МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

з теорії функцій комплексної змінної

Затверджено
на засіданні кафедри вищої математики,
протокол № 8 від 13.02.2008 р.,
кафедри прикладної математики,
протокол № 7 від 18.02.2008 р.
та Методичною радою ЧДТУ
Протокол № __ від __.__.2008 р.

Черкаси ЧДТУ 2008

УДК 517.2
ББК 22.1
Н

Укладачі: Щерба Анатолій Іванович, к.ф.-м.н., доцент,
Дідковський Руслан Михайлович, к.т.н., доцент,
Олексієнко Наталія Володимирівна, к.т.н., доцент,
Щерба Валентина Олександрівна

Рецензент: Ламзіна Тетяна Борисівна, к.ф.-м.н.

Н Навчально-методичні матеріали з теорії функції комплексної змінної / Укл.: Щерба А.І., Дідковський Р.М., Олексієнко Н.В., Щерба В.О. – Черкаси: ЧДТУ, 2008. – 48 с.
ISBN 966-7533-
ISBN 966-7533-

Навчально-методичні матеріали охоплюють матеріал програми четвертого семестру дисципліни «Вища математика». Подано короткі теоретичні відомості, зразки розв'язування типових задач, контрольні запитання та завдання для закріплення знань із вивченого матеріалу, завдання для роботи в аудиторії, завдання для виконання розрахунково-графічних робіт.

Для студентів технічних спеціальностей всіх форм навчання.

УДК 517.2
ББК 22.1

Навчальне видання

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з теорії функції комплексної змінної

В авторській редакції

Надруковано з авторського оригіналу
Макет Манжури Т.А.

Підписано до друку __.__.2008. Формат 60х84 1/16. Папір офісн. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативний. Ум. др. арк. _,__. Обл.-вид.арк. _,__. Тираж ___ прим. Зам. №______.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.

ISBN 966-7533-
ISBN 966-7533-

ПЕРЕДМОВА

Поняття комплексного числа виникло в математиці, перш за все, завдяки спробам поширення методів розв'язання квадратних і кубічних рівнянь на загальний випадок. Перша письмова згадка про «уявні» вирази $a+\sqrt{-b},\ b>0$, зустрічається в роботі Дж. Кардано 1545 року. Незважаючи на те, що природа «уявних» чисел довгий час залишалася нерозкритою, їх успішне використання в допоміжних викладках виправдовували дійсні, повністю реальні і правильні результати.

Незаперечний внесок у розвиток теорії комплексних чисел внесли Р. Бомбелі (1572 р.), Р. Котес (1722 р.), А. Муавр (1724 р.), Л. Ейлер (1777 р.), К. Гаусс (1799 р.). Сам термін «комплексне число» належить Л. Карно (1803 р.). Слід відзначити, що саме після наукових праць К. Гаусса застосування комплексних чисел та функцій комплексної змінної стало звичайною справою.

Сьогодні теорія функцій комплексної змінної є невід'ємною частиною математичного апарату і напряму використовується у гідромеханіці, теорії фільтрації, теорії пружності, теплотехніці, гідротехніці, електротехніці, радіотехніці, електронній оптиці та ін.

Дане видання відповідає програмі дисципліни «Вища математика» для інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. При його використанні потрібні лише знання загального курсу вищої математики, що передбачені робочою програмою. Воно вміщує шість параграфів:

– Комплексні числа. Основні дії над комплексними числами.
– Добування кореня. Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа. Елементарні функції комплексної змінної.
– Площина комплексної змінної. Диференціювання функції комплексної змінної.
– Інтегрування функції комплексної змінної.
– Ряди в комплексній області. Ряд Лорана.

В кожному параграфі наведено: посилання на навчальну літературу, формулювання основних понять і теорем, зразки розв'язування основних типів задач, контрольні питання і завдання для закріплення знань, набір задач для роботи студентів в аудиторії при вивченні матеріалу, завдання для розрахунково-графічної роботи.

Для індивідуалізації самостійної роботи студентів у розрахункових завданнях передбачено 25 варіантів задач.

Практикум рекомендовано для студентів денної форми навчання, він також може бути використаний для самостійного опрацювання матеріалу студентами заочної форми навчання.

ВСТУП

У даний час комплексні числа не менш вживані ніж дійсні числа як в суто математичних дослідженнях так і у різноманітних застосуваннях у фізиці і техніці.

Символ $i = \sqrt{-1}$ уявної одиниці запропонував використовувати Л. Ейлер. Чисто уявним називають вираз $i \cdot y$, якщо $y \neq 0$. Під комплексним числом розуміють лінійний по i вираз $z = x + i \cdot y$, де числа $x, y \in R$. Саме К. Гауссу належить відома теорема про замкненість поля комплексних чисел.

Теорема. *Всі розширення поля дійсних чисел R, отримані за рахунок алгебраїчного приєднання до поля R кореня i рівняння $x^2 + 1 = 0$ ізоморфні (подібні) між собою. На отриманому полі C комплексних чисел z довільний многочлен розкладається у добуток лінійних множників.*

Комплексним числам z відповідають пари $(x; y)$, тому їх розташовують на площині C. Слід зауважити, що саме завдяки цьому, та на відміну від множини дійсних чисел, для комплексних чисел поняття «більше» і «менше» не можна означити розумно.

Суто арифметична теорія комплексних чисел як пар дійсних чисел була побудована У. Гамільтоном у 1837 році. Він показав також, що розширення поняття числа за межі комплексних чисел можливе тільки у випадку відмови від яких-небудь звичних властивостей для дій над числами. Йому належить важливе просторове узагальнення комплексного числа – поняття кватерніону.

Одним із основних класів функцій комплексної змінної є аналітичні функції. Як ілюстрацію їхнього застосування наведемо лише такий факт:

кожен плоский потенціальний потік без джерел і точок завихрювання у області визначення може бути описаний за допомогою комплексного потенціалу, що є аналітичною функцією.

§1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА.
ОСНОВНІ ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Основні поняття та теореми
[1, с.205-208; 3, с.206-211]

Уявною одиницею називається символ $i=\sqrt{-1}$, який задовольняє умову $i \cdot i = i^2 = -1$. Комплексне число – це вираз виду $z = a + ib$ (алгебраїчна форма запису), де a, b – дійсні числа, які називаються відповідно дійсною і уявною частиною числа z. Позначають $a = \operatorname{Re} z,\ b = \operatorname{Im} z$. При $b = 0$ комплексне число визначається лише дійсною частиною, тому дійсні числа є підмножиною комплексних. Необхідність введення поняття комплексних чисел багато в чому пояснює

Основна теорема алгебри. *Довільний многочлен*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,\ a_0 \neq 0$$

на множині комплексних чисел має рівно n *коренів.*

Аксіоми арифметики на множині комплексних чисел

Нехай $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ два комплексних числа.

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.
2. $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$.

Числа $z = a + ib$ і $z = a - ib$ називаються спряженими. Справедливими є рівності: $z + \bar{z} = 2a,\ z - \bar{z} = 2bi,\ z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Зауваження. Для виконання ділення $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ двох комплексних чисел, заданих в алгебраїчній формі, чисельник і знаменник дробу помножають на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Геометричне тлумачення комплексного числа

Кожному числу $z = a + ib$ ставлять у відповідність точку $M(a;b)$ на декартовій площині XOY або її радіус-вектор $\overline{OM}$. В полярній системі координат з початком в точці O та полярною віссю вздовж OX $(0 \le r \le \infty, -\infty \le \varphi \le \infty)$, комплексному числу ставлять у відповідність точку $M(r;\varphi)$. Число r називають модулем комплексного числа і позначають $|z|$, а φ – аргументом комплексного числа і позначають $\varphi = \arg z$.

Для $z \neq 0$ виконуються рівності

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi; \\ b = r\sin\varphi; \end{cases} \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Аргумент визначається неоднозначно: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in Z$, де $\arg z$ – головне значення аргументу числа z; $-\pi < \arg z \le \pi$.

Тригонометричною формою комплексного числа називається його запис у вигляді:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Теорема про властивості тригонометричної форми запису комплексного числа. *При множенні комплексних чисел* z_1 *і* z_2 *їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються:*

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Наслідок.

1) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 2) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

Формула Муавра:

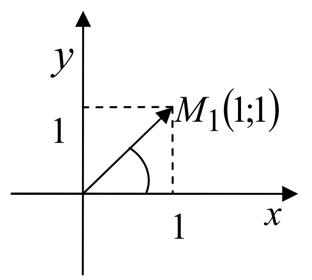
$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 1.1. Обчисліть $z = (1+i)^8\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6}$. Отримане комплексне число запишіть в алгебраїчній та тригонометричній формах. Зобразіть число на комплексній площині. Знайдіть $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

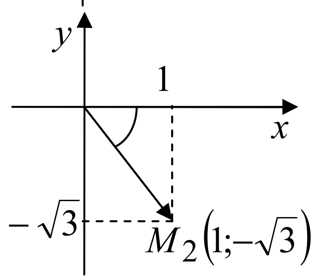
Розв'язання.

Запишемо числа $z_1 = 1 + i$ та $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі:



$z_1 = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \arg z = \dfrac{\pi}{4}$, тому

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$



$z_2 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{1+3} = 2,\ \arg z = -\dfrac{\pi}{3}$, тому

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Обчислимо

$$z=(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^8\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-6}=$$

$$=16\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)\cdot\frac{1}{64}\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16\cdot 1\cdot\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

Отримане комплексне число $z=\frac{1}{4}$ має уявну частину $\operatorname{Im} z=0$, дійсну частину $\operatorname{Re} z=\frac{1}{4}$, модуль $|z|=\frac{1}{4}$, аргумент $\arg z=0$. Алгебраїчна форма цього числа: $z=\frac{1}{4}+0i$, тригонометрична: $z=\frac{1}{4}(\cos 0+i\sin 0)$.

Задача 1.2. Запишіть число $z=(-4+3i)^3$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання.

Розглянемо число $z_1=-4+3i$ і запишемо його в тригонометричній формі: $|z_1|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$, $\arg z_1=\arg(-4+3i)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Звідси $z_1=5\left(\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\right)$. Тоді за формулою Муавра:

$$z=z_1{}^3=5^3\left(\cos\left(3\pi-3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(3\pi-3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\right)=$$

$$=125\left(-\cos\left(3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\right)=$$

$$=-125\cos\left(3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i125\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right).$$

Контрольні запитання та завдання

1. Обчисліть степені уявної одиниці: i^3, i^4, i^5, i^{17}.

2. Розв'яжіть рівняння в комплексній площині:

$$z^2+4z+29=0,\ z^2+1=0,\ z^2+z+1=0.$$

3. Покажіть, що :

$z_1+z_2=z_2+z_1$,

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$,

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$,

$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ і

$z_1\cdot z_2=0\Leftrightarrow z_1=0$ або $z_2=0$.

4. Доведіть рівності:

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$,

$\overline{\left(z^m\right)} = \left(\overline{z}\right)^m$.

5. Покажіть, що множина комплексних чисел не може бути впорядкованою, тобто самі комплексні числа (а не їх модулі) ніколи не можна поєднувати знаком нерівності.

Завдання для роботи в аудиторії

1. Виконайте дії:

а) $(3+5i)+(4+6i)$;

б) $(-4-6i)-(-4+5i)$;

в) $(1+i)+(2-3i)-(3+4i)$;

г) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{\sqrt{6}}\right)$;

д) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{4}\right)\left(2+1\frac{1}{3}i\right)$;

е) $\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{6}-i\sqrt{3}\right)$;

є) $\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)$;

ж) $i^{12}; i^{19}; i^{10}; i^{33}; (-i)^{13}; (-i)^{24}; -i^{18}; -i^{15}$.

2. Запишіть в тригонометричній формі комплексні числа і побудуйте їх геометричне зображення:

а) $3;\ -5;\ 2i;\ -4i$,

б) $1i;\ -2+2i;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

в) $\sqrt{3}-i;\ -3+4i;\ -2-3i$.

3. Виконайте ділення комплексних чисел:

а) $\frac{-2-3i}{i}$; $\frac{3-2i}{-i}$;

б) $\frac{3}{2-i}$; $\frac{3i}{2-3i}$;

в) $\frac{1-i}{1+i}$; $\frac{3-5i}{5-3i}$;

г) $\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$; $\frac{36-i\sqrt{2}}{2+i\sqrt{2}}$.

4. Піднесіть до степеня комплексні числа:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;

б) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^{2}$;

в) $(1+i)^6+(1-i)^6$;

г) $(1+i)^7(1-i)^7$;

д) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{7}$;

е) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{-3}$;

є) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}+i}\right)^{4}$;

ж) $\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}\right)^{-5}$.

Розрахункові завдання

Задача 1. Обчисліть z. Отримане число зобразіть на комплексній площині. Знайдіть $\operatorname{Im} z, \operatorname{Re} z, |z|, \arg z$. Запишіть отримане число в алгебраїчній та тригонометричній формах:

1. $z=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^8.$

2. $z=\left(\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}\right)^6.$

3. $z=\left(2i+i\sqrt{2}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^2.$

4. $z=\left(3i+i\sqrt{3}-\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^2.$

5. $z=\dfrac{1}{(1+i)^4}-\dfrac{1}{(1-i)^3}.$

6. $z=\dfrac{(1+i)^3}{(2-2i)^2}\left(\dfrac{3-i}{2+i}-\dfrac{2-i}{3+i}\right).$

7. $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^3.$

8. $z=(1+2i)^4(-7+24i).$

9. $z=(3+i)^4(28-96i).$

10. $z=(7+24i)\left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2.$

11. $z=(1+i)^8+(1-i)^8.$

12. $z=\left(\dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^2\left(\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+5\right).$

13. $z=(1+i)^{10}+(1-i)^{10}.$

14. $z=(1+i)^5+(1-i)^5.$

15. $z=\left(1+i^3\right)^7+\left(1-i^3\right)^7.$

16. $z=\dfrac{(1-i)^{50}}{1+i^{30}}.$

17. $z=\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$

18. $z=\dfrac{(1+i)^6-(1-i)^6}{(1+i)^6\cdot(1-i)^6}.$

19. $z=\left(\dfrac{3i}{2+2i}-\dfrac{2i}{1-i}-\dfrac{1}{i}\right)\cdot\dfrac{152-32i}{5+i}.$

20. $z=\dfrac{(2+i)^3+5i^5-2}{(1-i)^6-(1+i)^6}.$

21. $z=\left(\dfrac{5-i}{2+3i}-\dfrac{1-5i}{3+2i}\right)\cdot\dfrac{169(1+i)^5}{(1-i)^5}.$

22. $z=\dfrac{(1+i)^7}{2(1-i)}+3i.$

23. $z=\left(\dfrac{5i}{12i}-\dfrac{i}{2-4i}\dfrac{1}{i}\right)\left(\dfrac{11{,}1-1{,}7i}{5-i}\right).$

24. $z=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}+i}.$

25. $z=\left(\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{24}.$

§2. ДОБУВАННЯ КОРЕНЯ. ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА. ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.

Основні поняття та теореми

[І, с.207-209;3, с.211-217]

Коренем *n*-го степеня комплексного числа z називається комплексне число w таке, що $w^n = z$. Позначають: $w = \sqrt[n]{z}$. Із формули Муавра слідує, що:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z,$$

де $\sqrt[n]{r}$ – арифметичний корінь з модуля $r = |z|$ комплексного числа.

Корінь *n*-го степеня на комплексній площині має n різних значень, які можна отримати із даної формули при $k = 0,1,2,3,...,(n-1)$. Зокрема,

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{3} + i\sin\dfrac{\varphi}{3}\right); \\ \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right); \\ \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right)\right). \end{cases}$$

Позначимо: $\cos\varphi + i\sin\varphi = \mathrm{e}^{i\varphi}$, де e – основа натурального логарифма.

Дане співвідношення для $\mathrm{e}^{i\varphi}$ називається формулою Ейлера. Звідси маємо показникову форму комплексного числа: $\mathrm{z} = \mathrm{re}^{i\varphi}$. Виходячи із теореми про властивості тригонометричної форми запису комплексного числа, вираз $\mathrm{e}^{i\varphi}$ володіє всіма властивостями показникової функції:

$$\mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \mathrm{e}^{i\varphi_1} \cdot \mathrm{e}^{i\varphi_2};\ \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi_1}}{\mathrm{e}^{i\varphi_2}};\ \mathrm{e}^{in\varphi} = \left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n.$$

На основі сказаного, формулу Ейлера приймають як означення показникової функції від суто уявної змінної. Показникова функція комплексної змінної $z = x + iy$ визначається так:

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{x}\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Оскільки $\mathrm{e}^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$, то

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} \text{ і } \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i}.$$

У загальному випадку тригонометричні функції комплексної змінної виражаються аналогічно:

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}.$$

За означенням

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гіперболічні функції визначаються рівностями:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2},\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Логарифмічна функція $\operatorname{Ln} z,\ z \neq 0$ визначається як функція, обернена до показникової:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i,\ k \in Z,$$

де $\ln|z|$ – натуральний логарифм дійсного числа. Головним значенням логарифма комплексного числа називається $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Загальна степенева функція z^{α}, де α – довільне фіксоване комплексне число, визначається рівністю

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Ln} z},\ z \neq 0.$$

Головним значенням степеневої функції називають $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$. Загальна показникова функція $a^{z}\ (a \neq 0)$ визначається рівністю $a^{z} = \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} a}$. Головне значення показникової функції записують так: $a^{z} = \mathrm{e}^{z \ln a}$.

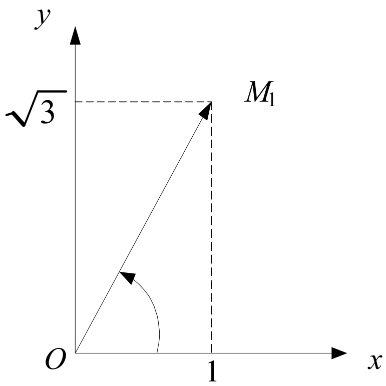
Зразки розв'язування задач

Задача 2.1. Подати в алгебраїчній формі числа:

$$\text{а) } z=\operatorname{Ln}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right);\ \text{б) } z=\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right);\ \text{в) } z=(-1)^{2i}.$$

Розв'язання.

а) Знайдемо модуль і аргумент числа $z_1=1+\sqrt{3}i$. $|z_1| == \sqrt{1+3}=2$, $\arg z_1=\dfrac{\pi}{3}$.



Тоді число $z=\operatorname{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)=$

$$=\ln 2+\frac{\pi}{3}i+2\pi k i,\ \text{де } k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\ .$$

При $k=0$ отримаємо головне значення:

$$\ln\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln 2+\frac{\pi}{3}i.$$

б) Запишемо число $z=\operatorname{ch}\left(3+\dfrac{\pi}{4}i\right)$ у вигляді:

$$z=\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)=\frac{\mathrm{e}^{3+\frac{\pi}{4}i}+\mathrm{e}^{-3-\frac{\pi}{4}i}}{2}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}+\frac{1}{\mathrm{e}^3}\mathrm{e}^{\frac{-\pi}{4}i}\right)=$$

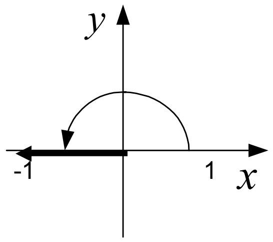
$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\mathrm{e}^3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^6+1\right)}{4\mathrm{e}^3}+i\frac{\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^6-1\right)}{4\mathrm{e}^3},$$

Тобто дане число z в алгебраїчній формі має вид

$$z=\frac{\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^6+1\right)}{4\mathrm{e}^3}+i\frac{\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^6-1\right)}{4\mathrm{e}^3}.$$

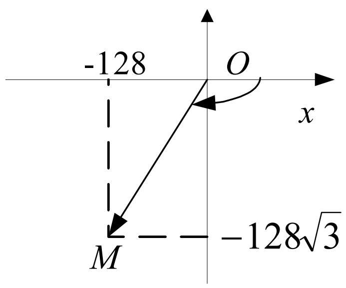
в) Запишемо модуль і аргумент числа $z_1=-1$: $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+0}=1$, $\arg z_1=\pi$.



Тоді $z=(-1)^{2i}=\mathrm{e}^{2i\operatorname{Ln}(-1)}=\mathrm{e}^{2i(\ln 1+i(\pi+2\pi k))}=$ $=\mathrm{e}^{-2\pi-4\pi k}$, де $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. При $k=0$ маємо головне значення $(-1)^{2\mathrm{i}} == \mathrm{e}^{-2\pi}$ або в алгебраїчній формі $(-1)^{2\mathrm{i}} == \mathrm{e}^{-2\pi}+0\mathrm{i}$.

Задача 2.2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

Розв'язання.



Позначимо $w=\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$. Запишемо комплексне число $z=-128-i128\sqrt{3}$ в тригонометричній формі:

$$\arg z=-\frac{2\pi}{3},\ |z|=\sqrt{(-128)^2+\left(-128\sqrt{3}\right)^2}=256.$$

Отже, $z=256\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$

Тоді $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=\sqrt[4]{256\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}=$

$$=4\left(\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)\right),\ k\in Z.$$

Підставивши $k=0,1,2,3$, знайдемо:

при $k=0$, $w_0=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}-2i$;

при $k=1$, $w_1=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2+2\sqrt{3}i$;

при $k=2$, $w_2=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}+2i$;

при $k=3$, $w_3=4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2-2\sqrt{3}i$.

Контрольні запитання та завдання

1. Зобразіть на комплексній площині корені $\sqrt{1};\sqrt[3]{1};\sqrt[4]{1}$.

2. Як розташовані всі значення $\sqrt[n]{z}$ на комплексній площині? Який зв'язок між всіма значеннями кореня $\sqrt[n]{z}$ і $\sqrt[n]{1}$?

3. Чому в розрахунковій формулі для обчислення $\sqrt[n]{z}$ достатньо розглянути діапазон значень $k=0,1,2,...(n-1)$?

4. Запишіть в показниковій формі спряжене число $\bar{z}$, якщо $z=r\mathrm{e}^{i\varphi}$.

5. Запишіть а алгебраїчній формі $e^{2\pi i}, e^{\pi i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

6. Покажіть, що:

$$e^{z+2\pi ki} = e^{z}, k \in Z; \cos(z+2\pi k) = \cos z; \quad \sin(z+2\pi k) = \sin z.$$

7. Доведіть, що:

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2; \quad \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\, z^{n} = n\,\mathrm{Ln}\, z + 2\pi ki, k \in Z; \quad \mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z.$$

8. Доведіть справедливість формул:

$$\arcsin z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right); \quad \arccos z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\mathrm{arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}; \qquad \mathrm{arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

5. Подайте в алгебраїчній формі комплексні числа:

а) 1^{2i}; б) i^{3i}; в) $(-i)^{5i}$; г) $(-1)^{4i}$; д) $\mathrm{sh}(2-5\mathrm{i})$; е) $\pi \mathrm{i} e^{\pi \mathrm{i}}$;
є) $(-1)^{\sqrt{2}}$; ж) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right)$; з) $\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)$.

6. У наступних прикладах знайдіть всі значення кореня, попередньо записавши підкореневий вираз в тригонометричній формі:

а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{4i}$; в) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$; г) $\sqrt[3]{-8}$; д) $\sqrt[3]{8}$;
е) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$; є) $\sqrt[3]{27}$; ж) $\sqrt[4]{256}$; з) $\sqrt[3]{\frac{i}{27}}$; і) $\sqrt[3]{-27i}$.

Розрахункові завдання

Задача 2. Подайте в алгебраїчній формі:

1. $z = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$. 2. $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2i\right)$. 3. $\mathrm{z} = \mathrm{Ln}\, 6$.

4. $\mathrm{z} = \mathrm{sh}\left(2 + \frac{\pi}{4}i\right)$. 5. $\mathrm{z} = \mathrm{ch}\left(2 + \frac{\pi}{2}i\right)$. 6. $\mathrm{z} = \mathrm{Ln}(1+i)$.

7. $z = \sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right)$. 8. $z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$. 9. $\mathrm{z} = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{3} + i\right)$.

10. $z=\mathrm{sh}\left(1+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)$. 11. $z=\mathrm{ch}(1-\pi\mathrm{i})$. 12. $z=\mathrm{Ln}(-1+i)$.

13. $z=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2i\right)$. 14. $z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$. 15. $z=\mathrm{sh}\left(3+\frac{\pi}{6}i\right)$.

16. $z=\mathrm{ch}\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)$. 17. $z=\mathrm{Ln}(-1-i)$. 18. $z=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3i\right)$.

19. $z=\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$. 20. $z=\mathrm{Ln}(1-i)$. 21. $z=\mathrm{sh}\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)$.

22. $z=\mathrm{ch}\left(2-\frac{\pi}{6}i\right)$. 23. $z=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$. 24. $z=\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$.

25. $z=(-1)^{4i}$.

Задача 3. Знайдіть всі значення кореня:

1. $\sqrt[4]{-1}$. 2. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$. 3. $\sqrt[3]{1}$.

4. $\sqrt[3]{i}$. 5. $\sqrt[4]{1}$. 6. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

7. $\sqrt[3]{-1}$. 8. $\sqrt[3]{-i}$. 9. $\sqrt[4]{-16}$.

10. $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}$. 11. $\sqrt[3]{8}$. 12. $\sqrt[3]{8i}$.

13. $\sqrt[4]{16}$. 14. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$. 15. $\sqrt[3]{-8}$.

16. $\sqrt[3]{-8i}$. 17. $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$. 18. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

19. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$. 20. $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$. 21. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

22. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$. 23. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$. 24. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

25. $\sqrt[4]{-128+128\sqrt{3}i}$.

§3. ПЛОЩИНА КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. КРИВА ТА ОБЛАСТЬ НА ПЛОЩИНІ

Основні поняття та теореми
[4, с.11-17]

Позначимо через $z = x + iy$ змінну комплексну величину. Точка $M(x;\, y) \leftrightarrow z$ при зміні z рухається по площині XOY, яку називають площиною C комплексної змінної z. Відстань між двома точками $z_1,\, z_2 \in C$ знаходять за формулою $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|$. Із геометричної побудови на площині $z_1 \pm z_2$ і властивостей, що пов'язують довжини сторін трикутника, слідує, що $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Ці співвідношення називаються нерівностями трикутника. Будь-яке співвідношення, яке задає криву чи область на площині, можна переписати в комплексній формі з однією змінною координатою z і з комплексними коефіцієнтами. При цьому достатньо підставити у формули :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2};\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Наведемо приклади співвідношень, що визначають найпростіші криві та області на комплексній площині:

1) $|z - z_0| = R$ – коло радіуса R з центром в точці z_0;

2) $|z - z_0| < \delta$ – внутрішня частина круга радіуса δ з центром в точці z_0 (δ-окіл точки z_0);

3) $\varphi_1 \le \arg z \le \varphi_2$ – кут $\{(r;\varphi):\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, 0 \le r < \infty\}$;

4) $\mathrm{Re}\, z \ge 0$ – права півплощина $x \ge 0$;

5) $\mathrm{Im}\, z < 0$ – нижня півплощина $y < 0$.

Проте, наприклад, при обчисленні інтегралів або при визначенні образа конформного відображення, необхідно вміти переходити від комплексного запису кривої чи області до параметричного їх задання в дійсній формі.

Кривою L називається множина точок площини C, яку можна подати як образ відрізка $[\alpha;\beta]$ при неперервному відображенні:

$$z = z(t) = x(t) + y(t)i,\ \ \alpha \le t \le \beta.$$

Областю D називається множина точок площини C, яка задовольняє двом вимогам:

1) для будь-якої точки $z_0 \in D$ існує δ-окіл цієї точки, який належить D (відкритість);

2) для будь-яких двох точок $z_1, z_2 \in D$ знайдеться така крива $L \in D$ з початком в точці z_1 і кінцем в точці z_2 (зв'язність).

Точка z_0 називається межовою точкою області D, якщо в довільному δ-околі z_0 знайдуться точки, які належать області D і такі, що даній області не належать. Сукупність всіх межових точок називається межею області D і позначається ∂D.

Розглянемо елементарні перетворення площини:

1) паралельне перенесення області D на вектор z_0 задається формулою $z+z_0$;

2) лінійний розтяг площини в ρ раз і поворот на кут θ складають перетворення подібності, яке задається формулою $\rho e^{i\theta}z$ або по-іншому $z_0 z = |z_0|\, \mathrm{e}^{i\arg z_0}\, z$.

Зразки розв'язування задач

Задача 3.1. Вказати, які лінії визначаються рівняннями:

$$\text{а) } |z-2|+|z+2|=5; \quad \text{б) } \operatorname{Re}\frac{z-1}{z+2}=0; \quad \text{в) } \operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

Розв'язання.

а) Нехай $z=x+iy$. На комплексній площині числу z відповідає точка $M(x;y)$. Тоді геометрично $|z-2|$ означає відстань від точки $F_1(2;0)$ до точки $M(x;y)$, а $|z+2|$ – від точки $F_2(-2;0)$до точи $M(x;y)$, і задана рівність $|z-2|+|z+2|=5$ визначає еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $c=2$, $a=2{,}5$, $b^2=a^2-c^2=6{,}25-4=2{,}25=1{,}5^2$. Тому $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1{,}5^2}=1$ – еліпс, заданий рівністю $|z-2|+|z+2|=5$.

б) Нехай $z=x+iy$. Тоді

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}=\frac{((x-1)+iy)((x+1)-iy)}{((x+1)+iy)((x+1)-iy)}=$$

$$=\frac{((x^2-1)+y^2)+(xy+y-xy+y)i}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2}.$$

З умови задачі слідує, що $\frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2}=0 \Rightarrow x^2-1+y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$, а це є рівняння кола з центром в точці $O(0;0)$ і з радіусом $R=1$.

в) Нехай $z=x+iy$, тоді

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}\Rightarrow \operatorname{Im}\frac{1}{z}=-\frac{y}{x^2+y^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -2y = x^2+y^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+2y=0 \Rightarrow$$

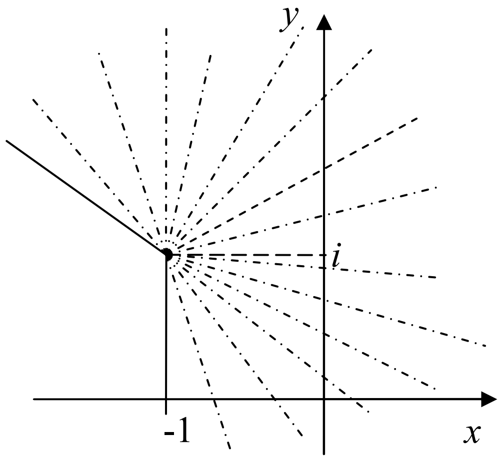
$\Rightarrow\; x^2+(y+1)^2=1$ – рівняння кола з центром в точці $z=-i$ радіуса $R=1$.

Задача 3.2. Знайти множину всіх точок комплексної площини, які задовольняють задані умови:

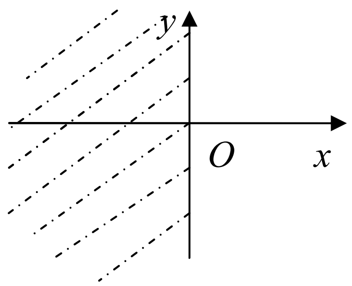
а) $-\frac{\pi}{2} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3}{4}\pi$; б) $|1+z|<|1-z|$; в) $\mathrm{Re}(z\cdot(1-i))<\sqrt{2}$.

Розв'язання.

а) Комплексне число $z+1-\mathrm{i}$ зображається вектором, початок якого точка $-1+i$, а кінець – точка z. Кут між цим вектором і віссю Ox рівний $\arg(z+1-i)$, і він змінюється в межах від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$. Тому задана подвійна нерівність визначає кут між прямими, які виходять із точки $-1+i$ і утворюють з віссю Ox кути $-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{3\pi}{4}$ радіан.



б) Нехай $z=x+iy$, $1=1+0i$, $-1=-1+0i$. Тоді



$$|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

$$|1-z|=|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \text{ і}$$

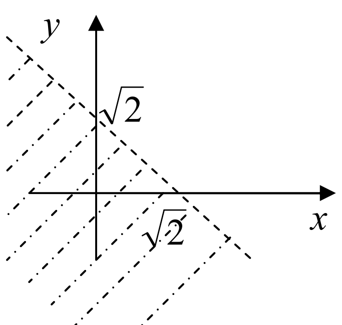
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}<\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2<x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x<0 \;\Rightarrow x<0,$$

тобто нерівність $|1+z|<|1-z|$ геометрично визначає множину точок, які розташовані в півплощині $x<0$.

в) Нехай $z=x+iy$. Тоді



$$z\cdot(1-i)=(x+iy)(1-i)=x-xi+yi+y=$$

$$=(x+y)+i(-x+y).$$

Звідси слідує, що

$$\mathrm{Re}(z\cdot(1-i))=x+y,$$

і за умовою задачі $x+y<\sqrt{2}$, тобто ця нерівність геометрично визначає множину точок, розташованих в півплощині, яку відтинає пряма $x+y=\sqrt{2}$.

Задача 3.3. Визначити лінії, які задані рівняннями:

а) $z = t + it^2, -\infty < t < \infty$;

б) $z = 2 \cdot e^{it}, \ \pi \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$;

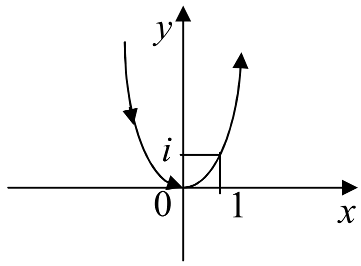
в) $z = -t + i\sqrt{1-t^2}, \ -1 \le t < 0$;

г) $z = t^2 + 2t + 5 + i\left(t^2 + 2t + 1\right)$.

Розв'язання.

а) Нехай $z = x + iy$. Дане рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x = t; \\ y = t^2; \\ -\infty < t < \infty, \end{cases}$$

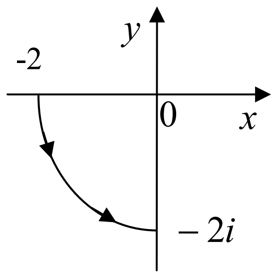


звідси слідує, що $y = x^2$, а це є парабола, що обходиться у вказаному на рисунку напрямку.

б) Запишемо праву частину заданого рівняння в тригонометричній формі:

$$2e^{it} = 2(\cos t + i \sin t)$$

і нехай $z = x + iy$. Тоді



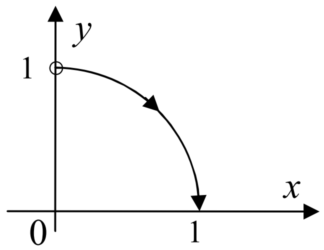
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \ \pi \le t \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \ \pi \le t \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x \in [\overrightarrow{-2; 0}], \ y \in [\overleftarrow{-2; 0}]. \end{cases}$$

Це частина кола з центром в точці $z = 0$ і радіусом $R = 2$, розташована в ІІІ-ій четверті, яка обходиться проти годинникової стрілки.

Запис $x \in [\overrightarrow{-2; 0}]$ означає, що $x = x(t)$ набуває значення від -2 до 0, а запис $y \in [\overleftarrow{-2; 0}]$ – значення $y = y(t)$ від 0 до -2.

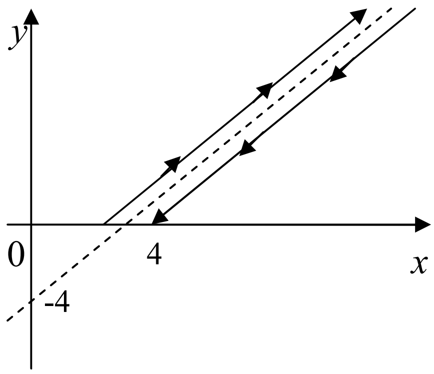
в) $z=-t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\le t<0 \Rightarrow \begin{cases} x=-t; \\ y=\sqrt{1-t^2}; \Rightarrow \\ -1\le t<0; \end{cases}$



$$\Rightarrow \begin{cases} t=-x; \\ y=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}; \Leftrightarrow \\ 0<x\le 1; \end{cases} \begin{cases} y^2+x^2=1; \\ x\in \overrightarrow{(0;1]}; \\ y\in \overleftarrow{[0;1)}\,. \end{cases}$$

Це частина одиничного кола, розташованого в першій четверті, що обходиться за годинниковою стрілкою.

г) Дане рівняння запишемо у вигляді



$$\begin{cases} x=t^2+2t+5; \\ y=t^2+2t+1; \Rightarrow \\ -\infty<t<\infty; \end{cases}$$

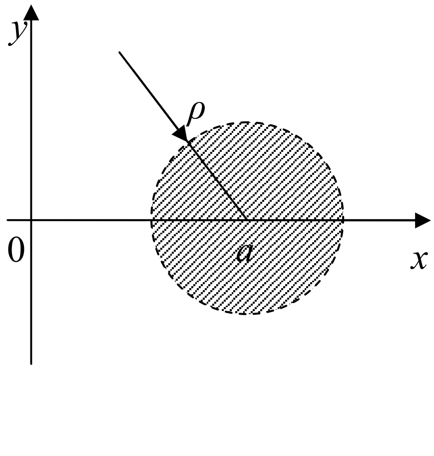
$$\Rightarrow \begin{cases} x=y+4=(t+1)^2+4\ge 4; \\ y=(t+1)^2\ge 0; \\ -\infty<t<\infty; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-4; \\ x\in[4;\infty); \\ y\in[0;\infty). \end{cases}$$

На рисунку стрілками вказаний порядок обходу променя при зміні t від $-\infty$ до $+\infty$.

Задача 3.4. Описати за допомогою нерівності область D, якщо її межа складається із однієї замкненої кривої, яку задано рівнянням $z=a+\rho e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання.

$z=a+\rho e^{it}=a+\rho(\cos t+i\sin t)=a+\rho\cos t+i\rho\sin t,$ де $0\le t\le 2\pi.$ Тому,



$$\begin{cases} x=a+\rho\cos t; \\ y=\rho\sin t; \\ 0\le t\le 2\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=\rho\cos t; \\ y=\rho\sin t \\ 0\le t\le 2\pi; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+y^2=\rho^2,$$

це коло з центром в точці $z=a$ радіуса ρ. Отже область D є круг , що задається нерівністю $|z-a|<\rho$.

Контрольні запитання та завдання

1. На комплексній площині задано дві довільні точки z_1 і z_2. Зобразіть точки $z_1 \pm z_2$.

2. Яка властивість про співвідношення довжин сторін трикутника відповідає нерівності $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$?

3. Доведіть, що $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$.

4. Запишіть в комплексній формі рівняння ліній:

а) прямої $y = x$;

б) променя, який проходить через точку $z = 2 - i$ під кутом $\dfrac{\pi}{6}$;

в) прямої, яка паралельна осі Ox і розташована на віддалі 5 одиниць від неї.

5. Зобразіть на комплексній площині криві, які задані рівняннями:

а) $z = e^{it}, t \in [0;2\pi]$; б) $z = t\,\mathrm{e}^{i\pi/3}, 0 \le t < \infty$;

в) $z = e^{it} \cdot \cos 2t, 0 \le t < 2\pi$; г) $z = z_0 + Re^{it}, 0 \le t < 2\pi$;

д) $z = z_0 + te^{i\varphi_0}, 0 \le t < \infty$.

6. Зобразіть на комплексній площині множину точок, заданих умовами:

а) $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$; б) $1 < \operatorname{Re} z < 2$;

в) $|z - 1 + i| \ge 1$; г) $1 \le |z + 2 + i| \le 2$.

Завдання для роботи в аудиторії

7. Вкажіть, які лінії визначаються рівняннями:

а) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}, a > 0$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = 1$; в) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$;

г) $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a} = 0$; д) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; е) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$;

є) $\bar{z} + \bar{z}^2 = 1$; ж) $|z - i| + |z + i| = 4$; з) $|z - i| - |z + i| = 2$;

і) $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$; й) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$; к) $|z - z_1| = |z - z_2|$.

8. Знайдіть множину точок на комплексній площині, яка визначається заданими умовами:

а) $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$; б) $1 < \operatorname{Re} z < 2$; в) $|z - 1| < |z - i|$;

г) $1 \le |z + 2 + i| \le 2$; д) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 1$; е) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$;

є) $|z| - \operatorname{Re} z \le 0$; ж) $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$; з) $4 \le |z - 1| + |z + 1| \le 8$;

і) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2;}$ й) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2}$; к) $0 < \arg\dfrac{i-z}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$;

л) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \dfrac{\pi}{2}$; м) $|z - 2| + |z + 2| < 5$; н) $\arg(z - 1) > \dfrac{\pi}{4}$.

9. Визначіть лінії, задані рівняннями:

а) $z = 1 - it,\ 0 \le t \le 2;$

б) $z = t^2 + it^4, -\infty < t < \infty;$

в) $z = a(\cos t + i\sin t),\ a > 0;\ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2};$

г) $z = \frac{2+t}{2-t} + i\frac{1+t}{1-t};$

д) $z = t^2 - 4t + 20 - i\left(t^2 - 4t + 5\right);$

е) $z = 2t^2 + 2t + 1 - i\left(t^2 + t + 4\right);$

є) $z = t - 2 + i\left(t^2 - 4t + 5\right).$

10. Опишіть за допомогою нерівності область D, якщо її межа ∂D є замкнена крива, задана параметричним рівнянням:

а) $z = a + \rho\,\mathrm{e}^{-it},\ \ 0 \le t \le 2\pi;$

б) $z = t^2, -\infty < t < \infty;$

в) $z = a\,\mathrm{e}^{it} + \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-it},\ \ 0 \le t \le 2\pi,\ \ a > 1.$

Розрахункові завдання

Задача 4. Зобразіть область, задану нерівностями:

1. $|z-1| \le 1,\ |z+1| > 2.$
2. $|z+i| \ge 1,\ |z| < 2.$
3. $|z-i| \le 2,\ \mathrm{Re}\, z > 1.$
4. $|z+1| \ge 1,\ |z+i| < 1.$
5. $|z+1| < 1,\ |z-i| \le 1.$
6. $|z+i| \le 2,\ |z-i| > 2.$
7. $|z-1-i| \le 1,\ \mathrm{Im}\, z > 1,\ \mathrm{Re}\, z \ge 1.$
8. $|z-1+i| \le 1,\ \mathrm{Im}\, z \le -1,\ \mathrm{Re}\, z < 1.$
9. $|z-2-i| \le 2,\ \mathrm{Im}\, z < 1, \mathrm{Re}\, z \ge 3.$
10. $|z-1-i| \ge 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z \le 2, 0 \le \mathrm{Re}\, z < 2.$
11. $|z+i| < 2, 0 < \mathrm{Re}\, z \le 1.$
12. $|z-i| \le 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$
13. $|z-i| \le 2, 0 < \mathrm{Im}\, z < 2.$
14. $|z+i| > 1, -\frac{\pi}{4} < \arg z < 0.$
15. $|z-1-i| < 1,\ |\arg z| \le \frac{\pi}{4}.$
16. $|z| < 2, -\frac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{4}.$
17. $|z| \le 1,\ \arg(z+1) \ge \frac{\pi}{4}.$
18. $1 < |z-1| \le 2, \mathrm{Im}\, z \ge 0, \mathrm{Re}\, z < 1.$
19. $1 \le |z-i| < 2, \mathrm{Im}\, z > 10, \mathrm{Re}\, z < 0.$
20. $|z| < 2, \mathrm{Re}\, z \ge 1, \arg z < \frac{\pi}{4}.$
21. $|z| > 1,\ -1 < \mathrm{Im}\, z \le 1, 0 < \mathrm{Re}\, z \le 2.$
22. $|z-1| > 1, -1 \le \mathrm{Im}\, z < 0, 0 \le \mathrm{Re}\, z < 3.$
23. $|z+i| < 1, -\frac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\frac{\pi}{4}.$
24. $|z-i| \le 1, -\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}.$
25. $z\bar{z} < 2, \mathrm{Re}\, z \le 1, \mathrm{Im}\, z > -1.$

Задача 5. Визначіть вид кривої:

1. $z = 3\sec t + i2\,\mathrm{tg}\, t.$
2. $z = 2\sec t - i3\,\mathrm{tg}\, t.$
3. $z = -\sec t + i3\,\mathrm{tg}\, t.$
4. $z = 4\,\mathrm{tg}\, t - i3\sec t.$
5. $z = 3\,\mathrm{tg}\, t + i4\sec t.$
6. $z = -4\,\mathrm{tg}\, t - i2\sec t.$
7. $z = 3\,\mathrm{cosec}\, t + i3\,\mathrm{tg}\, t.$
8. $z = 4\,\mathrm{cosec}\, t - i2\,\mathrm{tg}\, t.$
9. $z = \mathrm{ctg}\, t - i2\,\mathrm{cosec}\, t.$
10. $z = -\mathrm{ctg}\, t + i3\,\mathrm{cosec}\, t.$
11. $z = \mathrm{ch}\, 2t + i2\,\mathrm{sh}\, 2t.$
12. $z = \mathrm{ch}\, 3t - i3\,\mathrm{sh}\, 3t.$

13. $z=5\,\mathrm{sh}\,4t+i\,\mathrm{ch}\,4t$. 14. $z=4\,\mathrm{sh}\,5t-i5\,\mathrm{ch}\,5t$. 15. $z=\dfrac{2}{\mathrm{ch}\,2t}+i4\,\mathrm{th}\,2t$.

16. $z=\dfrac{4}{\mathrm{ch}\,4t}+i\,\mathrm{th}\,4t$. 17. $z=\mathrm{th}\,5t+i\dfrac{5}{\mathrm{ch}\,5t}$. 18. $z=\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,t}-i\,\mathrm{cth}\,t$.

19. $z=2\mathrm{e}^{it}+\dfrac{1}{2\mathrm{e}^{it}}$. 20. $z=3\mathrm{e}^{it}-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^{it}}$. 21. $z=-2\mathrm{e}^{it}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{it}}$.

22. $z=2\mathrm{e}^{2it}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2it}}$. 23. $z=\dfrac{1+i}{1-t}+\dfrac{t}{1-t}(2-4i)$. 24. $z=\dfrac{t-1+it}{t(t-1)}$.

25. $z=\dfrac{1+t}{1-t}+i\dfrac{2+t}{2-t}$.

§4. ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Основні поняття та теореми [2, с.367-384; 3, с.213-215]

Функцією $f(z)$ комплексної змінної z на множині D, називається відповідність чисел $z\in D$ деяким комплексним числам w, яку задають по правилу $w=f(z)$. Множина D це область визначення $f(z)$. Функцію $f(z)$ можна записати так:

$$f(z)=u(z)+iv(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ (x;y)\in D,$$

де $u(x,y)=\mathrm{Re}\,f(z),\ v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(z)$ – дійсні функції двох дійсних змінних.

Якщо $|z-z_0|\to 0$, то кажуть, що змінна z прямує до сталого числа z_0, і пишуть $z\to z_0$.

Число $A=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ називається границею функції $f(z)$ в точці z_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta(\varepsilon,z_0)>0,$ що для всіх точок z із проколотого δ-околу: $0<|z-z_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(z)-A|<\varepsilon$.

Функція $w=f(z)$ називається неперервною в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Оскільки $w\to w_0=u_0+iv_0 \Leftrightarrow u\to u_0, v\to v_0$, то

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} v(x,y).$$

Теорема.

1. *Неперервність функції $f(z)$ еквівалентна неперервності функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$.*

2. *Якщо $f(z)$, $g(z)$ комплексні функції неперервні в точці z_0, то $f(z)\pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ та $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, $g(z)\neq 0$ неперервні функції.*

Поширення поняття графіка функції дійсної змінної на комплексний випадок приводить до необхідності виконувати побудову в просторі чотирьох вимірів $(x;y;u;v)\leftrightarrow(z;w)$. Тому на практиці використовують наступні геометричні ілюстрації функції.

Спосіб 1. Будь-якій точці $z\in D$ відповідає деяке значення w, кривій на площині z – крива на площині w, а всій області D – деяка область D^*, яка складається із w. Таким чином, функція $w=f(z)$ відображає область D в іншу область D^*. Область D розбивають на підобласті, наприклад координатними лініями, і розфарбовують у шахматному порядку. Криволінійні чотирикутники в образі D^*, що відповідають квадратикам із D, розфарбовують аналогічно.

Спосіб 2. Використовують поняття рельєфу функції (поверхні модуля) $h=|f(z)|$ в просторі $(x;y;h)$.

Спосіб 3. Можна подати функцію $f(z)$ у вигляді двох поверхонь $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ у тривимірному просторі.

Похідною функції $f(z)$ в точці z називають границю

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z).$$

Якщо функція $f(z)$ у всіх точках деякої області D має неперервну похідну, то таку функцію називають аналітичною в області D.

Оскільки

$$\Delta w\approx f'(z)\cdot\Delta z=|f'(z)|\mathrm{e}^{i\arg f'(z)}\Delta z,$$

то дію аналітичної функції в околі точки z можна розглядати, як перетворення подібності: $\rho=|f'(z)|$ – коефіцієнт розтягу, $\theta=\arg f'(z)$ – поворот площини на кут θ.

Теорема. *Функція $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ має похідну в точці $z_0=x_0+iy_0$ тоді і тільки тоді, коли функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ мають неперервні частинні похідні в точці $(x_0;y_0)$, які пов'язані умовами Коші-Рімана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Наслідок 1. Похідну функції $f(z)$ можна обчислювати за формулою:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\ .$$

Наслідок 2. Дійсна і уявна частини аналітичної (диференційовної) функції задовольняють рівняння Лапласа, тобто:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ .$$

Функцію $u(x,y)$, яка має неперервні частинні похідні другого порядку в області D і задовольняє рівнянню Лапласа, називають гармонічною на D. Гармонічні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ називають спряженими, якщо для них виконуються умови Коші-Рімана.

Наслідок 3. Оскільки

$$dv(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\ \frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\ ,$$

то аналітична функція $f(z)$ відновлюється з точністю до константи по її дійсній частині:

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt\,.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 4.1. Встановити, на яку лінію площини w відображається з допомогою функції $w=w(z)$ лінія:

а) $w=z^2: L=\{z=\mathrm{e}^{-it}, 0\le t\le 2\pi\}$; б) $w=\dfrac{1}{z}: L=\{|z-1|=1\}$.

Розв'язання.

а) $\begin{cases} w=z^2, \\ z=\mathrm{e}^{-it}, 0\le t\le 2\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w=\left(\mathrm{e}^{-it}\right)^2=\mathrm{e}^{-2it}, \\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w=\cos 2t-i\sin 2t, \\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

Нехай $w=u+iv$, тоді $\begin{cases} u=\cos 2t, \\ v=-\sin 2t, \\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=1, \\ u=\cos 2t, \\ v=-\sin 2t,\ 0\le 2t\le 4\pi. \end{cases}$

Система задає одиничне коло на площині w, яке обходиться двічі за годинниковою стрілкою.

б) Виконаємо параметризацію кола $|z-1|=1: z-1=\mathrm{e}^{it}$, $0\le t<2$. Тоді

$$\begin{cases} w=\dfrac{1}{z}, \\ z=1+\mathrm{e}^{it},\ 0\le t<2\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{it}}, \\ 0\le t<2\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w=\dfrac{1}{1+\cos t+i\sin t}, \\ 0\le t<2\pi. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w=\frac{1+\cos t-i\sin t}{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}=\frac{1+\cos t}{2+2\cos t}-i\frac{\sin t}{2+2\cos t}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}tg\frac{t}{2},\ 0\le t<2\pi\,.$$

Звідси $\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}, \\ v=-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\dfrac{t}{2}, \\ 0\le t<2\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{2}, \\ v\in(-\infty;+\infty). \end{cases}$ Остання система задає пряму $\mathrm{Re}\,w=\dfrac{1}{2}$.

Задача 4.2. Використовуючи умови Коші-Рімана, з'ясувати, які із функцій аналітичні:

$$\text{а) } w = z\operatorname{Re} z; \ \text{ б) } w = \mathrm{e}^{-2iz+1}.$$

Розв'язання.

а) Нехай $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Знайдемо u і v для w, вважаючи $z = x + iy$.

$$w = (x+iy)\operatorname{Re}(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2, \\ v = xy. \end{cases}$$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial x} = y, \dfrac{\partial v}{\partial y} = x$.

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -y$ при $z \neq 0$, то $w = z\operatorname{Re} z$ диференційовна лише в точці $z = 0$.

б) $w = \mathrm{e}^{-2iz+1} = \mathrm{e}^{-2i(x+iy)+1} = \mathrm{e}^{2y+1-2ix} = \mathrm{e}^{2y+1}(\cos 2x - i\sin 2x)$.

Звідси

$$\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2y+1}\cos 2x, \\ v = -\mathrm{e}^{2y+1}\sin 2x. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні функцій u і v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\mathrm{e}^{2y+1}\sin 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{2y+1}\cos 2x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\mathrm{e}^{2y+1}\cos 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\mathrm{e}^{2y+1}\sin 2x.$$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2\mathrm{e}^{2y+1}\sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 2\mathrm{e}^{2y+1}\cos 2x.$$

Отже, функція $w = \mathrm{e}^{-2iz+1}$ є аналітичною на всій площині.

Задача 4.3. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u + iv$, якщо

$$u = x^3 - 3xy^2 - x, \ f(0) = 0.$$

Розв'язання.

Впевнимося, що функція $u(x,y)$ є гармонічною.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$$

Звідси слідує, що $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$, тобто функція $u(x,y)$ гармонічна і $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$.

Використаємо розрахункову формулу:

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt.$$

З умови задачі $f(0)=0$ слідує, що $x_0=0,\ y_0=0,\ \mathrm{Im}\,f(0)=0$. Тоді розрахункова формула для даної задачі набуде вигляду:

$$v(x,y)=0+\int_0^x -6t\cdot 0dt+\int_0^y\left(3x^2-3t^2-1\right)dt=\left.\left(3x^2t-\frac{3t^2}{3}-t\right)\right|_0^y=3x^2y-y^3-y.$$

Отже $f(z)=\left(x^3-3xy^2-x\right)+i\left(3x^2y-y^3-y\right),\ z=x+iy.$ Групуючи відповідні доданки, остаточно отримаємо:

$$f(z)=x^3-3xy^2+3x^2iy-iy^3-(x+iy)=z^3-z.$$

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте означення аналітичної функції.
2. Які гармонічні функції називаються спряженими?
3. Покажіть, що в полярній системі координат (r,φ) умови Коші-Рімана мають вигляд: $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.
4. Зобразіть графік функції $w=z^2$ у верхній півплощині $\mathrm{Im}\,z>0$, використовуючи полярну систему координат.
5. При яких значеннях змінної z перестають бути аналітичними функції $z^2,\ \frac{1}{\sin z},\frac{z-1}{z^2-5z+6},\ e^{\frac{1}{z}}$?
6. Для відображень $w=z^2$ і $w=z^3$ в точках $z_1=1+i,\ z_2=3-4i$ знайдіть кути повороту та коефіцієнти розтягу.

Завдання для роботи в аудиторії

11. Встановіть, на які лінії площини w відображаються за допомогою функції $w=w(z)$ лінії:

а) $w=\frac{1}{z}$: $|z|=\frac{1}{2}$; $\mathrm{Re}\,z=0$; $\arg z=\frac{3\pi}{4}$; $\arg z^2=-\frac{\pi}{2}$; $|z|=z$; $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z$;

б) $w=z^2$: $x=c$; $y=c$; $x=y$; $|z|=R$; $\arg z=\alpha$;

в) $w=z+\frac{1}{z}$: $|z|=R$;

г) $w=e^z$: $x=c$; $y=c$; $x=y$.

12. Встановіть, на яку область площини w відобразяться з допомогою функції $w = w(z)$ множини:

а) $w = 2z$: $D = \{|z| < 1\}$; б) $w = \dfrac{1}{z}$: $D = \{|z - 1| < 1\}$;

в) $w = z^2$: $D = \left\{|z| < R,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; г) $w = z^4$: $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

13. Знайдіть дійсну та уявну частини функцій:

а) $w = \mathrm{e}^{-z}$; б) $w = \mathrm{e}^{-z^2}$; в) $w = \sin z$; г) $w = \operatorname{ch}(z - i)$;

д) $w = 2^{z^2}$; е) $w = \operatorname{sh} z$; є) $w = \operatorname{tg} z$.

14. Використовуючи умови Коші-Рімана, встановіть які із функцій аналітичні:

а) $w = z^2 \bar{z}$; б) $w = z\mathrm{e}^z$; в) $w = |z|\bar{z}$; г) $w = \mathrm{e}^{z^2}$; д) $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$;

е) $w = \sin 3z - i$; є) $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$; ж) $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$; і) $w = |z| \operatorname{Im} \bar{z}$; й) $w = \operatorname{ch} z$.

15. Чи існує аналітична функція $f(z) = u + iv$, для якої

а) $u = \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; б) $v = \ln\left(x^2 + y^2\right) - x^2 + y^2$; в) $u = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$?

16. Відновіть аналітичну функцію в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною $u(x, y)$ або уявною $v(x, y)$ частиною та значенням $f(z_0)$:

а) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$; б) $v = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $f(1) = 0$;

в) $u = x^2 - y^2 + 2x, f(i) = 2i - 1$; г) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $f(0) = 0$;

д) $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$; е) $v = 2(2\operatorname{sh} x \sin y + xy), f(0) = 3$.

17. Яка частина площини стискається, а яка розтягується, якщо відображення здійснюється функцією:

а) $w = z^2$; б) $w = z^2 + 2z$; в) $w = \dfrac{1}{z}$; г) $w = \mathrm{e}^z$; д) $w = \ln(z - 1)$?

Розрахункові завдання

Задача 6. Перевірити гармонічність функцій в околі точки z_0 і відновити аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за заданою дійсною $u(x, y)$ або уявною $v(x, y)$ частиною і значенням $f(z_0)$.

1. $u = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$. 2. $v = \mathrm{e}^x (y \cos y + x \sin y), f(0) = 0$.

3. $u = x^2 - y^2 - 2y$, $f(0) = 0$. 4. $v = \mathrm{e}^{-y} \sin x + y$, $f(0) = 1$.

5. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i$. 6. $u = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^x} \cos y$, $f(0) = 0$.

7. $v = e^x \cos y,\ f(0) = 1 + i$.

8. $u = 1 - \sin y e^x,\ f(0) = 1 + i$.

9. $u = e^{-y} \cos x,\ f(0) = 1$.

10. $u = y - 2xy,\ f(0) = 0$.

11. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1,\ f(0) = i$.

12. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1,\ f(0) = 1$.

13. $v = 3x^2 y - y^3 - y,\ f(0) = 0$.

14. $v = 2xy + y,\ f(0) = 0$.

15. $v = 3x^2 y - y^3,\ f(0) = 1$.

16. $v = 2xy + 2x,\ f(0) = 0$.

17. $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(1) = 2$.

18. $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y,\ f(0) = 2$.

19. $u = e^{-y} \cos x + x,\ f(0) = 1$.

20. $u = e^{-y} \sin x,\ f(0) = 1$.

21. $u = x^2 - y^2 - x,\ f(0) = 0$.

22. $v = -2xy - 2y,\ f(0) = i$.

23. $v = 2xy - 2y,\ f(0) = 1$.

24. $v = x^3 - 3xy^2 - x,\ f(0) = 0$.

25. $v = 2xy + x,\ f(0) = 0$.

§5. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Основні поняття та теореми [2, с.391-400; 4, с.36-52]

Надалі будемо вважати $f(z)$ неперервною функцією комплексної змінної в області D, а L – гладкою кривою, що лежить в області D.

Означення. Інтегралом від функції комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ вздовж кривої L на комплексній площині називається

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Інтеграл від функції $f(z)$ по кривій L визначається через два криволінійних інтеграли другого роду.

Основні властивості інтеграла.

1. **Лінійність інтеграла**

$$\int_L (Af(z) + Bg(z))dz = A\int_L f(z)dz + B\int_L g(z)dz,$$ де A і B – константи.

2. **Зміна орієнтації**

$$\int_{-L} f(z)dz = -\int_L f(z)dz,$$

де L – протилежний напрямок обходу кривої $(-L)$.

3. **Адитивність інтеграла**

$$\int_{L_1 + L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

4. **Формула зведення до визначеного інтеграла**

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt,$$ де $z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$ задає параметризацію дуги L.

5. **Оцінка інтеграла**

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml,$$

де $|f(z)| \le M$; l – довжина (L).

Означення. Область D називається однозв'язною, якщо її межа – проста замкнена крива L.

На наступній теоремі ґрунтується вся теорія інтегрування аналітичних функцій.

Основна інтегральна теорема Коші.

Якщо D однозв'язна область площини z і $f(z)$ – аналітична функція визначена в цій області, то для будь-якої замкненої гладкої кривої $L \subset D$:

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Наслідок. Інтеграл від функції, аналітичної в однозв'язній області, залежить тільки від початкової та кінцевої точок шляху інтегрування:

$$\int_{L(z_1;z_2)} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

Означення. Аналітична функція $F(z)$ називається первісною для $f(z)$ в області D, якщо $F'(z) = f(z),\ z \in D$. Для аналітичних функцій $f(z)$ в D має місце аналог основної формули інтегрального числення.

Формула Ньютона-Лейбніца. *Якщо $f(z)$ аналітична функція в однозв'язній області D, то*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}.$$

Узагальнення інтегральної теореми Коші. *Нехай область D обмежена гладкою кривою L і $f(z)$ – аналітична функція на $D \cup L$, тоді*

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Основна теорема Коші дозволяє виявити важливий зв'язок між значеннями аналітичної функції всередині області та на її межі.

Інтегральна формула Коші. *Нехай область D обмежена гладкою кривою L і $f(z)$ – аналітична функція на $D \cup L$, тоді для будь-якої точки $z_0 \in D$ справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 5.1. Обчислити інтеграли по заданих контурах:

а) $\int\limits_L \mathrm{Re}\left(z+z^2\right)dz,\ L=\left\{y=2x^2,\ \ 0\le x\le 1\right\}$;

б) $\int\limits_L \left(iz^2-2\bar{z}\right)dz,\ L=\left\{|z|=2,\ \ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Розв'язання.

а) Функція

$$f(z)=\mathrm{Re}\left(z+z^2\right)=\mathrm{Re}\left(x+iy+(x+iy)^2\right)=x+x^2-y^2.$$

Враховуючи, що $y=2x^2$ і $z=x+iy$, отримуємо

$$f(z)=x+x^2-4x^4,\ dz=d\left(x+i2x^2\right)=(1+4xi)dx.$$

Звідси

$$\int\limits_L \mathrm{Re}\left(z+z^2\right)dz=\int\limits_0^1\left(x+x^2-4x^4\right)(1+4xi)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x+x^2-4x^4+4x^2i+4x^3i-16x^5i\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}+\frac{4x^3i}{3}+\frac{4x^4i}{4}-\frac{16x^6i}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+i\left(\frac{4}{3}+1-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{30}-\frac{i}{3}.$$

б) Дуга $L=\left\{|z|=2,\ \ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$ – четверта частина кола – параметризується так: $z=2\mathrm{e}^{it}$, $0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$. Тоді

$$dz=d\left(2\mathrm{e}^{it}\right)=2i\mathrm{e}^{it}\,dt,\quad f(z)=iz^2-2\bar{z}=i\left(2\mathrm{e}^{it}\right)^2-2\left(2\mathrm{e}^{-it}\right)=i4\mathrm{e}^{2it}-4\mathrm{e}^{-it}.$$

Звідси

$$\int\limits_L\left(iz^2-2\bar{z}\right)dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4i\mathrm{e}^{2it}-4\mathrm{e}^{-it}\right)2i\mathrm{e}^{it}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-8\mathrm{e}^{3it}-8i\right)dt=\left(-\frac{8}{3i}\mathrm{e}^{3it}-8it\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{8}{3i}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i}-8i\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3i}=$$

$$=\frac{8}{3}ie^{3i\frac{\pi}{2}}-4\pi i-\frac{8}{3}i=\frac{8}{3}-i\left(4\pi+\frac{8}{3}\right).$$

Задача 5.2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} z\sin z dz$, де AB – відрізок, що сполучає точки $z_A = 1$ і $z_B = i$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $f(z) = z\sin z$ аналітична. Тому для обчислення вказаного інтеграла можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1), \text{ де } F'(z) = f(z).$$

Тоді

$$\int\limits_1^i z\sin z dz = \begin{vmatrix} u = z, & du = dz \\ dv = \sin z\, dz, & v = -\cos z \end{vmatrix} = -z\cos z\Big|_1^i + \int\limits_1^i \cos z dz =$$

$$= (-z\cos z + \sin z)\Big|_1^i = (-i\cos i + \sin i) - (-\cos 1 + \sin 1) =$$

$$= -i\cos i + \sin i + \cos 1 - \sin 1 = -i\cdot\frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} + \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} + \cos 1 - \sin 1 =$$

$$= -i\frac{e^{-1} + e^1}{2} - i\frac{e^{-1} - e^1}{2} + \cos 1 - \sin 1 = -i\left(\frac{e^{-1} + e^1 + e^{-1} - e^1}{2}\right) + (\cos 1 - \sin 1) =$$

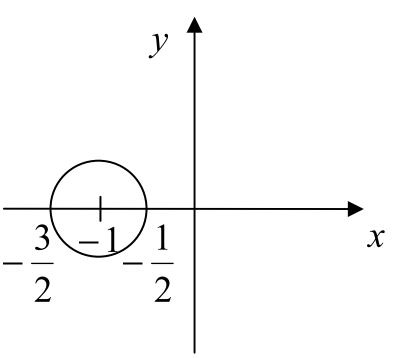
$$= (\cos 1 - \sin 1) - ie^{-1}.$$

Задача 5.3. Обчислити інтеграл, використовуючи інтегральну формулу Коші:

$$\int\limits_{|z+1| = \frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2 + z} dz.$$

Розв'язання.

Застосуємо формулу $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Для цього зобразимо криву $|z+1| = \frac{1}{2}$ і представимо підінтегральну функцію у вигляді: $\frac{e^z}{z^2 + z} = \frac{e^z}{z(z+1)}$. Точка $z = 0$ не належить області, яку обмежує задана крива, а точка $z = -1$ належить, тому використовуючи формулу Коші будемо вважати



$$z_0 = -1,\ f(z) = \frac{e^z}{z},\text{ а } f(z_0) = f(-1) = \frac{e^{-1}}{-1} = -\frac{1}{e}.$$

Тоді шуканий інтеграл буде рівний:

$$\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2+z}dz = \int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{z}}{z+1}dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{e}\right) = -\frac{2\pi i}{e}.$$

Контрольні запитання та завдання

1. Покажіть, що: $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, n=-1; \\ 0, n \neq -1. \end{cases}$

2. Сформулюйте теорему Коші для області, яка обмежена зовнішнім і декількома внутрішніми контурами.

3. Область D обмежена замкненим контуром L і $z_0 \in D$. Використовуючи теорему Коші, обчисліть $\oint\limits_L (z-z_0)^n dz$.

4. Чому дорівнює інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$, якщо $f(z)$ аналітична в D і $z_0 \notin D$?

5. Як задається аналітична функція, що відображає площину в одиничний круг (використати теорему Ліувілля).

Завдання для роботи в аудиторії

18. Обчислити інтеграл $\int |z| dz$:

а) по радіус-вектору точки $z = 2 - i$;
б) по півколу $|z| = 3,\ 0 \le \arg z \le \pi$;
в) по дузі $AB = \{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0,\ z_A = i,\ z_{\text{B}} = -i\}$;
г) по колу $|z| = 7$.

19. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{ABC} |z|\bar{z}dz,\ AB$ – дуга півкола $|z| = 1,\ z_A = 1,\ z_B = -1,\ BC$ – відрізок $-1 \le x \le 1$, $y = o$;

б) $\int\limits_L \frac{\bar{z}}{z}dz,\ L$ – межа півкільця $\{1 \le |z| \le 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$;

в) $\int\limits_{AB} (1 + i - 2\bar{z} + \operatorname{Re} z)dz,\ AB = \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$;

г) $\int\limits_{ABC} (\operatorname{Im} z^2 + 3i)dz,\ ABC$ – ламана $z_A = 0,\ z_B = 1 + i,\ z_C = 1$.

20. Обчислити інтеграли від аналітичних функцій:

а) $\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz;$ б) $\int\limits_{0}^{2i} z\cos z dz;$

в) $\int\limits_{AB} ze^z dz,\ AB=\left\{y=x^2, z_A=0, z_B=1+i\right\};$

г) $\int\limits_{AB}(5z-7)dz,\ AB$ - відрізок прямої від $z_A=\frac{\pi}{2}$ до $z_B=\pi i;$

д) $\int\limits_{AB}\frac{\ln z}{z}dz,\ AB$ - відрізок прямої від $z_A=1$ до $z_B=i$.

21. За допомогою інтегральної формули Коші обчисліть інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z-2i|=1}\frac{z^2}{z-2i}dz;$ б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{2z}}{z-\pi i}dz;$ в) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1};$

г) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{z^2+2z};$ д) $\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{e^z\cos z}{z^2+1}dz;$ е) $\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}dz;$

є) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi}dz$.

Розрахункові завдання

Задача 7. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

1. а) $\int\limits_{AB}\bar{z}dz, AB=\left\{y=x^2, z_A=0, z_B=1+i\right\};$

   б) $\int\limits_{AB}(z+1)e^z dz, AB=\left\{\begin{matrix}|z|=1, \operatorname{Re} z\geq 0\\ z_A=-i, z_B=i\end{matrix}\right\}$.

2. а) $\int\limits_{AB}\operatorname{Im} z^3 dz, AB-$відрізок прямої, $z_A=0, z_B=2+2i$;

   б) $\int\limits_{AB}\left(z^2+7z+1\right)dz, AB-$ відрізок прямої, $z_A=1, z_B=1-i$.

3. а) $\int\limits_{ABC}|z|dz, ABC-$ламана, $z_A=0, z_B=-1+i, z_C=1+i$;

   б) $\int\limits_{AB}\left(12z^5+4z^3+1\right)dz, AB-$ відрізок прямої, $z_A=1, z_B=i$.

4. а) $\int\limits_{ABC} z^3e^{z^4}dz, ABC-$ламана, $z_A=i, z_B=1, z_C=0$;

   б) $\int\limits_{AB}\bar{z}^2 dz, AB-$ відрізок прямої, $z_A=0, z_B=1+i$.

5. а) $\int\limits_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)dz, ABC-$ламана, $z_A=0, z_B=1, z_C=1$;

б) $\int\limits_{AB} \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z}dz,\ AB=\{|z|=1, \operatorname{Im} z\geq 0\}$, BC - відрізок, $z_B=1, z_C=0$.

6. а) $\int\limits_{L}\frac{\bar{z}}{z}dz,\ L-$межа області: $\{1\leq|z|\leq 2, \operatorname{Re} z>0\}$;

б) $\int\limits_{ABC}(\operatorname{ch} z+\cos iz)dz, ABC-$ламана, $z_A=0, z_B=-1, z_C=i$.

7. а) $\int\limits_{AB}|z|\bar{z}dz, AB=\{|z|=4, \operatorname{Re} z\geq 0,\ z_A=4i, z_B=-4i\}$;

б) $\int\limits_{AB}(\operatorname{ch} z+z)dz, AB=\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\leq 0,\ z_A=-1, z_B=1\}$.

8. а) $\int\limits_{AB}|z|\operatorname{Re} z^2dz, AB=\{|z|=7, \operatorname{Im} z\geq 0,\ z_A=7, z_B=-7\}$;

б) $\int\limits_{AB}\left(3z^2+2z\right)dz, AB=\left\{y=x^2,\ z_A=0, z_B=1+i\right\}$.

9. а) $\int\limits_{ABC}\left(z^2+1\right)dz, ABC-$ламана, $z_A=0, z_B=-1+i, z_C=i$;

б) $\int\limits_{AB}z\operatorname{Re} z^2dz,\ AB=\{|z|=2,\ \operatorname{Im} z\leq 0,\ z_A=2, z_B=-2\}$.

10. а) $\int\limits_{AB}(\sin(iz)+z)dz,\ AB=\{|z|=1, \operatorname{Re} z\geq 0,\ z_A=i, z_B=-i\}$;

б) $\int\limits_{AB}e^{|z|^2}\operatorname{Im} z dz, AB-$ відрізок прямої, $z_A=1+i, z_B=0$.

11. а) $\int\limits_{AB}z\operatorname{Re} z^2dz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=0, z_B=1+2i$;

б) $\int\limits_{AB}(2z+1)dz, AB=\left\{y=x^3,\ z_A=0, z_B=1+i\right\}$.

12. а) $\int\limits_{AB}z\bar{z}dz,\ AB=\{|z|=1, \operatorname{Re} z\geq 0, \operatorname{Im} z\geq 0,\ z_A=i, z_B=1\}$;

б) $\int\limits_{AB}\left(\cos iz+3z^2\right)dz,\ AB=\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\geq 0,\ z_A=-1, z_B=1\}$.

13. а) $\int\limits_{ABC}\left(z^9+1\right)dz, ABC-$ламана, $z_A=0, z_B=1+i, z_C=i$;

б) $\int\limits_{AB}|z|dz, AB=\left\{|z|=\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\leq\arg z\leq\frac{5\pi}{4}\right\}$.

14. а) $\int\limits_{ABC}\left(z^5+\sin z\right)dz, ABC-\ z_A=0, z_B=1, z_C=2i$;

б) $\oint\limits_{|z|=1}\bar{z}dz$.

15. а) $\int\limits_{AB}\left(z^3+\sin z\right)dz,\ AB=\left\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\ge 0,\ z_A=-i, z_B=i\right\}$;

б) $\int\limits_{AB} z\operatorname{Im} z^2 dz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=0, z_B=1+i$.

16. а) $\int\limits_{AB} z|z|dz,\ AB=\left\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\ge 0,\ z_A=-1, z_B=1\right\}$;

б) $\int\limits_{AB} z^2\cos z dz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=i, z_B=1$.

17. а) $\int\limits_{AB} z\operatorname{Im} z^2 dz,\ AB=\left\{|z|=1, \operatorname{Re} z\ge 0, \operatorname{Im} z\ge 0,\ z_A=1, z_B=i\right\}$;

б) $\int\limits_{AB}(z+1)\sin z dz, AB=\left\{y=x^3,\ z_A=0, z_B=1+i\right\}$.

18. а) $\int\limits_{AB}(z-1)\cos z dz,\ AB=\left\{|z|=4, \operatorname{Re} z\le 0, \operatorname{Im} z\le 0,\ z_A=-4i, z_B=4\right\}$;

б) $\int\limits_{AB} e^{\bar{z}}dz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=\pi, z_B=-i\pi$.

19. а) $\int\limits_{AB} ze^{\frac{z^2}{2}}dz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=1+i,\ z_B=2i$;

б) $\int\limits_{AB} z\operatorname{Im} z^2 dz, AB=\left\{|z|=2, -\pi\le\arg z\le 0\right\}$.

20. а) $\int\limits_{AB}(z+2\sin 2z)\operatorname{Im} z^2 dz, AB=\left\{|z|=3, \pi\le\arg z\le\frac{3\pi}{2}\right\}$;

б) $\int\limits_{AB}\cos\bar{z}dz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=\pi, z_B=\frac{\pi}{2}+i$.

21. а) $\int\limits_{AB} shzdz,\ AB-$ відрізок прямої, $z_A=\ln 2, z_B=\ln 10+\pi\ln 5i$;

б) $\int\limits_{ABC}\frac{\ln(z+1)}{z+1}dz, ABC-$ламана, $z_A=1, z_B=0, z_C=i$.

22. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 \operatorname{Re} z^3 dz,\ L = \left\{ y = 3x^3, 0 \le x \le 1 \right\}$;

б) $\int\limits_{AB} \dfrac{1+tgz}{\cos^2 z} dz,\ AB -$ відрізок прямої, $z_A = 1, z_B = i$.

23. а) $\int\limits_{AB} z e^{z^2} dz, AB = \left\{ |z| = 5, \operatorname{Re} z \le 5,\ z_A = -5i,\ z_B = 5i \right\}$;

б) $\int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz,\ AB = \left\{ |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \le 0,\ z_A = 1, z_B = -1 \right\}$.

24. а) $\int\limits_{ABC} \sin z \cos z dz, ABC -$ ламана, $z_A = 0, z_B = -3, z_C = 1 + i$;

б) $\int\limits_L \dfrac{z}{\bar{z}} dz,\ L = \left\{ |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

25. а) $\int\limits_L \left(\bar{z}^2 - z \right) dz,\ L = \left\{ |z| = 1, \pi \le \arg z \le 2\pi \right\}$;

б) $\int\limits_{AB} (3z - 1) \cos 2z dz,\ AB -$ відрізок прямої, $z_A = 1, z_B = -i$.

§6. РЯДИ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ. РЯД ЛОРАНА

Основні поняття та теореми
[2, с.400-409; 4, с.52-75]

Розглянемо функціональний ряд $f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, який складено із функцій $f_n(z)$ аналітичних в області D. Множиною збіжності функціонального ряду називається множина всіх точок $z \in D$, для яких числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, $w_n = f_n(z)$, є збіжним.

Аналогічно до рядів з дійсними членами доводяться теореми про неперервність та інтегровність суми ряду.

Основні властивості рядів з аналітичними членами дає наступна

Теорема Вейєрштрасса. *Якщо члени ряду*

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = S(z)$$

аналітичні функції на множині $D \cup L$ *(включаючи межу* L*) і якщо на дузі* L *ряд збіжний рівномірно, то:*

1) *ряд рівномірно збіжний у всій області* $D \cup L$*;*
2) *сума ряду* $S(z)$ *– аналітична функція всередині* D*;*
3) *всередині* D *ряд можна почленно диференціювати скільки завгодно раз.*

Важливу роль в теорії функції комплексної змінної відіграють степеневі ряди по цілих додатних степенях z або $z-a$:

$$C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\ldots+C_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n.$$

Питання про збіжність степеневого ряду розв'язує

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд збіжний при деякому $z=z_0$, то він збіжний абсолютно всередині круга $|z-a|<|z_0-a|$, тобто при будь-якому z, яке знаходиться ближче до a, ніж z_0.*

Наслідок. Область збіжності степеневого ряду – внутрішня частина деякого круга з центром в точці a. Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулами: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|C_n|}{|C_{n+1}|}$ або $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$.

Рядом Лорана за степенями $z-a$ називається ряд виду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n$.

Цей ряд називається збіжним в точці $z=z_0$, якщо збіжними є ряди

$$\sum_{n=-\infty}^{0}C_n(z_0-a)^n \text{ та } \sum_{n=1}^{\infty}C_n(z_0-a)^n.$$

Теорема Лорана. Функція $f(z)$ аналітична в кільці $r<|z-a|<R$ розкладається в заданому кільці в ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n$, коефіцієнти якого знаходяться за формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},\quad (n=0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots)\text{ і } r<\rho<R.$$

Зауваження. Останні наведені формули на практиці застосовуються надзвичайно рідко. Як правило, розклад функції в ряд Лорана зводять до розкладу її в ряд Тейлора. У зв'язку з цим, нагадаємо про можливість розкладу аналітичної функції в степеневий ряд Тейлора в околі точки a:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 6.1. Знайти всі лоранівські розклади функції

$$f(z)=\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}.$$

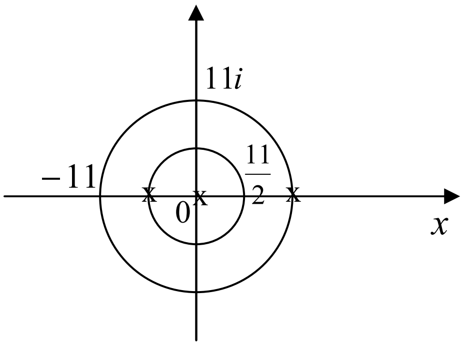
Розв'язання.

Представимо задану функцію у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}=\frac{11z+242}{z\left(121+11z-2z^2\right)}=\frac{11z+242}{z\left(-2\left(z+\frac{11}{2}\right)(z-11)\right)}=$$

$=\dfrac{-11z-242}{z(2z+11)(z-11)}=\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z-11}+\dfrac{C}{2z+11}$, де $z_1=-\dfrac{11}{2}$ і $z_2=11$ – корені рівняння $121+11z-2z^2=0$. Звідси слідує: $-11z-242=.$

$$=A(z-11)(2z+11)+B(2z+11)z+C(z-11)z\,.$$



$$\left.\begin{array}{l|l} z=0 & -242=-121A \;\Rightarrow\; A=2, \\ z=11 & -343=3\cdot 11^2 B \;\Rightarrow\; B=-1, \\ z=-\dfrac{11}{2} & -\dfrac{343}{2}=\dfrac{3}{4}\cdot 11^3 C \Rightarrow\; C=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-11}-\frac{2}{2z+11}.$$

На рисунку позначимо особливі точки функції $f(z)$. При розв’язанні задачі будемо використовувати метод геометричної прогресії.

1. Нехай $z\in\left\{0<|z|<\dfrac{11}{2}\right\}$.

Тоді : $\dfrac{2}{z}=2z^{-1},\ z\neq 0;$

$$-\frac{1}{z-11}=\frac{1}{11-z}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{11}}=\frac{1}{11}\left(1+\frac{z}{11}+\frac{z^2}{11^2}+\cdots+\frac{z^n}{11^n}+\cdots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{11^{n+1}}$$

при $\left|\dfrac{z}{11}\right|<1$ або $|z|<11$;

$$-\frac{2}{2z+11}=-\frac{2}{11-(-2z)}=\frac{-2}{11}\cdot\left(1-\frac{2z}{11}+\left(\frac{2}{11}\right)^2 z^2+\cdots+(-1)^n\frac{2^n z^n}{11^n}+\cdots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{11^{n+1}}z^n \text{ при } |z|<\frac{11}{2}.$$

Тоді

$$\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}=\frac{2}{z}+\left(-\frac{2}{11}+\left(\frac{2}{11}\right)^2 z-\left(\frac{2}{11}\right)^3 z^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{11^{n+1}}z^n+\cdots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{11}+\frac{z}{11^n}+\cdots+\frac{z^n}{11^{n+1}}+\cdots\right)=\frac{2}{z}-\frac{1}{11}+\frac{1+2^2}{11^2}z+\frac{1-2^3}{11^3}z^2+\cdots+$$

$$+\frac{1+(-1)^{n+1}2^{n+1}}{11^{n+1}}z^n+\cdots \text{ при } 0<|z|<\frac{11}{2}.$$

2. Нехай $z\in\left\{\frac{11}{2}<|z|<11\right\}$. У цьому кільці

$$-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{11^{n+1}},\ |z|<11;$$

$$-\frac{2}{11+2z}=-\frac{2}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{11}{2z}}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{11}{2z}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1-\frac{11}{2z}+\frac{11^2}{2^2z^2}+\ldots+(-1)^n\frac{11^n}{2^nz^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{z}+\frac{11}{2z^2}-\frac{11^2}{2^2z^3}+\ldots+$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{11^n}{2^2z^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{11^n}{2^2z^{n+1}},\qquad \left|\frac{11}{2z}\right|<1\Rightarrow|z|>\frac{11}{2}.$$

Тоді

$$\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}=\frac{2}{z}+\left(-\frac{1}{z}+\frac{11}{2z^2}-\frac{11^2}{2^2z^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{11^n}{2^nz^{n+1}}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{11}+\frac{z}{11^2}+\frac{z^3}{11^3}+\ldots+\frac{z^n}{11^n}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{11^n}{2^nz^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{11^{n+1}}.$$

3. Нехай $z\in\{|z|>11\}$. Розклади $\frac{2}{z}=2z^{-1}$ та $-\frac{2}{2z+11}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{11^n}{2^nz^{n+1}}$ справедливі при $|z|>11$. Необхідно розглянути лише доданок $-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{11}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{11^n}{z^n}$ при $\left|\frac{11}{z}\right|<1$ або $|z|>11$. Тоді:

$$\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{11^n}{2^nz^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{11^n}{z^{n+1}}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z}+$$

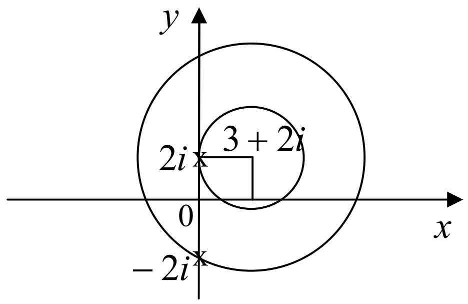
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}-1\right)\frac{11^n}{2^nz^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}-1\right)\frac{11^n}{2^nz^{n+1}}.$$

Задача 6.2. Знайти всі лоранівські розклади функції $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4}$ за степенями $z-z_0$, $z_0=3+2i$.

Розв'язання.

Насамперед подамо дріб $\dfrac{2z}{z^2+4}$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{2z}{z^2+4}=\frac{2z}{(z+2i)(z-2i)}=\frac{A}{z+2i}+\frac{B}{z-2i}=\frac{A(z-2i)+B(z+2i)}{z^2+4};$$



$z=2i \Rightarrow 4i=B\cdot 4i \Rightarrow B=1,$

$z=-2i \Rightarrow -4i=-A\cdot 4i \Rightarrow A=1.$

$$\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z+2i}+\frac{1}{z-2i}.$$

Особливі точки функції $f(z)$:

$$z_1=2i,\ z_2=-2i.$$

Нехай $|z-3-2i|<3$.

Тоді справедливий розклад

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{z-3-2i+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3-2i}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-3-2i}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3-2i)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3-2i)^n,\text{ оскільки }\left|\frac{z-3-2i}{3}\right|<1.$$

Рівність

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{z-3-2i+3+4i}=\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3-2i}{3+4i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+4i)^{n+1}}(z-3-2i)^n,$$

виконується при $\left|\dfrac{z-3-2i}{3+4i}\right|<1 \Leftrightarrow |z-3-2i|<|3+4i|=5$.

Тоді

$$\frac{2z}{z^2+4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3+4i)^{n+1}}\right)(z-3-2i)^n,\ |z-3-2i|<3.$$

Нехай $z\in\{3<|z-3-2i|<5\}$. Врахуємо, що для $|z-3-2i|<5$ нам відомо розклад $\dfrac{1}{z+2i}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+4i)^{n+1}}(z-3-2i)^n$. З нерівності $|z-3-2i|>3$ отримаємо

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{z-3-2i+3}=\frac{1}{z-3-2i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{z-3-2i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-3-2i)^{n+1}}.$$

Звідси

$$\frac{2z}{z^2+4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(z-3-2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+4i)^{n+1}}(z-3-2i)^n \text{ при } 3<|z-3-2i|<5.$$

Нехай $|z-3-2i|>5$, тоді справедливе співвідношення

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{z-3-2i+3+4i}=\frac{1}{z-3-2i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3+4i}{z-3-2i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3+4i)^n}{(z-3-2i)^{n+1}}.$$

Отже,

$$\frac{2z}{z^2+4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(3+4i)^n}{(z-3-2i)^{n+1}} \text{ при } |z-3-2i|>5.$$

Задача 6.3. Функцію $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{z}{z-5}$ розкласти в ряд Лорана в околі точки $z_0=5$.

Розв'язання.

Зауважимо, що

$$\cos\frac{z}{z-5}=\cos\frac{z-5+5}{z-5}=\cos\left(1+\frac{5}{z-5}\right)=\cos1\cdot\cos\frac{5}{z-5}-\sin1\cdot\sin\frac{5}{z-5}.$$

З відомих розкладів

$$\cos\omega=1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}+..., \ |\omega|<\infty;$$

$$\sin\omega=\omega-\frac{\omega^3}{3!}+\frac{\omega^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!}+..., \ |\omega|<\infty$$

випливає, що

$$\cos\frac{5}{z-5}=1-\frac{5^2}{2!}\cdot\frac{1}{(z-5)^2}+\frac{5^4}{4!}\cdot\frac{1}{(z-5)^4}+...+(-1)^n\frac{5^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n}}+...,$$

$$\sin\frac{5}{z-5}=\frac{5}{z-5}-\frac{5^3}{3!}\cdot\frac{1}{(z-5)^3}+\frac{5^5}{5!}\cdot\frac{1}{(z-5)^5}+...+(-1)^n\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n+1}}+...$$

Отже

$$\cos\frac{z}{z-5}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}\cdot\cos1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}\cdot\sin1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n+1}}.$$

Таким чином,

$$z\cdot\cos\frac{z}{z-5}=(z-5+5)\cdot\cos\frac{z}{z-5}=(z-5)\cdot\cos\frac{z}{z-5}+5\cdot\cos\frac{z}{z-5}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}\cdot\cos1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}\cdot\sin1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}\cdot\cos 1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+2}\cdot\sin 1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n+1}}.$$

Групуючи перший доданок з останнім, а другий з третім, остаточно отримаємо

$$z\cdot\cos\frac{z}{z-5}=\cos 1\cdot(z-5)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{5^{2n+2}\cdot\sin 1}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{5^{2n+2}\cdot\cos 1}{(2n+2)!}\right)\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n+1}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{5^{2n+1}\cdot\sin 1}{(2n+1)!}+\frac{5^{2n+1}\cdot\cos 1}{(2n)!}\right)\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n}}=$$

$$=\cos 1\cdot(z-5)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\big((2n+2)\sin 1-\cos 1\big)\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n+1}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\big(\sin 1+(2n+1)\cos 1\big)\cdot\frac{1}{(z-5)^{2n}}.$$

Контрольні запитання та завдання

1. На якій множині точок z збігається ряд $1+z+z^2+...+z^n+...$?

2. Сформулюйте теорему про розклад функції в степеневий ряд.

3. Запишіть розклад в степеневий ряд для функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^m$ в околі нуля.

4. Нехай ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ збігається до суми $f(z)$ у кільці $r<|z-a|<R$. Доведіть, що ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$ збігається у тому ж кільці до суми $f'(z)$.

5. Використовуючи завдання 4, запишіть розклади в степеневий ряд для функцій

$$\frac{1}{(1-z)^2},\ \frac{1}{(1-z)^3}\ \text{і}\ \frac{1}{(1-z)^n},\ n\in N.$$

6. Нехай ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ збігається в замкненому кільці $r\le|z-a|\le R$ до функції $f(z)$ і $|f(z)|\le M$. Доведіть, що для коефіцієнтів ряду Лорана функції $f(z)$ мають місце нерівності

$$|c_n|\le M\left(r^{-n}+R^{-n}\right),\ n=0,\pm1,\pm2,....$$

Завдання для роботи в аудиторії

22. Знайдіть області збіжності рядів та їх суми:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n z^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}+3}{(z-2-i)^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$.

23. Знайдіть області збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2z)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z+i)^{2n}}{2^n (n+1)} + \frac{4n^2}{3^n (z+i)^n} \right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + (1+in)(z-2+i)^n \right)$.

24. Знайдіть всі лоранівські розклади даної функції за степенями z:

а) $\frac{1}{z(z-1)}$; б) $\frac{1}{(z-2)(z+3)}$; в) $\frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$; г) $\frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$;

д) $\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$; е) $\frac{1}{(1-3z)^2}$; ж) $\frac{z}{(1+z)^3}$; з) $\frac{z+1}{(3-z)^2}$.

25. Знайдіть всі лоранівські розклади даної функції за степенями $z-z_0$:

а) $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$; б) $\frac{1}{(z-2)(z+3)}$, $z_0=2$;

в) $\frac{1}{(z+2)(z+3)}$, $z_0=-3$; г) $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$, $z_0=1$;

д) $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$, $z_0=2$; е) $\frac{2z}{z^2-4}$, $z_0=3-2i$;

ж) $\frac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-3+2i$; з) $\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-2-i$.

26. Задану функцію розкладіть в ряд Лорана в околі точки z_0:

а) $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=0$; б) $\sin\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$; в) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$; г) $e^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$;

д) $\sin\frac{z}{z-5}$, $z_0=5$; е) $\sin\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$; ж) $z\sin\pi\frac{z-1}{z-2}$, $z_0=2$.

Розрахункові завдання

Задача 8. Знайдіть всі лоранівські розклади даної функції за степенями z:

1. $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$. 2. $\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$. 3. $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

4. $\dfrac{2z+16}{z^4+2z^3-8z^2}$. 5. $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$. 6. $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

7. $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$. 8. $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$. 9. $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.

10. $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$. 11. $\dfrac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$. 12. $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

13. $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$. 14. $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$. 15. $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

16. $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$. 17. $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$. 18. $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

19. $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$. 20. $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$. 21. $\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

22. $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$. 23. $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$. 24. $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.

25. $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$.

Задача 9. Знайдіть всі лоранівські розклади даної функції за степенями $z-z_0$.

1. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=1+2i$. 2. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i$. 3. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-3-2i$.

4. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-2+i$. 5. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=1+3i$. 6. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=2-i$.

7. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-1+2i$. 8. $\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-2-3i$. 9. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=2+i$.

10. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=3-i$. 11. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2+3i$. 12. $\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2-2i$.

13. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=2+i$. 14. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=1-2i$. 15. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3+i$.

16. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3-2i$. 17. $\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+2i$.

18. $\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=1-3i$. 19. $\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-3-i$.

20. $\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+i$.

21. $\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-1-2i$.

22. $\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3+i$.

23. $\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=2-2i$.

24. $\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-2-i$.

25. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-1-3i$.

Задача 10. Задану функцію розкладіть в ряд Лорана в околі точки z_0.

1. $z\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$.

2. $\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

3. $z\cdot e^{\frac{z}{z-5}}$, $z_0=5$.

4. $\sin\dfrac{2z}{z+2}$, $z_0=-2$.

5. $\cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0=i$.

6. $\sin\dfrac{5z}{z-2i}$, $z_0=2i$.

7. $\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$, $z_0=-\dfrac{i}{3}$.

8. $z\cdot\cos\dfrac{3z}{z-1}$, $z_0=1$.

9. $z\cdot\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10. $(z-3)\cdot\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$, $z_0=0$.

11. $z^2\cdot\sin\pi\dfrac{z+1}{z}$, $z_0=0$.

12. $z\cdot\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $z_0=-2i$.

13. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

14. $\sin\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=i$.

15. $\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

16. $z\cdot e^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0=2$.

17. $e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$.

18. $\sin\dfrac{2z}{z-4}$, $z_0=4$.

19. $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

20. $z\cdot\sin\pi\dfrac{z+2}{z}$, $z_0=0$.

21. $z\cdot\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$, $z_0=1$.

22. $z^2\cdot\sin\dfrac{z+3}{z}$, $z_0=0$.

23. $z\cdot\cos\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$.

24. $z\cdot e^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.

25. $z\cdot\sin\pi\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1985. – Т.1. – 429 с.
4. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. – М.: Высш. шк., 1988. – 167 с.
5. Болгов В.А., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. – Ч.2. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Задачи и упражнения. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 255 с.

Додаткова література

7. Романовский П.И. Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980. – 335 с.
8. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 415 с.
9. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики (Типовые расчеты). – М.: Высш. шк., 1983. – 112 с.
10. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1969. – 388 с.

ЗМІСТ