Розділ 1. Випадкові події.

§1.1. Елементи комбінаторики

ЗАДАЧІ ДО §1.1.

1.1. Скількома способами можна вибрати 3 фарби з 5 різних фарб?
1.2. Скількома способами можна розсадити 7 учнів на 12 місцях?
1.3. Скільки існує 4-значних чисел, складених із цифр 3, 4, 5, 6, якщо всі цифри цих чисел різні?
1.4. Скількома способами можна поділити группу із 20 студентів на дві підгрупи так, щоб в одній було 7 студентів, а в другій – 13?
1.5. В групі 19 студентів: 5 відмінників, 8 хорошистів і 6 трієчників. Навмання відбирають 7 студентів. Скільки існує можливостей отримати серед семи відібраних студентів: а) 2 відмінника і 5 хорошистів; б) 2 відмінника, 3 хорошисти і 2 трієчника; в) 7 хорошистів.
1.6. Скільки часу потрібно, щоб перебрати всі тризначні коди на вхідній двері, якщо для перевірки одного коду потрібна одна секунда і код набирається одночасним натисканням трьох кнопок?
1.7. Розв'яжіть задачу 1.6, враховуючи порядок цифр, що складають код.
1.8. Скільки тризначних чисел можна скласти: а) із двох різних цифр;б)з шес-ти різних цифр?
1.9. Скільки існує чотиризначних чисел, що складаються з двох різних цифр?
1.10. Монету підкидають двічі. Скільки різних результатів отримаємо?
1.11. Скільки різних «слів» можна утворити, переставляючи букви в словах: а)"мама"; б)"паралелограм"; в) ''інженер''?
1.12. Скількома способами можна розподілити дев'ять різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа одержала три предмети?
1.13. Код кредитної картки складається з двох літер латинського алфавіту і чотирьох цифр. Скільки існує різних кредитних карток, якщо: а) літери мають бути різними; б) цифри мають бути різними; в) літери і цифри можуть повторюватися?
1.14. Скільки існує шестизначних телефонних номерів, для яких перша цифра парна?

§1.2 Основні поняття теорії ймовірностей

ЗАДАЧІ ДО §1.2.

2.1. Двічі кидають монету. Опишіть простір елементарних подій.
2.2. Стрілець двічі стріляє у мішень: A - влучення при першому пострілі, B - влучення при другому пострілі. Запишіть вирази для подій, які полягають у тому, що: C - стрілець влучив принаймні один раз, $Д$ - стрілець влучив рівно один раз, E - стрілець жодного разу в мішень не влучив.
2.3.Випробування полягає в підкиданні трьох монет. Опишіть простір елементарних подій. Визначте їх кількість. Вкажіть елементарні події, сприятливі для події A – випали герб і дві цифри, і події B – випали принаймні дві цифри.
2.4. В урні знаходяться 5 білих і 4 чорні кулі. Вони пронумеровані таким чином: білі з номерами від 1 до 5-ти, чорні з 6-ти до 9-ти. Випробування полягає в одночасному вийманні двох куль. Визначте кількість елементарних подій для даного випробування. Запишіть сприятливі події для наступних подій A, B і C та підрахуйте їх кількість, якщо: A – обидві кулі білі, B – обидві кулі чорні, C – кулі різного кольору.
2.5.Нехай A, B, C - деякі події, пов'язані з одним випробуванням. Запишіть вирази для подій, які полягають у тому, що:
а) настала тільки подія A;
б) настали події A і B, але подія C не настала;

в) настала принаймні одна з цих подій;
г) не настала жодна з цих подій;
д) настали всі три події;
е) настало не більше двох подій;
ж) настала тільки одна подія.

§1.3 Класичне, геометричне і статистичне означення ймовірності.

ЗАДАЧІ ДО §1.3.

3.1. Яка ймовірність вийняти з колоди карт: а) одного туза, якщо з колоди навмання дістають одну карту; б) двох тузів, якщо з колоди навмання дістають дві карти?

3.2. Гральний кубик підкидають 2 рази. Яка ймовірність того, що а) випаде різна кількість очок; б) двічі випаде 6 очок?

3.3. Задано дві множини цілих чисел: $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$. З кожної множини навмання беруть по одному числу. Побудуйте простір елементарних подій для цього випробування і вкажіть сприятливі події для таких подій: A – сума цифр буде кратною 3; B – сума цифр кратна 7; C – сума цифр кратна 2.

Обчисліть $P(A), P(B), P(AB), P(A+B), P(A+C), P(AC)$.

3.4. Монету підкидають 20 разів. Яка ймовірність того, що при цьому герб з'явиться рівно 7 разів?

3.5. На кожній з п'яти однакових карток написана одна із цифр: 1,2,3,4,5. Навмання картки розкладають в один рядок. Обчисліть ймовірність таких подій:

A – цифри на картках утворюють зростаючу послідовність;
B – спадну послідовність;
C – цифри 1,2 розміщуватимуться в такій послідовності на початку;
D – цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 на останньому;
E – утвориться парне п'ятицифрове число?

3.6. Задана множина цілих чисел $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Знайдіть ймовірність того, що чотири числа, які навмання послідовно вибирають з даної множини, утворять чотиризначне число, яке ділиться на 5?

3.7. Числа 1,2,3,4,5 написані на п'яти однакових картках. Навмання послідовно по одній вибирають три картки. Яка ймовірність того, що утвориться парне трицифрове число?

3.8. В урні міститься 4 червоних, 5 синіх і 6 зелених куль. Навмання з урни беруть три кулі. Яка ймовірність того, що: а) ці кулі одного кольору; б) всі три кулі різного кольору?

3.9. Є колода з 36 карт. Знайдіть ймовірність того, що а) верхня і нижня карти – тузи; б) зверху колоди лежать туз, король і дама у вказаному порядку.

3.10. Із сорока номерів спортлото шість номерів є виграшними. Знайдіть ймовірність вгадати в спортлото: а) 3 номери; б) 4 номери; в) 5 номерів.

3.11. Є колода з 52 карт. Знайдіть ймовірність того, що перші 13 карт однієї масті?

3.12. В урні 5 білих, 15 чорних та 30 синіх куль. Знайдіть ймовірність того, що серед навмання вийнятих 9 куль буде 3 білі, 3 чорні та 3 сині кулі.

3.13. Гральний кубик підкидають три рази. Яка ймовірність того, що жодного разу не випаде три очки?

3.14. В квадрат зі стороною 5 см кинута навмання точка. Яка ймовірність того, що точка впаде від центра квадрату на відстані не більше 2 см?

3.15. Двоє студентів домовились зустрітися між 15 та 16 годинами. При цьому на місці зустрічі чекатимуть один одного не більше 15 хвилин. Знайдіть ймовірність того, що зустріч не відбудеться.

3.16. У партії 400 однотипних деталей, серед яких контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартної деталі в цій партії?

3.17. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,85. Знайдіть число влучень, якщо було здійснено 20 пострілів?

§1.4 Сума і добуток ймовірностей.

Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

ЗАДАЧІ ДО §1.4.

4.1. В урні 10 білих, 20 чорних і 30 синіх куль. З урни навмання дістають три кулі. Знайдіть ймовірність того, що всі ці кулі синього кольору.

4.2. З урни, що містить 4 чорні і 6 білих куль, навмання і послідовно дістають по одній кульці до появи першої білої кулі. Знайдіть ймовірність того, що необхідно буде діставати четверту кулю, якщо вибірка проводиться: а) з поверненням; б) без повернення.

4.3. Тільки один з 10 ключів підходить до даних дверей. Знайдіть ймовірність того, що доведеться випробувати рівно 5 ключів, щоб відкрити двері.

4.4. Ймовірність того, що ТП не відмовить до моменту часу t_1, дорівнює 0,9, а ймовірність того, що він не відмовить до моменту часу $t_2\left(t_2 > t_1\right)$, дорівнює 0,7. Знайдіть ймовірність того, що ТП, який не відмовив до моменту часу t_1, не відмовить і до моменту часу t_2.

4.5. В першій урні 5 білих та 10 чорних куль. В другій урні 12 білих та 10 чорних куль. З кожної урни навмання дістають по три кулі. Знайдіть ймовірність того, що: а) серед цих 6 куль, які дістали, тільки 3 білі; б) всі 6 куль одного кольору.

4.6. Ймовірність виходу з ладу технічного пристрою (ТП) протягом кожної доби однакова і дорівнює 0,1.Знайдіть ймовірність того, що: а) ТП не вийде з ладу протягом трьох діб; б) ТП вийде з ладу на третю добу.

4.7. Три ТП незалежно один від одного за добу виходять з ладу з ймовірностями відповідно: 0,1; 0,2; 0,3. Знайдіть ймовірність того, що за добу вийдуть з ладу: а) три ТП; б) тільки два ТП.

4.8. На автоматичній лінії працюють три датчики. Для кожного датчика ймовірність того, що він в даний момент часу ввімкнений, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент увімкнено хоча б два датчики.

4.9. Чотири ТП незалежно один від одного за добу виходять з ладу з ймовірностями відповідно: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Знайдіть ймовірність того, що за добу з ладу вийде тільки: а) один ТП; б) тільки перший і другий або другий і третій ТП.

4.10. В партії з 20 пристроїв 15 є сертифікованими. Знайдіть ймовірність того, що: а) серед двох вибраних навмання пристроїв принаймні один сертифікований; б) серед вибраних навмання п'яти пристроїв тільки три є сертифікованими.

4.11. На підприємстві виготовляють 98% стандартних мікросхем, з яких 90% потім сертифікуються. Знайдіть ймовірність того, що мікросхема, яку навмання відібрали на підприємстві є сертифікованою.

4.12. Кидають три гральні кубики. Знайдіть ймовірність того, що при цьому 6 очок з'явиться: а) принаймні на одному; б) принаймні на двох.

4.13. Ймовірність того, що в даний момент часу справним є перший комп'ютер, дорівнює 7/8, другий – 8/9, третій – 5/6. Визначте ймовірність того, що в даний момент часу справними є принаймні два комп'ютери.

4.14. Є три ящики. В першому ящику 3 білі і 5 чорних куль, в другому – 5 білих і 8 чорних, в третьому – 8 білих і 4 чорні. Навмання вибирають ящик і дістають з нього дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що обидві ці кулі: а) білі; б) чорні.

4.15. Технічний пристрій протягом доби працює 50% часу у першому режимі, 20% - у другому , 30% - у третьому. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) пристрою при роботі у першому режимі дорівнює 0,8; у другому – 0,9; у третьому – 0,7. Знайдіть повну надійність приладу.

4.16. У ящик, що містить 4 деталі, поклали стандартну деталь, а потім навмання дістали одну деталь. Знайдіть ймовірність того, що дістали стандартну деталь, якщо всі припущення про кількість стандартних деталей, що спочатку знаходилися в ящику є рівноможливими.

4.17*. Є дві партії однорідних виробів: перша складається з 20 виробів, серед яких 20% з дефектами, в другій – 30 виробів, з яких 5 з дефектами. Навмання беруть з першої партії 3 вироби, з другої – 4 вироби, а потім їх змішують. З одержаних семи виробів випадковим чином беруть два. Знайдіть ймовірність того, що серед цих двох виробів: а) немає з дефектами; б) обидва вироби з дефектами; в) тільки один виріб з дефектом.

4.18. У першому ящику є 30 деталей, з яких 20 стандартних, у другому – відповідно 10 і 6. Деталь, яку навмання дістали з випадково відібраного ящика виявилась стандартною. Яка ймовірність, що ця деталь була з першого ящика?

4.19. На склад підприємства надходять деталі з трьох цехів. Перший цех відправив 150 деталей, другий – 200 і третій – 300. Перший і другий цехи дають по 3% браку, третій – 1%. Визначте ймовірність того, що навмання взята деталь зі складу є бракованою. Яка ймовірність того, що вона надійшла з другого цеху?

4.20. Однотипні пристрої випускаються трьома заводами у співвідношенні 20 : 30 : 50, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0,2; 0,1; 0,15. Прилад, що був куплений, виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його було зроблено на другому заводі?

§1.5 Послідовність незалежних випробувань.

ЗАДАЧІ ДО §1.5.

5.1. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Ймовірність того, що він відповість на позитивну оцінку на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайдіть ймовірність того, що студент складе іспит.

5.2. Ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених деталей робітником принаймні одна буде відмінної якості? Знайдіть найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчисліть відповідну ймовірність.

5.3. Робітник обслуговує 10 верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат потребує уваги робітника протягом однієї години в середньому складає 0,6. Знайдіть ймовірність того, що за 1 годину уваги робітника потребують: а) тільки чотири верстати; б) не менше чотирьох і не більше шести верстатів. Знайдіть найімовірніше число верстатів, які потребують уваги робітника за 1 годину і обчисліть відповідну ймовірність.

5.4. На автобазі є 12 пасажирських автобусів. Ймовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус, у середньому дорівнює 0,85. Знайдіть ймовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби на маршрутну лінію виїхало не менш ніж 9 автобусів.

5.5. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. З партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед них телевізорів вищої якості буде: а) рівно чотири; 2) не менш ніж чотири.

5.6. У партії однотипних деталей кількості стандартних і бракованих деталей відносяться, як 5 : 2. Навмання з партії беруть 8 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних виявиться рівно 6? Знайдіть найімовірніше число появи стандартних деталей серед семи навмання відібраних і обчисліть відповідну ймовірність.

5.7. У кожному з семи ящиків міститься по 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі. Навмання з кожного ящика беруть по одній деталі: Обчисліть ймовірність того, що серед цих семи відібраних деталей стандартних буде: а) рівно три; б) не менш ніж три; в) не більше ніж три.

5.8. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять в середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб наймовірніше число стандартних деталей серед відібраних було рівне 65?

5.9. Ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що з 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку: а) рівно 90 покупців; б) від 100 до 180 покупців?

5.10. У партії однотипних деталей стандартних становить 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде: а) рівно 355; б) від 355 до 300. Знайдіть найімовірніше число появи стандартних деталей і обчисліть відповідну ймовірність.

5.11. Ймовірність виходу з ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробувань 900 виробів вийдуть з ладу: а) рівно 30; б) не більше ніж 30?

5.12. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону: а) рівно 5 абонентів; б) не більше ніж 5 абонентів?

5.13. Ймовірність появи випадкової події в кожній з 100 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота появи випадкової події при цих спробах міститься в межах [0.2 ; 0.4]?

5.14. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначте межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,999.

5.15. Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Ймовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайдіть ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні, буде пошкоджено: а) рівно 3 вироби; б) не більше ніж 3.

5.16. Ймовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність в результаті перевірки книжки на 1000 сторінок виявити помилку: а) рівно на 5 сторінках; б) не більше ніж на 5 сторінках?

Розділ 2. Випадкові величини.

§2.1 Випадкові величини та їх закони розподілу.

ЗАДАЧІ ДО § 2.1.

1.1. Складіть ряд розподілу числа появ герба при одному підкиданні двох монет. Побудуйте многокутник розподілу і графік функції розподілу.

1.2. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрільцю видають патрони до тих пір, поки він не промахнеться. Складіть ряд розподілу випадкової величини X – числа патронів, виданих стрільцю при умові, що їх максимальна кількість 4.

1.3. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	1	2	3	4
P	1/16	1/4	1/2	3/16

Знайдіть: а) F(x) і побудувати її графік; б) $P(X \geq 2)$; в) $P(1 < X \leq 3)$.

1.4. Здійснюють чотири постріли у мішень. Ймовірність влучення при кожному пострілі 0,25. Складіть ряд розподілу числа влучень.

1.5. Проводять послідовні незалежні випробування п’яти приладів на надійність. Надійність кожного з приладів дорівнює р. Кожний наступний прилад випробують тільки у тому випадку, коли попередній виявився надійним. Опишіть закон розподілу випадкової величини X – числа приладів, які випробували.

1.6. Задано функцією розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le -3; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}}{2} & , -3<x\le 1; \\ 1 & , \quad x>1. \end{cases}$$

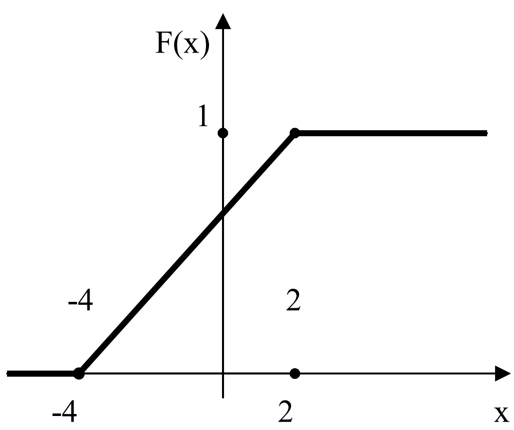
Знайдіть щільність розподілу $p(x)$ і обчисліть $P\{-2<X<0\}$.

1.7. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le 0; \\ \sin x & , 0<x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1 & , \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайдіть $p(x)$. Побудуйте графіки $F(x)$, $p(x)$ і обчисліть $p\left(\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.8. Функцію розподілу випадкової величини задано графічно



Знайдіть вирази для $F(x)$ і $p(x)$. Побудуйте графік $p(x)$.

1.9. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$p(x)=\frac{a}{1+x^2}, \quad -\infty<x<\infty.$$

Знайдіть a і $F(x)$.

1.10. Задана функція розподілу випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le 2; \\ (x-2)^2 & , \quad 2<x\le 3; \\ 1 & , \quad x>3. \end{cases}$$

Знайдіть: а) щільність розподілу $p(x)$; б) $P\ (1<X<2,5)$; в) $P\ (2,5<X<3,5)$.

1.11. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини X :

$$p(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le 1; \\ x-\dfrac{1}{2} & , \quad 1 < x \le 2; \\ 0 & , \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайдіть $F(x)$, побудуйте графіки $F(x)$ і $p(x)$. Яка ймовірність того, що $0,5 < X < 1,5$?

1.12. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$p(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x & , \quad 0 < x \le \pi; \\ 0 & , \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайдіть : а) $F(x)$, б) $P\left(0 < X < \dfrac{\pi}{4}\right)$ і надайте геометричну інтерпретацію цієї ймовірності.

1.13. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le -2; \\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{3} & , \quad -2 < x \le 7; \\ 1 & , \quad x > 7. \end{cases}$$

Знайдіть $p(x)$ і $P(-1 < X < 8)$.

1.14. За заданими функціями:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le 0; \\ 5\sqrt{x} & , \quad 0 < x \le 1; \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases} \quad p(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le 0; \\ \dfrac{3}{5}\sqrt[5]{x} & , \quad 0 < x \le 1; \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le 0; \\ \dfrac{8}{5}\sqrt[5]{x^3} & , \quad 0 < x \le 1; \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases} \quad p(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le 0; \\ \dfrac{8}{\pi\sqrt{1-x^2}} & , \quad 0 < x \le 1; \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

визначте, які з них є щільністю розподілу випадкової величини X, визначеною на $[0;1]$ і знайдіть відповідні функції розподілу.

§ 2.2.Числові характеристики дискретних випадкових величин. Окремі закони розподілу дискретних випадкових величин.

Задачі до § 2.2.

2.1. На шляху автомобіля три світлофори. Вони не дозволяють автомобілю рухатись з ймовірностями $p_1 = 0,4;\ p_2 = 0,5;\ p_3 = 0,6$ відповідно. Складіть ряд розподілу дискретної випадкової величини *X* – кількості світлофорів, які автомобіль проїхав до першої зупинки. Знайдіть M(X), D(X), $\sigma(X)$ і *F(x).*

2.2. Магазин отримав 1000 одиниць товару. Ймовірність того, що при перевезенні одиницю товару буде зіпсовано, дорівнює 0,003. Складіть закон розподілу випадкової величини *X* – кількості зіпсованих одиниць товару. Знайдіть ймовірність того, що магазин отримає: а) рівно дві зіпсовані одиниці; б) менше двох зіпсованих одиниць; в) більше двох зіпсованих одиниць; г) принаймні одну зіпсовану одиницю.

2.3. В партії з 6 деталей 4 стандартні. Навмання відібрано 3 деталі. Складіть закон розподілу випадкової величини *X* – кількості стандартних деталей серед відібраних. Знайдіть *M(X)* і *D(X).*

2.4. Дискретна випадкова величина *X* задана законом розподілу. Знайдіть *F(x)* і побудувати її графік. Знайдіть *M(X),D(X)* і $\sigma(X)$.

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

2.5. Інвестор оцінив ймовірності величини повернення його коштів, вкладених в акції компаній А та В у вигляді наведених таблиць:

Величина повернення (А)	0,05	0,10	0,15	Величина повернення (В)	0	0,10	0,30
Р	0,50	0,30	0,20	Р	0,50	0,30	0,20

Визначте середню величину повернення коштів, вкладених в акції двох компаній (математичні сподівання m_A *і* m_B). Визначте стандартні відхилення при кожному варіанті інвестицій капіталу (σ_A і σ_B).

2.6. Відомо, що продаж товару на 10% реалізується у тому випадку, коли здійснюється особиста бесіда з потенційним покупцем товару. Відомо, що з чотирма покупцями була проведена особиста бесіда. Складіть закон розподілу числа купівель у наведеній ситуації. Знайдіть математичне сподівання (середнє число купівель) та стандартне відхилення вказаної випадкової величини.

2.7. У готелі 1000 номерів, в кожному з яких є електронний замок. Ймовірність того, що замок вийде з ладу на протязі року, дорівнює 0,002. Побудуйте ряд розподілу *X* – кількості замків, що вийшли з ладу. Знайдіть *M(X), D(X),* $\sigma(X)$.

2.8. Випадкові величини *X* і *Y* – незалежні. Відомо, що M(X)=10, M(Y)=15, D(X)=5, D(Y)=6. Знайдіть: 1) M(2X+Y); 2) M(XY); 3) D(3X+2Y); 4) D(X-2Y).

2.9. Здійснюють три постріли з ймовірностями влучення у ціль: $p_1 = 0{,}4;$ $p_2 = 0{,}3;$ $p_3 = 0{,}6.$ Знайдіть *M(X)* та *D(X)*, якщо випадкова величина *X* – загальне число влучень при трьох пострілах.

2.10. Знайдіть *M(X), D(X),* $\sigma(X)$ та моду дискретної випадкової величини *X*, заданої рядом розподілу:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	

2.11. За статистичними даними 70% слухачів деякого навчального закладу успішно завершують навчання. Випадковим чином відібрали 5 слухачів. Знайдіть закон розподілу Х - числа слухачів, які успішно завершать навчання, серед відібраних. Знайдіть *M(X), D(X)* і $\sigma(X)$.

2.12. Знайдіть математичне сподівання суми числа очок, які можуть випасти при одному киданні двох гральних кубиків.

2.13. Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю $p = 0{,}4$ появи події *A* в кожному випробуванні. Складіть ряд розподілу випадкової величини *X* – кількість появ події *A* у трьох незалежних випробуваннях. Знайдіть *M(X), D(X)* і $\sigma(X)$.

2.14. Випадкова величина *X* приймає два можливих значення: x_1 з ймовірністю 0,3 та x_2 з ймовірністю 0,7, при цьому $x_2 > x_1$. Знайдіть $x_1\, i\, x_2$, якщо M(X)=2,7 і D(X)=0,21.

2.15. Дано ряд розподілу випадкової величини *X*:

X	3	5
P	0,2	0,8

Знайдіть центральні моменти першого, другого, третього та четвертого порядків.

§2.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин. Окремі закони розподілу неперервних випадкових величин.

Задачі до § 2.3.

3.1. Випадкова величина задана щільністю розподілу ймовірностей

$$p(x)=\begin{cases}0, & x \le 0;\\ \frac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \le 3;\\ 0, & x > 3.\end{cases}$$

Знайдіть: $M(X),\ \sigma(X),\ Me(X)$.

3.2. Задано щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X :

$$p(x)=\begin{cases}0, & x \le -3;\\ \frac{1}{4\sqrt{x+3}}, & -3 < x \le 1;\\ 0, & x > 1.\end{cases}$$

Знайдіть: $M(X),\ \sigma(X),\ Me(X)$.

3.3. Задано щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X :

$$p(x)=\begin{cases}0, & x \le 0;\\ \frac{2}{7}\cos\frac{2}{7}x, & 0 < x \le \frac{7}{4}\pi;\\ 0, & x > \frac{7}{4}\pi.\end{cases}$$

Знайдіть: $M(X),\ D(X)$.

3.4. Випадкова величина X розподілена рівномірно на деякому проміжку, причому $M(X)=4,\ D(X)=3$. Знайдіть щільність розподілу величини X .

3.5. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ, тобто має щільність розподілу:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x < 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0.\end{cases}$$

Знайдіть: $M(X),\ D(X), \sigma(X)$.

3.6. Щільність розподілу випадкової величини X має вигляд

$$p(x)=\begin{cases}0{,}5\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайдіть медіану, моду, $M(X)$, $D(X)$.

3.7. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)(x-5), & -1<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайдіть: a, Me, Mo, As.

3.8. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ a\left(x^2-4x+4\right), & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Знайдіть: $a, p(x), M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(0{,}2<X<3{,}5)$. Побудуйте графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$.

3.9. Ціна ділення шкали вимірювального приладу дорівнює 2. Припускаючи, що похибка при заокругленні розподілена рівномірно. Знайдіть ймовірність того, що: а) похибка заокруглення не перевищує 0,4; б) похибка заокруглення більше ніж 0,6.

3.10. Випадкова величина X задає час безвідмовної роботи системи (в годинах). Вона має розподіл $p(t)=0{,}05e^{-\lambda t}$, $t\ge 0$. Знайдіть λ і надійність (ймовірність безвідмовної роботи системи) протягом 10 годин.

3.11. Компанія встановила, що випадкова величина $X-$ кількість співробітників, які пропустили роботу через хворобу, розподілена за нормальним законом з середнім значенням 78 і середнім квадратичним відхиленням – 14. Знайдіть ймовірність того, що кількість співробітників що пропустили роботу буде: 1) не більше 50; 2) від 50 до 85.

3.12. Сума грошей, яку витрачає відвідувач супермаркету є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням 56 грн. і середнім квадратичним відхиленням 12 грн. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний відвідувач витратить суму: 1) менше 30 грн.; 2) від 70 до 100 грн.; 3) що відхиляється від середнього значення на величину не більшу ніж 4 грн.

3.13. Випадкова величина X має нормальний розподіл $N(10,\ 5)$. Знайдіть симетричний відносно середнього значення інтервал, в який з ймовірністю p влучить значення випадкової величини X, якщо: а) $p=0{,}9973$; б) $p=0{,}9544$; в) $p=0{,}50$.

§2.4 Функції від випадкового аргументу.

Задачі до § 2.4.

4.1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	-1	1	5

p_i	0,3	0,4	0,3

Знайдіть розподіл випадкової величини Y, де $Y = X^2$. Знайдіть $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

4.2. Закон розподілу випадкової величини X заданий рядом розподілу

X	0,001	0,01	0,1	10	100	1000
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Знайдіть закон розподілу випадкової величини Y, якщо $Y = \lg X$. Обчисліть $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

4.3. Випадкова величина Y задана таким чином

$$Y = \begin{cases} \sqrt{X}, & X \geq 0; \\ \sqrt{-X}, & X < 0. \end{cases}$$

Знайдіть щільність розподілу $p(Y)$, якщо $X \sim N(0;1)$.

4.4. Випадкова величина X має ряд розподілу

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,2	0,7	0,1

Знайдіть закон розподілу випадкової величини Y, якщо $Y = \sin X$. Обчисліть $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

4.5. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть щільність розподілу $p(y)$ випадкової величини $Y = \sin X$.

4.6. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть щільність розподілу $p(y)$ випадкової величини $Y = \cos X$, та її математичне сподівання.

4.7. Випадкова величина X має ряд розподілу

X	3	6	10
p_i	0,2	0,1	0,7

Знайдіть закон розподілу випадкової величини Y, якщо $Y = 2X + 1$. Обчисліть $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

4.8. Всі можливі значення випадкової величини X розташовані в інтервалі $(a\,;b)$. Знайдіть щільність розподілу випадкової величини $Y = 3X$, якщо щільність розподілу X задана функцією $p(x)$.

4.9. Дискретні випадкові величини X і Y задані рядами розподілу:

а)

X	10	11	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

б)

X	4	10
P	0,7	0,3

Y	1	7	8
P	0,7	0,2	0,1

Знайдіть розподіли випадкових величин $Z_1 = X + Y$ і $Z_2 = XY$ та їх математичні сподівання, якщо X і $Y -$ незалежні величини.

§2.5 Системи двох випадкових величин. (Двовимірні випадкові величини.)

Задачі до § 2.5.

5.1. Знайдіть числові характеристики $M(X)$, $M(Y)$, σ_X, σ_Y, r_{XY} двовимірної випадкової величини за таблицею розподілу

X \ Y	5	7	10
1	0,01	0,1	0,09
2	0,05	0,15	0,3
3	0,04	0,15	0,11

5.2. Розподіл системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею

X \ Y	2	4	6	8
-6	$0{,}1a$	$0{,}5a$	$0{,}4a$	a
-4	$0{,}9a$	$0{,}4a$	$0{,}5a$	$0{,}2a$
-2	a	$2{,}1a$	$1{,}1a$	$1{,}8a$

Знайдіть значення параметра a. Обчислити r_{XY}, $M(X|\,Y=4)$, $M(Y|\,X=-2)$.

5.3. Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Спільний розподіл відхилень діаметра X і овальності Y наведено у таблиці:

X \ Y	0,002	0,004	0,006	0,008
0,01	0,01	0,03	0,04	0,02
0,02	0,02	0,24	0,1	0,04
0,03	0,04	0,15	0,08	0,03
0,04	0,04	0,06	0,08	0,02

Знайдіть коефіцієнт кореляції r_{XY}.

5.4. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) задано таблицею:

X \ Y	2,2	4,2	6,2	1,2
2,5	0,02	a	0,08	0,1
3,5	a	0,04	0,06	0,2
4,5	0,08	0,06	$0{,}6a$	0,1

Знайдіть ймовірності p_{21}, p_{12}, p_{33} і побудуйте кореляційну матрицю.