = 9$; $C(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$.
2. $P_x = 20$; $P_y = 24$; $C(x,y) = x^2 + xy + y^2$.
3. $P_x = 12$; $P_y = 18$; $C(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$.
4. $P_x = 18$; $P_y = 22$; $C(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$.
5. $P_x = 22$; $P_y = 10$; $C(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$.
6. $P_x = 9$; $P_y = 15$; $C(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$.
7. $P_x = 24$; $P_y = 20$; $C(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$.
8. $P_x = 8$; $P_y = 14$; $C(x,y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$.
9. $P_x = 20$; $P_y = 36$; $C(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$.

10. $P_x = 42$; $P_y = 18$; $C(x,y) = 2x^2 + 4xy + \frac{1}{2}y^2$.

11. $P_x = 18$; $P_y = 15$; $C(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$.

12. $P_x = 17$; $P_y = 18$; $C(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$.

13. $P_x = 19$; $P_y = 10$; $C(x,y) = 4x^2 + xy + y^2$.

14. $P_x = 16$; $P_y = 26$; $C(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$.

15. $P_x = 22$; $P_y = 24$; $C(x,y) = 2x^2 + 3xy + 3y^2$.

16. $P_x = 26$; $P_y = 20$; $C(x,y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2$.

17. $P_x = 15$; $P_y = 18$; $C(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$.

18. $P_x = 18$; $P_y = 32$; $C(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$.

19. $P_x = 25$; $P_y = 30$; $C(x,y) = 2x^2 + 3xy + 3y^2$.

20. $P_x = 42$; $P_y = 28$; $C(x,y) = 4x^2 + 5xy + 2y^2$.

21. $P_x = 20$; $P_y = 24$; $C(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2$.

22. $P_x = 15$; $P_y = 9$; $C(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$.

23. $P_x = 26$; $P_y = 16$; $C(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2$.

24. $P_x = 32$; $P_y = 18$; $C(x,y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2$.

25. $P_x = 14$; $P_y = 8$; $C(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$.

Завдання 4. Результати експерименту наведені в таблиці. Методам найменших квадратів знайти коефіцієнти k і b функці

1)

1) x	2	3	5	6	9	12
y	3	4	6	5	7	8

2)

x	0	1	2	3	4	5
y	1	1,5	2,5	3	3,5	4

3)

x	1	2	3	4	6	7
y	0,5	0,6	1	0,9	1,5	1,2

4)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	2,5	3,5	4	4,5	5

5)

x	0	1	2	4	7	8
y	0,4	1	2,5	1,9	2,7	4,3

6)

x	0	1	2	3	5	6
y	0,5	0,6	1	0,9	1,5	1,2

7)

x	1	2	4	5	6	8
y	1,2	1,6	2,5	3	3,4	4

8)

x	1	2	3	5	8	9
y	1,4	2	3,5	2,9	3,7	5,3

9)

x	3	4	5	6	7	8
y	0,7	1,9	2,1	2,5	3,4	4,5

10)

x	2	3	5	6	7	9
y	2,2	2,6	3,5	4	4,4	5

11)

x	2	3	4	5	6	7
y	2	4	3,5	5	5,5	5,5

12)

x	1	4	5	6	7	8
y	0,2	0,3	0,4	0,8	0,9	1

13)

x	2	4	5	7	8	9
y	0,7	1	1,5	1,3	1,4	1,7

14)

x	3	4	5	6	7	8
y	0,7	1,9	2,1	2,5	3,4	4,5

15)

x	2	3	5	6	7	9
y	1,5	1,6	1,4	2	2,2	2,5

16)

x	2	3	4	5	6	7
y	2	4	3,5	5	5,5	5,5

17)

x	1	2	3	4	5	7
y	0,9	1,6	2,5	3,1	3,5	4,5

18)

x	2	3	4	5	6	7
y	1,7	2,9	3,1	3,5	4,4	5,5

19)

x	3	4	6	7	10	13
y	4	5	7	6	8	9

20)

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	2,5	4	5,5	4,5

21)

x	3	5	6	8	9	10
y	1,7	2	2,5	4	5,5	4,5

22)

x	2	3	4	5	6	8
y	1,9	2,6	3,5	4,1	4,5	5,5

23)

x	1	2	4	5	6	8
y	0,5	0,6	0,4	1	1,2	1,5

24)

x	1	3	5	7	8	9
y	1,3	1,4	1,5	2	2,1	2,3

25)

x	2	4	6	8	10	11
y	2,1	2,4	2,6	2,6	2,7	2,8

Контрольні запитання

1. Функція двох змінних. Основні означення, способи задання, графік.
2. Границя функції двох змінних.
3. Неперервність функції двох змінних.
4. Частинні похідні першого порядку.
5. Повний диференціал функції двох змінних. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях
6. Похідна за напрямом.
7. Градієнт функції.
8. Частинні похідні вищих порядків.
9. Локальні екстремуми функцій двох змінних.
10. Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
11. Метод найменших квадратів.

§2. Інтегральне числення функції однієї змінної

Основні поняття і теореми: [1 – ст. 508-558; 2 – ст. 297-349; 3 – ст. 269-295; 4 – ст. 330-405].

Зразки розв'язування задач

2.1. Невизначений інтеграл

Задача 2.1.1

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{4\cdot 9^x - 2\cdot 25^x}{15^x}dx$

Розв'язання

$$\int \frac{4\cdot 9^x - 2\cdot 25^x}{15^x}dx = 4\int \frac{9^x}{15^x}dx - 2\int \frac{25^x}{15^x}dx = 4\int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx - 2\int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx =$$

$$= 4\left(\frac{3}{5}\right)^x \log_{\frac{3}{5}} e - 2\left(\frac{5}{3}\right)^x \log_{\frac{5}{3}} e + C.$$

б) $\int \frac{3x+1}{x^2-6x+10}dx$

Розв'язання

$$\int \frac{3x+1}{x^2-6x+10}dx = \begin{bmatrix} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{3(t+3)+1}{(t+3)^2-6(t+3)+10}dx = \int \frac{3t+10}{t^2+1}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+1} +$$

$$+10\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right| + 10arctgt + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+10\right| + 10arctg(x-3) + C.$$

в) $\int x^3 \ln(x+1)dx$

Розв'язання

$$\int x^3 \ln(x+1)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+1), \ du = \dfrac{dx}{x+1}, \\ dv = x^3 dx, \qquad v = \dfrac{x^4}{4} \end{bmatrix} = \frac{x^4}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x+1}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\int\left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln(x+1) - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \begin{bmatrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \end{bmatrix} = \int \frac{3\cos t dt}{\sqrt{\left(9 - 9\sin^2 t\right)^3}} = \int \frac{3\cos t dt}{27\cos^3 t} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9}tgt + C.$$

Оскільки $\sin t = \frac{x}{3}$, $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$, то $tgt = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

Отже, $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C.$

2.2. Визначений інтеграл

Задача 2.2.1

Обчислити визначені інтеграли.

а) $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx = \int\limits_1^2 x^2 dx + \int\limits_1^2 x^{-4} dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 + \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 1 \right) = \frac{7}{3} + \frac{7}{24} = \frac{21}{8}$.

б)

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x+1} = t, \; x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) & \\ dx = tdt, & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ t & 1 & 3 \end{array} \end{array} \right] = \int\limits_1^3 \frac{tdt}{1+t} = \int\limits_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = t\Big|_1^3 - \ln|t+1|\Big|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - (\ln 4 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

в)

$$\int\limits_0^1 \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+1), & du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x+1} = \ln 2 - \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \ln 2 - \left(x - \ln(x+1)\Big|_0^1 \right) = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1.$$

2.3 Використання визначеного інтеграла в економіці

Задача 2.3.1.

Чисті інвестиції визначаються формулою $I(t) = 5000\sqrt[3]{t}$. Знайти приріст капіталу за 8 років.

Розв’язання

Маємо $\Delta K = K(8) - K(0) = \int\limits_0^8 5000\sqrt[3]{t} dt = 5000 \left. \frac{t^{\frac{4}{3}}}{4/3} \right|_0^8 = \frac{3 \cdot 5000}{4} \left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}} \right) = 60000$.

Задача 2.3.2.

Знайти обсяг продукції виробленої фірмою за три роки, якщо функція Кобба-Дугласа:

$$q(t) = (2+3t)e^{2t}.$$

Розв'язання

Маємо:

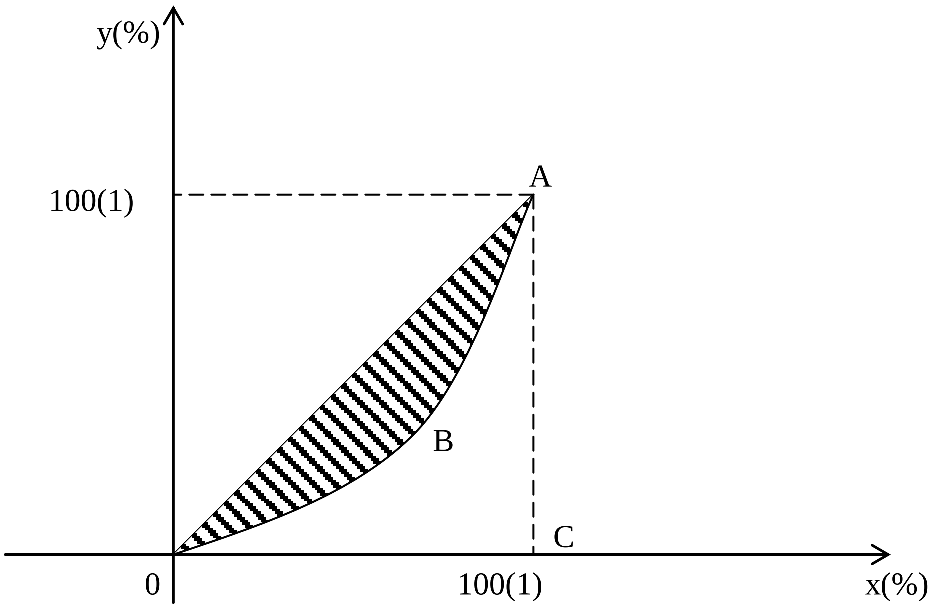
$$Q = \int_0^3 (2+3t)e^{2t}dt = \begin{bmatrix} u = 2+3t, \ du = 3dt \\ dv = e^{2t}dt, \ v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(2+3t)e^{2t}\Big|_0^3 - \frac{3}{2}\int_0^3 e^{2t}dt =$$

$$= \frac{11}{2}e^6 - 1 - \frac{3}{4}e^{2t}\Big|_0^3 = \frac{11}{2}e^6 - 1 - \frac{3}{4}e^6 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}e^6 - \frac{1}{4}.$$

Задача 2.3.3.

Відомо, що крива Лоренца визначається рівнянням $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$, де y − частка сукупного доходу, яку одержує x − населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язання



Коефіцієнт Джині обчислюється за формулою

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{S_{\Delta OAC} - S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC} \quad ,$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t,\ dx = \cos t dt \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 0 \\ \hline t & 1 & \pi/2 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 1 - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$$

$K = 1 - 2 \cdot 0{,}215 = 1 - 0{,}43 = 0{,}57$

Міра нерівності розподілу доходів населення становить $\approx 57\%$.

2.4. Невласний інтеграл

Задача 2.4.1.

Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

Розв'язання

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\lim_{b \to x} \frac{1}{\ln x}\Bigg|_e^b = -\lim_{b \to \infty}\left(\frac{1}{\ln b} + 1\right) = 1.$$

Тобто, інтеграл збіжний.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання 5. Знайти невизначений інтеграл.

1) а) $\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}dx$; в) $\int x^3 \ln x dx$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2) а) $\int \frac{3\cdot 2^x+2\cdot 3^x}{2^x}dx$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+3}dx$.; в) $\int x\sin 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

3) а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}dx$; в) $\int xe^{3x}dx$; г). $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$.

4) а) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+4}dx$; в) $\int x\cos 2x dx$; г) $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

5) а) $\int \frac{5\cdot 4^x+4\cdot 5^x}{4^x}dx$; б) $\int \frac{3x+2}{x^2+5x+7}dx$; в) $\int x^2 \ln x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$.

6) а) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; б) $\int \frac{2-x}{x^2+2x+5}dx$; в) $\int (2x-1)e^{-x}dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

7) а) $\int \frac{3tgx+1}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+7}dx$; в) $\int (2x+1)e^{2x}dx$; г) $\int \frac{dx}{\left(9-x^2\right)\sqrt{9-x^2}}$.

8) а) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$; б) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+6}dx$; в) $\int x\cos 5x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}$.

9) а) $\int \frac{\ln x+1}{x}dx$; б) $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+20}dx$; в) $\int x^2 \ln x dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}dx$.

10) а) $\int \sin x e^{\cos x}dx$; б) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+10}dx$; в) $\int (3x-1)\sin 2x dx$;

г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}$.

11) а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; б) $\int \frac{19-4x}{x^2+3x+4}dx$; в) $\int (5x-2)\ln x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

12) а) $\int \frac{1-tgx}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+7}dx$; в) $\int \ln(3+x^2)dx$; г) $\int x^2\sqrt{3-x^2}dx$.

13) а) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$; б) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}dx$; в) $\int (2x+1)\sin 3x dx$; г) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

14) а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+3}dx$; б) $\int \frac{3x+8}{x^2-6x+10}dx$; в) $\int (3x+4)\cos x dx$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

15) а) $\int \frac{x-arctgx}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{4x+5}{x^2+4x+6}dx$; в) $\int (2x-1)\sin x dx$; г) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

16) а) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2+3x+4}dx$; в) $\int (4x+3)e^{2x}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

17) а) $\int \frac{\arcsin^2 x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{x+2}{x^2+5x+7}dx$; в) $\int (3x-1)\cos 3x dx$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

18) а) $\int \frac{1+ctgx}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{4x+3}{x^2-3x+4}dx$; в) $\int x^2\ln x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx$.

19) а) $\int \frac{3\cdot 2^x+2\cdot 3^x}{3^x}dx$; б) $\int \frac{5x-3}{x^2+2x+3}dx$; в) $\int (3x-1)\sin 3x dx$; г) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

20) а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$; б) $\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}dx$; в) $\int (3x-1)2^x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$.

21) а) $\int \frac{tg^3 x+2}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{4x+1}{x^2-2x+3}dx$; в) $\int (x+2)\cos 3x dx$; г) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

22) а) $\int \frac{\ln^2 x+3}{x}dx$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx$; в) $\int (3x-1)e^{3x}dx$;

г) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

23) а) $\int \frac{2\cdot 3^{2x}+3\cdot 2^{2x}}{6^x}dx$;б) $\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx$; в) $\int x^3 \ln x dx$; г) $\int \frac{dx}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$.

24) а) $\int \frac{2+arctg^3 x}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{5x+2}{x^2+3x+4}dx$; в) $\int (2x-3)e^{4x}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$.

25) а) $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{3x+2}{x^2-8x+12}dx$; в) $\int (4x+1)\sin 3x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$.

Завдання 6. Обчислити визначений інтеграл

1) а) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx$; б) $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}}dx$.

2) а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

3) а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

4) а) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$; б) $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

5) а) $\int_1^2 \left(x^2+2x+\frac{1}{x^3}\right)dx$; б) $\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

6) а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8xdx}{1+4x^2}$; б) $\int_0^8 \frac{4x+3}{\sqrt{x+1}}dx$.

7) а) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx$; б) $\int_0^7 \frac{x+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$.

8) а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$; б) $\int_3^7 \frac{xdx}{\sqrt{5x+1}}$.

9) а) $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; б) $\int\limits_0^5 \frac{x+\sqrt{3x+1}}{1+\sqrt{3x+1}}dx$.

10) а) $\int\limits_1^3 \left(x+3x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$; б) $\int\limits_0^5 \frac{2x+1}{\sqrt{7x+1}+2}dx$.

11) а) $\int\limits_{-8}^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}+3}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int\limits_{-3}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$.

12) а) $\int\limits_{25}^{49} \frac{x-6}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

13) а) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; б) $\int\limits_2^6 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$.

14) а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

15) а) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

16) а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

17) а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

18) а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; б) $\int\limits_0^9 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$.

19) а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

20) а) $\int_1^e \frac{x+2\ln x}{x}dx$; б) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

Завдання 7. Знайти обсяг виробленої продукції за 3 роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $g(t)=(\alpha t+\beta)e^{\lambda t}$.

1. $\alpha=3,\ \beta=4,\ \lambda=4$;
2. $\alpha=5,\ \beta=2,\ \lambda=3$;
3. $\alpha=4,\ \beta=1,\ \lambda=2$;
4. $\alpha=6,\ \beta=3,\ \lambda=5$;
5. $\alpha=5,\ \beta=2,\ \lambda=3$;
6. $\alpha=3,\ \beta=6,\ \lambda=2$;
7. $\alpha=7,\ \beta=5,\ \lambda=4$;
8. $\alpha=2,\ \beta=4,\ \lambda=3$;
9. $\alpha=5,\ \beta=6,\ \lambda=6$;
10. $\alpha=3,\ \beta=7,\ \lambda=5$;
11. $\alpha=1,\ \beta=3,\ \lambda=2$;
12. $\alpha=3,\ \beta=4,\ \lambda=3$;
13. $\alpha=6,\ \beta=3,\ \lambda=4$;
14. $\alpha=5,\ \beta=2,\ \lambda=1$;
15. $\alpha=4,\ \beta=6,\ \lambda=7$;
16. $\alpha=3,\ \beta=5,\ \lambda=4$;
17. $\alpha=6,\ \beta=4,\ \lambda=3$;
18. $\alpha=4,\ \beta=5,\ \lambda=2$;
19. $\alpha=3,\ \beta=6,\ \lambda=5$;
20. $\alpha=7,\ \beta=4,\ \lambda=1$;
21. $\alpha=2,\ \beta=3,\ \lambda=5$;
22. $\alpha=4,\ \beta=2,\ \lambda=2$;
23. $\alpha=3,\ \beta=1,\ \lambda=4$;
24. $\alpha=6,\ \beta=4,\ \lambda=3$;
25. $\alpha=3,\ \beta=7,\ \lambda=5$.

Завдання 8. За даними досліджень розподілу доходів населення деякої країни крива Лоренца описується функцією $y=f(x)$, де y – частка сукупного доходу, яку одержує частинна населення x. Обчислити коефіцієнт Джині.

1. $y=0{,}94x^2+0{,}06x$;
2. $y=\frac{4x}{3x+1}$;
3. $y=0{,}4x^2+0{,}6x$;
4. $y=\frac{3x}{2x+1}$;
5. $y=0{,}2x^2+0{,}8x$;
6. $y=\frac{4x}{x+3}$;

7. $y = 0{,}54x^2 + 0{,}46x$;   8. $y = \dfrac{x}{2x-1}$;

9. $y = 0{,}82x^2 + 0{,}18x$;   10. $y = \dfrac{5x}{3x+2}$;

11. $y = 0{,}36x^2 + 0{,}64x$;   12. $y = \dfrac{4x}{3x+1}$;

13. $y = 0{,}4x^2 + 0{,}6x$;   14. $y = \dfrac{3x}{4x-1}$;

15. $y = 0{,}24x^2 + 0{,}76x$;   16. $y = \dfrac{2x}{x+1}$;

17. $y = 0{,}16x^2 + 0{,}84x$;   18. $y = \dfrac{5x}{4x+1}$;

19. $y = 0{,}3x^2 + 0{,}7x$;   20. $y = \dfrac{7x}{6x+1}$;

21. $y = 0{,}4x^2 + 0{,}6x$;   22. $y = \dfrac{3x}{2x+1}$;

23. $y = 0{,}1x^2 + 0{,}9x$;   24. $y = \dfrac{5x}{4x+1}$;

25. $y = 0{,}23x^2 + 0{,}77x$.

Завдання 9. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

1. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+4}$;   2. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{xdx}{x^2+4}$;   3. $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;   4. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-3x}dx$;

5. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+6x+11}$ 6. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{xdx}{x^2+9}$ 7. $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln^3 x}$;   8. $\int\limits_0^{\infty} (2x+1)e^{-x}dx$;

9. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+8x+17}$ 10. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2x+4}dx$ 11. $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln^4 x}$;   12. $\int\limits_0^{\infty} (x+1)e^{-2x}dx$;

13. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+10x+26}$ 14. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3+3x+7}dx$ 15. $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;   16. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$;

17. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ 18. $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+25}$ 19. $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^6 x}$; 20. $\int_{0}^{\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$.

21. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ 22. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ 23. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$; 24. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+9}$.

25. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Контрольні запитання

1. Первісна. Загальний вигляд первісної.
2. Таблиця інтегралів від основних елементарних функцій.
3. Основні властивості невизначеного інтеграла.
4. Основні методи інтегрування.
5. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
6. Означення визначеного інтеграла.
7. Основні властивості визначеного інтеграла.
8. Формула Ньютона-Лейбніца.
9. Методи обчислення визначених інтегралів.
10. Невласні інтеграли.
11. Застосування визначених інтегралів.

§3. Диференціальні рівняння

Основні поняття і теореми: [1. – ст. 614-657; 2. – ст. 352-368; 3. – ст. 315-345; 4. – ст. 421-473].

Зразки розв'язування задач

Диференціальні рівняння І порядку

Задача 3.1

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$\text{а) } (2x+2xy^2)dx-(y+yx^2)dy=0.$$

Розв'язання

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2x(1+y^2)dx = y(1+x^2)dy.$$

Поділимо обидві частини частини на вираз $(1+y^2)(1+x^2)$:

$$\frac{2x(1+y^2)dx}{(1+y^2)(1+x^2)} = \frac{y(1+x^2)dy}{(1+y^2)(1+x^2)} \Rightarrow \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \frac{4xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}.$$

Змінні відокремлено.

Інтегруємо обидві частині:

$$\int \frac{4xdx}{1+x^2} = \int \frac{2ydy}{1+y^2} \Rightarrow 2\ln(1+x^2) = \ln(1+y^2) - \ln C \Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln C(1+x^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+y^2 = C(1+x^2)^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{C(1+x^2)^2-1}.$$

Відповідь: $y=\pm\sqrt{C(1+x^2)^2-1}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$\text{б) } y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

Розв’язання

Це однорідне диференціальне рівняння. Використаємо підстановку: $t=\frac{y}{x}\Rightarrow y=tx\Rightarrow dy=tdx+xdt\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$.

Підставляємо цей вираз в початкове рівняння:

$$t+x\frac{dt}{dx}=t^2+8t+12\Rightarrow x\frac{dt}{dx}=t^2+7t+12\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dt}{t^2+7t+12}.$$

Змінні відокремлено.

Інтегруємо обидві частини: $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t^2+7t+12}$.

Знайдемо обидва інтеграла окремо.

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\ln C_1=\ln C_1|x|.$$

$$\int\frac{dt}{t^2+7t+12}=\int\frac{dt}{(t+3)(t+4)}=\int\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t+4}\right)dt=\ln|t+3|-\ln|t+4|+\ln C_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln C_1|x|=\ln C_2\left|\frac{t+3}{t+4}\right|\Rightarrow Cx=\frac{t+3}{t+4}, \text{ де } C=\pm\frac{C_1}{C_2}.$$

Повертаємося до змінної y, підставляючи $t=\frac{y}{x}\Rightarrow Cx=\dfrac{\frac{y}{x}+3}{\frac{y}{x}+4}\Rightarrow$

$$\Rightarrow Cx=\frac{y+3x}{y+4x}\Rightarrow C=\frac{y+3x}{xy+4x^2},$$

або в явному вигляді: $y+3x=C(xy+4x^2)\Rightarrow y=\frac{4Cx^2-3x}{1-Cx}$

Відповідь: $\frac{y+3x}{xy+4x^2}=C$, або $y=\frac{4Cx^2-3x}{1-Cx}$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

$$\text{в) } y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Розв'язання

Це лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.

Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі, який полягає в тому, що розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $y = u(x)v(x)$, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна нулю). Якщо

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv' \text{ і } y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{\sin x}{x}. \end{array}\right.$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

Оскільки $u'v = \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x + C$. Отже, $y = \dfrac{1}{x}(C - \cos x)$.

Відповідь: $y = \dfrac{C - \cos x}{x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння II порядку

Задача 3.2

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' + 2y' + y = -2e^{-2x}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 1, \tag{1}$$

Розв'язання

Це лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами.

1) Спочатку знаходимо частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 2y' + y = 0, \tag{2}$$

Складаємо характеристичне рівняння: $k^2+2k+1=0 \Rightarrow (k+1)^2=0$.

Його корені: $k_{1,2}=-1$, тобто характеристичне рівняння має два однакових кореня.

Тоді загальний розв'язок рівняння (2) буде:

$$\bar{y}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx} \Rightarrow \bar{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}.$$

2) Розв'язок рівняння (1) з правою частиною дорівнює сумі: $y=\bar{y}+y^*$, де y^* – деякий частинний розв'язок рівняння (1). Для його знаходження використаємо правило:

Нехай права частина рівняння (1) має вигляд: $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Тоді якщо число α не є коренем характеристичного рівняння, то $y^*=Q(x)e^{\alpha x}$.

Якщо α є однократним коренем характеристичного рівняння, то $y^*=xQ(x)e^{\alpha x}$.

Якщо α є двократним коренем характеристичного рівняння то $y^*=x^2Q(x)e^{\alpha x}$,

де $Q(x)$ – многочлен степеня n.

Тут $f(x)=-2e^{-2x} \Rightarrow \alpha=-2,\ P_n(x)=-2$ – многочлен 0-го степеня (константа).

Число $\alpha=-2$ не є коренем характеристичного рівняння $\Rightarrow$

$$y^*=Q(x)e^{\alpha x}=Ae^{-2x}$$

Знаходимо похідні $(y^*)',\ (y^*)''$ і підставляємо в ліву частину рівняння (1):

$$y^*=Ae^{-2x}$$

$$(y^*)' = \left(Ae^{-2x}\right)' = -2Ae^{-2x}$$

$$(y^*)'' = \left(-2Ae^{-2x}\right)' = 4Ae^{-2x}$$

$$y'' + 2y' + y = -2e^{-2x}$$

$$4Ae^{-2x} - 2 \cdot 2Ae^{-2x} + Ae^{-2x} = -2e^{-2x}$$

$$Ae^{-2x} = -2e^{-2x} \Rightarrow A = -2.$$

Отже $y^* = -2e^{-2x}$.

Тоді загальний розв'язок рівняння (1) буде:

$$y = \bar{y} + y^* \Rightarrow y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 2e^{-2x}.$$

3) Знаходимо розв'язок задачі Коші, тобто частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \Rightarrow$ при $x = 0 : y = 2,\ \ y' = 1$.

Підставляємо ці значення у загальний розв'язок диференціального рівняння (1) і в його похідну:

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 2e^{-2x}$$

$$y' = \left(C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 2e^{-2x}\right)' = -C_1e^{-x} + C_2\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) + 4e^{-2x}$$

$$y(0) = C_1e^0 + 0 - 2e^0 \Rightarrow C_1 - 2 = 2$$

$$y'(0) = -C_1e^0 + C_2\left(e^0 - 0\right) + 4e^0 \Rightarrow -C_1 + C_2 + 4 = 1$$

Одержуємо систему двох рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1 - 2 = 2, \\ -C_1 + C_2 + 4 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ -C_1 + C_2 = -3. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4;\ C_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 2e^{-2x} = 4e^{-x} + xe^{-x} - 2e^{-2x}$$

Відповідь: $y = 4e^{-x} + xe^{-x} - 2e^{-2x}$ – розв'язок задачі Коші.

Найпростіші застосування диференціальних рівнянь в економіці

Нехай $Y(t)-$доход, який одержано на момент часу t деякою галуззю, виражається формулою:

$$Y(t)=I(t)+C(t), \tag{3}$$

де $I(t)-$сума інвестицій;

$C(t)-$величина споживання.

Будемо вважати, що швидкість збільшення доходу пропорційна величині інвестицій, тобто

$$b\cdot Y'(t)=I(t), \tag{4}$$

де $b-$коефіцієнт капіталоємності приросту доходу.

Нехай $C(t)$ є фіксованою частиною одержуваного доходу на момент часу t, тобто $C(t)=(1-m)Y(t)$, де $m-$норма інвестицій, $0<m<1$ (стала величина).

Тоді з (3), (4) випливає :

$$Y'(t)=\frac{m}{b}Y(t).$$

Задача 3.3

Знайти функцію доходу $Y(t)$, якщо відомо, що величина споживання визначається функцією $C=2t$, коефіцієнт капіталоємності приросту доходу $b=\frac{1}{2}$, $Y(0)=2$.

Розв'язання

Із співвідношень (3), (4) одержуємо, що

$$Y(t)=\frac{1}{2}Y'(t)+2t\Rightarrow Y'(t)-2Y(t)=-4t,\ \ Y(0)=2.$$

Отже, маємо лінійне диференціальне рівняння І порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі: $Y(t)=u(t)\cdot v(t)$

$$Y'=uv\Rightarrow Y'=u'v+uv' \text{ і } Y'-2Y=-4t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'v + uv' - 2uv = -4t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v' - 2v = 0, \\ u'v = -4t. \end{array}\right|$$
$$\Rightarrow u'v + u(v' - 2v) = -4t \Rightarrow$$

$$v' - 2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2dt \Rightarrow \ln|v| = 2t \Rightarrow v = e^{2t}.$$

Так як $u'v = -4t \Rightarrow ue^{2t} = -4t \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = -4te^{-2t} \Rightarrow du = -4te^{-2t}dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = -4\int te^{-2t}dt = \left| \begin{array}{l} u_1 = t, \ du_1 = dt \\ dv_1 = e^{-2t}dt, \ v_1 = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{array} \right| = -4\left(-t\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt\right) =$$

$$= 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$$

.

Отже, $Y(t) = e^{2t}\left(2te^{-2t} + e^{-2t} + c\right) \Rightarrow Y(t) = Ce^{2t} + 2t + 1,\ C \in R.$

Скориставшись початковою умовою $Y(0) = 2,$ отримаємо $2 = C + 1 \Rightarrow C = 1.$

Таким чином, функція доходу має вигляд

$$Y(t) = e^{2t} + 2t + 1.$$

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Задача 10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. а) $xydx-\left(2+x^2\right)dy=0;$

б) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2};$

в) $y'+yctgx=e^{\cos x};$

2. а) $\left(xy^2-y^2\right)dx-\left(x^2y+x^2\right)dy=0;$

б) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x};$

в) $y'-2yctgx=\sin^3 x;$

3. а) $\left(6x-3xy^2\right)dx+\left(x^2y+y\right)dy=0;$

б) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2};$

в) $y'+y\cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x;$

4. а) $\left(2x+2xy^2\right)dx-\left(y+yx^2\right)dy=0;$

б) $y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+12;$

в) $y'-\frac{y}{x+1}=e^x(x+1);$

5. а) $\sqrt{1-x^2}dy+\left(xy^2+x\right)dx=0;$

б) $3y'=\frac{y^2}{x^2}+10\frac{y}{x}+10;$

в) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{12}{x^3};$

11. а) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0;$

б) $y'=\frac{2xy}{3x^2-y^2};$

в) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x};$

12. а) $\left(x^2+1\right)dy-2xdx=0;$

б) $y'-\frac{y}{x}=-2\ln x;$

в) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x};$

13. а) $xdy-\left(y^2-y\right)dx=0;$

б) $y'-\frac{y}{x}=-2\ln x;$

в) $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x};$

14. а) $(1-2x)dx-y^2dy=0;$

б) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x};$

в) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3;$

15. а) $5e^x tgydx+\left(1-e^x\right)\sec^2 ydy=0;$

б) $y'=\frac{y^2-x^2}{xy};$

в) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x};$

6. а) $(xy^2+x)dx+(x^2y+y)dy=0$;

б) $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$;

в) $y'-\frac{3y}{x+1}=e^x(x+1)^3$;

7. а) $x\sqrt{y^2+1}dx+y\sqrt{x^2+1}dy=0$;

б) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$;

в) $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+2x$;

8. а) $\sqrt{3+y^2}dx-(y+x^2y)dy=0$;

б) $y'=\frac{x+y}{x-y}$;

в) $y'+\frac{2x}{x^2+1}y=2x$;

9. а) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$;

б) $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$;

в) $y'-ctgxy=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$;

10. а) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$;

б) $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$;

в) $y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2}$;

16. а) $\sqrt{y^2+1}dx-xydy=0$;

б) $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}-4$;

в) $y'-\frac{2y}{x}=\frac{e^x(x-2)}{x}$;

17. а) $(y^2-2)dx+2x^2ydy=0$;

б) $y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$;

в) $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}$;

18. а) $x^2(5+y^2)dx+4(x^2y+y)dy=0$;

б) $y'=\frac{y}{x}-e^{\frac{y}{x}}$;

в) $y'-\frac{1}{x+2}y=x^2+4x+5$;

19. а) $2x(1+e^y)dx-e^y(1+x^2)dy=0$;

б) $y'-\frac{y}{x}=tg\frac{y}{x}$;

в) $y'-\frac{3y}{x}=x$;

20. а) $tgx\sec^2 ydx+ctgy\cos^2 xdy=0$;

б) $y'=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$;

в) $y'-\frac{y}{x}=xe^x$.

21. а) $xydy-\left(x^2y^2+y^2\right)dx=0;$

б) $y'=\dfrac{2x^2+y^2}{y^2};$

в) $y'-\dfrac{y}{x}=-2\ln x;$

22. а) $\dfrac{ctgx}{ctgy}dx+\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 y}dy=0;$

б) $y'=\dfrac{2x+y}{x};$

в) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{1}{x^2}.$

23. а) $e^x\left(x^2+x^2y\right)dx+y^2dy=0;$

б) $y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+4\left(\dfrac{y}{x}\right)+2;$

в) $y'+2xy=e^{-x^2}\sin x;$

24. а) $y^2xdy=\left(1+x^2\right)dx;$

б) $y'=e^{\frac{3y}{x}}+\dfrac{y}{x}-1;$

в) $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos x}.$

25. а) $\left(xy^2+y^2\right)dx+\left(3x^2y+y\right)dy=0;$

б) $y'=\dfrac{3x^2+2y^2}{xy};$

в) $y'+\dfrac{3y}{x+1}=(x+1)^3;$

Задача 11. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $4y''+16y'+15y=4e^{-\frac{3x}{2}};\ y(0)=2;\ y'(0)=1;$
2. $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6;\ y(0)=1;\ y'(0)=3{,}2;$
3. $y''-3y'=3(2-x^2);\ y(0)=1;\ y'(0)=1;$
4. $y''+2y'+y=-2e^{-2x};\ y(0)=2;\ y'(0)=1;$
5. $y''-8y'+7y=3x^2+7x+8;\ y(0)=1;\ y'(0)=2;$
6. $y''+2y'-3y=4e^{-x};\ y(0)=0;\ y'(0)=\dfrac{4}{3};$
7. $y''-2y'+5y=5x;\ y(0)=0;\ y'(0)=0;$

8. $y'' + y' = 9x^2;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0;$

9. $y'' - y' - 2y = -3e^{-x};\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0;$

10. $y'' - 2y' = 3x^2 + x - 4;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 3;$

11. $y'' - 4y' + 3y = 5e^{3x};\ y(0) = 5;\ y'(0) = \frac{23}{2};$

12. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 + 6x + 16;\ y(0) = 5;\ y'(0) = 7;$

13. $y'' - 2y' + 5y = 2e^{x};\ y(0) = \frac{3}{2};\ y'(0) = \frac{11}{2};$

14. $2y'' - y' - y = 2x^2 + 3x + 1;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 2;$

15. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x};\ y(0) = 4;\ y'(0) = -2;$

16. $y'' - 5y' + 4y = 8x^2 + 3x;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 1;$

17. $y'' - 6y' + 5y = 3e^{4x};\ y(0) = -3;\ y'(0) = 4;$

18. $y'' + 4y = x^2 + 2x + 3;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 0;$

19. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{3x};\ y(0) = 4;\ y'(0) = 7;$

20. $y'' + 5y' = 5x^2 + 3x + 10;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 3;$

21. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x};\ y(0) = \frac{2}{3};\ y'(0) = 2;$

22. $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 3;$

23. $y'' + 13y' + 12y = 18x^2 - 39;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 3;$

24. $y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4;\ y(0) = \frac{2}{25};\ y'(0) = \frac{3}{5};$

25. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{x};\ y(0) = 3;\ y'(0) = 8$.

Задача 12. Знайти функцію доходу $Y(t)$, якщо відомо, що величина споживання визначається формулою $C = C(t)$, коефіцієнт капіталоємності приросту доходу b і $Y(0) = Y_0$.

1. $C = t + 3;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 1.$

2. $C = 2t + 1;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 2.$

3. $C = 2t - 3;\quad b = \frac{1}{4};\quad Y_0 = 3.$

4. $C = 3t + 2;\quad b = \frac{1}{5};\quad Y_0 = 4.$

5. $C = 2t + 5;\quad b = \frac{1}{6};\quad Y_0 = 2.$

6. $C = t - 2;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 1.$

7. $C = 4t + 1;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 2.$

8. $C = 3t - 1;\quad b = \frac{1}{4};\quad Y_0 = 3.$

9. $C = 2t - 3;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 1.$

10. $C = 5t - 6;\quad b = \frac{1}{5};\quad Y_0 = 3.$

11. $C = t - 4;\quad b = \frac{1}{6};\quad Y_0 = 2.$

12. $C = 2t + 3;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 3.$

13. $C = 2t - 3;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 1.$

14. $C = 3t - 2;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 2.$

15. $C = 5t - 3;\quad b = \frac{1}{7};\quad Y_0 = 3.$

16. $C = 4t + 1;\quad b = \frac{1}{4};\quad Y_0 = 4.$

17. $C = 5t + 3;\quad b = \frac{1}{5};\quad Y_0 = 2.$

18. $C = 3t - 1;\quad b = \frac{1}{6};\quad Y_0 = 6.$

19. $C = t + 6;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 4.$

20. $C = 5t + 1;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 2.$

21. $C = 7t + 3;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 1.$

22. $C = 10t + 1;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 3.$

23. $C = 2t + 7;\quad b = \frac{1}{2};\quad Y_0 = 3.$

24. $C = t + 8;\quad b = \frac{1}{4};\quad Y_0 = 4.$

25. $C = 3t + 5;\quad b = \frac{1}{3};\quad Y_0 = 1.$

Контрольні запитання

1. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні питання.
2. Рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні диференціальні рівняння.
4. Лінійні диференціальні рівняння.
5. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Грисенко М.В. Математика для економістів. Навч. посібник – К. Либідь, 2007, – 720с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. Навчальний посібник: Вид. 4-те, перероб. то доп. – Київ; Центр навчальної літерати, 2005, – 448с.
3. Гоучір М.К. Математика для економістів. Посібник. Київ. Видавничий центр «Академія» 2003.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посібник – К.: А.С.К. 2001 –648 с.
5. Діскант В.І. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії К.: Вища шк., 2001 – 303с.