Міністерство освіти і науки України
Черкаський державний технологічний університет

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання

Частина І

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 3 від 06.10.2004 р.
Та методичною радою ЧДТУ
Протокол № 7 від 03.02.2005 р.

Черкаси ЧДТУ 2005

УДК 517
ББК 22.1
Н15

Укладачі: Грижук Олександра Павлівна,
Дідковський Руслан Михайлович, к.т.н., доцент,
Ковтуненко Віктор Степанович,
Олексієнко Наталія Володимирівна, к.т.н., доцент,
Синько Ірина Василівна,
Сухіна Олена Миколаївна

Рецензент: Ламзіна Тетяна Борисівна, к.ф.-м.н.

Н15 Навчально-методичні матеріали до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання. Частина I / Укладачі: Грижук О.П., Дідковський Р.М., Ковтуненко В.С., Олексієнко Н.В., Синько І.В., Сухіна О.М. – Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 76 с.
ISBN 966-7533-85-9
ISBN 966-7533-86-7

УДК 517
ББК 22.1

Навчальне видання

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
до виконання контрольних робіт з вищої математики
для студентів технічних спеціальностей
заочної форми навчання
Частина I

В авторській редакції

Надруковано з авторського оригіналу
Макет Манжури Т.А.

Підписано до друку 11.12.2005. Формат 60x84 1/16. Папір офісн. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативний. Ум. др. арк. 4,42. Обл.-вид.арк. 4,36. Тираж 500 прим. Зам. №294-05

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.

ISBN 966-7533-85-9
ISBN 966-7533-86-7

ВСТУП

Дані "Навчально-методичні матеріали" відповідають програмі дисципліни "Вища математика" для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання.

Перша частина вміщує п’ять розділів, що охоплюють матеріал перших двох семестрів:

- Елементи лінійної алгебри.
- Аналітична геометрія.
- Введення в математичний аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної.
- Інтегральне числення функції однієї змінної.
- Диференціальне числення функції багатьох змінних.

В кожному розділі наведено: посилання на навчальну літературу; короткі теоретичні відомості – формулювання основних понять і теорем; зразки розв’язування основних типів задач; підбір задач для виконання контрольних робіт (10 варіантів).

Матеріали рекомендовано для студентів заочної форми навчання, вони також можуть бути використані як довідник студентами денної форми навчання.

§1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Література: [1] – с. 8-27, 89-102; [2] – с. 68-80, 104-113; [3] – с. 5-14; [4] – с. 3-24; [5] – с. 124-138.

Матрицею $A=(a_{ij})$ називається прямокутна таблиця чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що містить m рядків та n стовпців.

Якщо $m=n$, то матриця називається *квадратною*, а число m, що дорівнює n, – її *порядком*. Числа a_{ij}, що утворюють матрицю, називаються її *елементами*.

У запису a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця.

Добутком матриці $A=(a_{ik})$ розмірів $m\times n$ і матриці $B=(b_{kj})$ розмірів $n\times p$ називається матриця C розмірів $m\times p$, елемент c_{ij}, якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та елементів j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2,...m;\; j=1,2,...,p)$$

Вирази

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

називаються відповідно *визначниками* (*детермінантами*) другого і третього порядків.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник Δ_{ij} $(n-1)$-го порядку, утворений з даного викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця і помножений на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця n-го порядку.

Наприклад

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $|A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує і має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де A_{ij} $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n)$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Мінором r-го порядку матриці A розмірів $m \times n$ називається визначник r-го порядку, утворений з елементів матриці A, що залишились після викреслювання в ній $m - r$ рядків і $n - r$ стовпців $(r \leq m,\ r \leq n)$.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Крім безпосереднього обчислення мінорів, ранг матриці можна знайти простішим методом, який ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над нею виконувати *елементарні перетворення*:

а) переставити місцями два рядки (стовпці);
б) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти системи, b_i – вільні члени.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається <u>*основною*</u> матрицею системи.

Матриця

$$\widetilde{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

називається <u>*розширеною*</u> матрицею системи.

Для того, щоб система була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її розширеної матриці дорівнював рангу основної матриці, тобто $r(\widetilde{B}) = r(A)$.

За допомогою елементарних перетворень систему зводять до системи виду

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots & & & + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ & \alpha_{2k}x_k + \dots & & + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ & & \alpha_{3i}x_i + \dots & + \alpha_{3n}x_n = \beta_3, \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \\ & & \alpha_{rs}x_s + \dots & + \alpha_{1n}x_n = \beta_1. \end{cases} \tag{2}$$

Таку систему рівнянь називають <u>*трапецієподібною*</u>.

1) Якщо система (2) містить рівняння виду $0 = \beta_r$ і $\beta_r \neq 0$, то вона несумісна.
2) Якщо система сумісна, а ранг матриці системи менший числа невідомих x, тобто $r < n$, то система має безліч розв'язків. Її можна розв'язати <u>методом Гаусса</u> – методом послідовного виключення невідомих. Вільні $n - r$ невідомих вибираються довільно, а базисні r невідомих визначаються єдиним способом через вільні невідомі.
3) Якщо $r = n$, то система (2) має трикутний вигляд. В цьому випадку система має єдиний розв'язок, який можна знайти, використовуючи <u>матричний метод</u> або <u>метод Крамера</u>.

Нехай основна матриця системи A є квадратною матрицею n-го порядку. Тоді систему лінійних рівнянь можна записати в матричній формі

$$AX = B,$$

де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\Delta=|A|$. Якщо $\Delta\neq 0$, то існує матриця обернена до матриці A і розв’язок системи можна знайти за формулою

$$X=A^{-1}B. \tag{3}$$

Якщо $\Delta\neq 0$, то єдиний розв’язок системи можна знайти також за формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\dots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{4}$$

де $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_i,\dots,\Delta_n$ – визначники, що отримуються з визначника Δ заміною i-го стовпця $(i=1,2,\dots,n)$ стовпцем вільних членів.

П р и к л а д 1. (Задача 1.1.) Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_1 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

трьома способами:

а) методом Крамера;

б) матричним способом;

в) методом Гаусса.

Розв’язання.

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 3+(-3)\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 2-1\cdot(-2)\cdot(-3)-2\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot 3=-26.$$

$\Delta\neq 0$, тому розв’язок можна знайти за формулами Крамера та матричним способом.

а) Знайдемо $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 17 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-78,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=130,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 17 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-52.$$

Підставляючи знайдені значення визначників у формули Крамера (4) отримаємо

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-78}{-26}=3,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{130}{-26}=-5,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-52}{-26}=2.$$

б) Знайдемо розв'язок матричним способом. Відповідно до введених позначень маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Використаємо отримане в попередньому пункті значення визначника матриці A:

$$|A| = -26 \neq 0.$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$$

Згідно формули (1) A^{-1} має вигляд

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи знайдемо за формулою (3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 40-102-16 \\ 5+153-28 \\ -15-17-20 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -78 \\ 130 \\ -52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = 2$.

в) Для розв'язання системи методом Гаусса запишемо розширену матрицю даної системи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

Поміняємо місцями 1-й і 3-й рядки матриці.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

Домножимо перший рядок на (-1) та додамо його до другого. Перший рядок переписуємо без змін, а замість другого записуємо отриману суму. Виконаємо аналогічну операцію, домноживши перший рядок на (-2) та додавши його до третього. В результаті матимемо.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & -3 & -1 & | & 13 \\ 0 & -1 & -9 & | & -13 \end{pmatrix} \sim$$

Домножимо 2-й рядок на (-1) і поміняємо місцями другий і третій рядки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -9 & | & -13 \\ 0 & 3 & 1 & | & -13 \end{pmatrix} \sim$$

Домножимо 2-й рядок на 3 і додамо до третього.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -9 & | & -13 \\ 0 & 0 & -26 & | & -52 \end{pmatrix}.$$

Ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної $r = r(A) = r(\widetilde{B}) = 3$ та $r = n = 3$, тому система має єдиний розв'язок, який знайдемо, записавши перетворену систему за здобутою матрицею. Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ \quad - x_2 - 9x_3 = -13, \\ \qquad - 26x_3 = -52. \end{cases}$$

Звідси, піднімаючись знизу вгору, знайдемо

$$x_3 = 2,$$
$$x_2 = 13 - 9x_3 = -5,$$
$$x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 3.$$

Приклад 2. (Задача 1.2.) Довести, що система лінійних рівнянь має розв'язки, знайти ці розв'язки.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -18, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9 \\ 2 & -4 & -1 & | & 4 \\ -2 & 4 & -6 & | & -18 \\ 1 & -2 & -4 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 0 & -7 & | & -14 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -7 & | & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A) = 2$, $r(\widetilde{B}) = 2$. Система сумісна.

Оскільки ранг менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків. Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3, \\ x_3 = 2, \end{cases}$$

де x_1, x_3 – базисні, а x_2 – вільна невідома.

Запишемо загальний розв’язок даної системи у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 .$$

П р и к л а д 3 . (Задача 1.3.) Дослідити систему рівнянь на сумісність.

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язання.

Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & -3 & -11 \\ 0 & 30 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

$r(A) = 2$, $r(\widetilde{B}) = 3$, тобто $r(A) \neq r(\widetilde{B})$.

Система рівнянь несумісна.

Задачі контрольної роботи № 1

Задача 1.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) методом Крамера;

б) матричним способом;

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1; \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 8; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$

Задача 1.2. Довести, що система лінійних рівнянь має розв'язки і знайти ці розв'язки.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 6x_2 \qquad = 3; \\ 5x_1 + 14x_2 - 4x_3 = 25. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20; \\ -4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -12; \\ 5x_1 + x_2 + 8x_3 = -24. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9; \\ 15x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -12; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -16. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ -13x_1 - 10x_2 + 12x_3 = -16; \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -5; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = -8; \\ 6x_1 - 11x_2 - 5x_3 = -14. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 51. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ x_1 - 6x_2 + 6x_3 = -23; \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 13; \\ 9x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -13. \end{cases}$

Задача 1.3. Дослідити систему рівнянь на сумісність.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13; \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9; \\ 15x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10; \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20; \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20; \\ 5x_1 + x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -5; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 6x_2 = 12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ -13x_1 - 10x_2 + 12x_3 = 3. \end{cases}$

§2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Вектори і дії над ними

Література: [1] – с. 30-76; [2] – с. 81-103; [3] – с. 5-12; [4] – с. 25-48; [5] – с. 8-22, 139-158.

Вектором називають напрямлений відрізок. Якщо початок вектора є точка A, а кінець – точка B, то вектор позначають так: $\overline{AB}$ або $\overline{a}$. Довжина відрізка AB називається *модулем вектора* і позначається $|\overline{AB}|$ або $|\overline{a}|$.

Лінійною комбінацією n векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, тобто вираз виду

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n.$$

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність нульовому вектору їх лінійної комбінації з числами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ можлива лише у випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Система векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ називається *базисом* простору, якщо вона лінійно незалежна і кожен вектор простору $\overline{a}$ може бути розкладено в лінійну комбінацію векторів даної системи $\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e}_n$. Коефіцієнти цього розкладу називають *координатами* вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ і записують так: $\overline{a}(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$.

Два неколінеарні вектори утворюють базис на площині, три некомпланарні вектори утворюють базис в просторі.

Кажуть, що в просторі задано *декартову прямокутну систему координат*, якщо в ньому зафіксована точка O (початок координат) та вибрано *ортонормований* базис $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ (вектори базису мають довжину 1 і взаємно перпендикулярні). Надалі користуватимемось саме декартовою системою координат.

Якщо точка $A(x_1;y_1;z_1)$ є початком вектора $\overline{a}$, а точка $B(x_2;y_2;z_2)$ – його кінцем, то координати a_x, a_y, a_z вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ знаходять за формулами

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1, \text{ тобто } \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Довжину $|\overline{a}|$ вектора $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначають за формулою

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (1)$$

Якщо точка $C(x; y; z)$ належить прямій AB і ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}$, то координати x, y, z точки C визначають за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Зокрема, якщо C – середина відрізка AB, то в цих формулах слід покласти $\lambda = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2)$$

<u>*Скалярним добутком*</u> векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута $\varphi = (\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b})$ між ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi.$$

Скалярний добуток позначають також $< \overline{a}, \overline{b} >$ і $\overline{a}\overline{b}$.

Якщо вектори задано своїми координатами $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярний добуток $\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,

а <u>кут між векторами</u> знаходять за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3)$$

Умова <u>*ортогональності*</u> (перпендикулярності) векторів: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

<u>*Векторним добутком*</u> векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор, який позначається $\overline{a} \times \overline{b}$ і задовольняє таким трьом умовам:

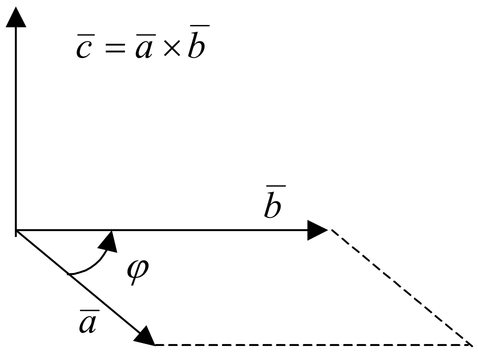


Рис. 1

1) довжина вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi, \text{ де } \varphi = (\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b});$$

2) вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярний кожному з векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 1);
3) вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ виконується проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначають також $[\overline{a}, \overline{b}]$ або $[\overline{a}\overline{b}]$.

<u>*Умова паралельності*</u> векторів: $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$.

Якщо вектори задано їх координатами $\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\overline{b}(b_x; b_y; b_z)$, то

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\overline{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\overline{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\overline{k}, \quad (4)$$

отже

$$\overline{c} = (a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x).$$

<u>*Мішаним добутком*</u> $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ впорядкованої трійки векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ називається число, яке дорівнює векторному добутку $\overline{a}\times\overline{b}$, помноженому скалярно на вектор $\overline{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}.$$

Якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ задано своїми координатами: $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\overline{b}=(b_x;b_y;b_z)$ і $\overline{c}=(c_x;c_y;c_z)$, то їх мішаний добуток визначають за формулою

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$: $V_{\text{пар-да}}=|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$, а об'єм відповідної піраміди $V_{\text{піраміди}}=\frac{1}{6}|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$.

Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні тоді і лише тоді, коли їхній мішаний добуток рівний нулю.

Приклад 1. (Задача 2.1.) Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$ і точки $M(2;1;2)$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3;
3) площу грані $A_1A_2A_3$;
4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5) довести, що вектори A_1A_2, A_1A_3 і A_1A_4 утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{A_1M}$ у цьому базисі.

Розв'язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overline{A_1A_2}$.

Маємо: $\overline{A_1A_2}=(4-(-1);3-0;2-1)=(5;3;1)$, Оскільки $|A_1A_2|=|\overline{A_1A_2}|$, то за формулою (1) $|\overline{A_1A_2}|=\sqrt{5^2+3^2+1^2}=\sqrt{35}.$

2) Знайдемо координати вектора $\overline{A_1A_3}$: $\overline{A_1A_3}=(1-(-1);2-0;4-1)=(2;2;3)$.

Довжина вектора $\overline{A_1A_3}$: $\left|\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$. Косинус кута між векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$ знайдемо за формулою (3):

$$\cos(\overline{A_1A_2}\,\widehat{,}\,\overline{A_1A_3})=\frac{<\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}>}{|\overline{A_1A_2}|\cdot|\overline{A_1A_3}|}=\frac{5\cdot2+3\cdot2+1\cdot3}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{17}}=\frac{19}{\sqrt{595}}.$$

Тоді $(\overline{A_1A_2}\,\widehat{,}\,\overline{A_1A_3})=\arccos\frac{19}{\sqrt{595}}\approx0{,}6778.$ Величина кута між векторами

$\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$ дорівнює величині кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_3.

3) Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює площі трикутника $A_1A_2A_3$, тобто половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{A_1A_2}(5;3;1)$ і $\overline{A_1A_3}(2;2;3)$. З означення векторного добутку $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|$. Тоді за формулою (4)

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (7; -13; 4).$$

Тому $$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + (-13)^2 + 4^2} = 3\sqrt{26} \text{ (кв. од.)}.$$

4) Об'єм піраміди дорівнює $1/6$ модуля мішаного добутку векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ і $\overline{A_1A_4} = (0-(-1);4-0;-1-1) = (1;4;-2)$. Мішаний добуток знайдемо за формулою (5)

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -53.$$

Отже $$V = \frac{1}{6}|-53| = 8\frac{5}{6} \text{ (куб. од.)}.$$

5) Для того, щоб вектори $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ і $\overline{A_1A_4}$ утворювали базис достатньо, щоб визначник Δ, складений з координат цих векторів, не дорівнював нулю(три некомпланарні вектори в просторі утворюють базис). З попереднього пункту маємо, що $\Delta = -53 \neq 0$. Знайдемо координати вектора $\overline{A_1M}$ в цьому базисі. Для цього подамо $\overline{A_1M} = (2-(-1);1-0;2-1) = (3;1;1)$ як лінійну комбінацію базисних векторів

$$x \cdot \overline{A_1A_2} + y \cdot \overline{A_1A_3} + z \cdot \overline{A_1A_4} = \overline{A_1M}.$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 3, \\ 3x + 2y + 4z = 1, \\ 1x + 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему будь-яким з методів знайдемо

$$x = \frac{35}{53},\ y = -\frac{2}{53},\ z = -\frac{12}{53}.$$

Отже $$\overline{A_1M} = \frac{35}{53}\overline{A_1A_2} - \frac{2}{53}\overline{A_1A_3} - \frac{12}{53}\overline{A_1A_4}.$$

Пряма на площині.

Література: [1] – с. 140-144; [2] – с. 8-13, 37-48; [4] – с. 58-65; [5] – с. 23-51.

1. Пряма, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = (A; B)$, який називається <u>*нормальним вектором прямої*</u> (рис. 2), має рівняння виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Позначимо $C = -Ax_0 - By_0$, тоді отримаємо <u>*загальне рівняння прямої*</u>:

$$Ax + By + C = 0.$$

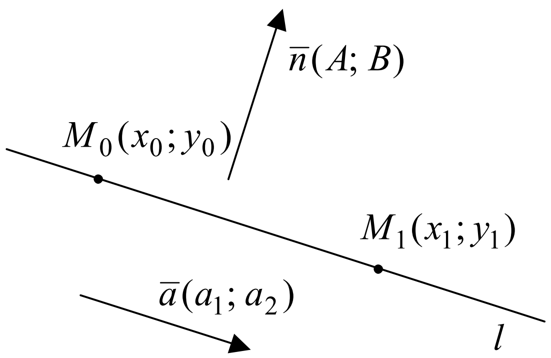


Рис. 2

2. Пряма, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до вектора $\overline{a}(a_1; a_2)$, який називається <u>*напрямним вектором прямої*</u> (рис. 2), має рівняння виду:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \qquad (6)$$

Рівняння (6) називають <u>*канонічним рівнянням прямої*</u>.

3. Пряма, що проходить через дві точки $M_0(x_0; y_0)$ і $M_1(x_1; y_1)$, має рівняння виду:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \qquad (7)$$

<u>Відстань</u> від точки $M_0(x_0; y_0)$ <u>до прямої</u> $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (8)$$

П р и к л а д 2. (Задача 2.2.) Дано вершини трикутника ABC: $A(1; 2)$, $B(2; -2)$, $C(6; 1)$. Знайти:

1) рівняння сторін AB, AC і BC;
2) рівняння медіани AM і висоти BH;
3) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно прямій AB, і обчислити відстань між цими прямими.

Розв'язання.

1) Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки (7)

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{-2 - 2} \Rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-4}.$$

Отримали канонічне рівняння прямої (6), з якого встановимо, що $\overline{a}(1; -4)$ – напрямний вектор прямої AB. Помножимо обидві частини рівняння на -4 і перенесемо всі доданки в одну сторону.

$$-4(x-1)=y-2,$$
$$(AB):4x+y-6=0.$$

Маємо загальне рівняння прямої, з якого $\overline{n}_{AB}=(4;1)$ – нормальний вектор прямої AB.

Аналогічно отримаємо рівняння інших сторін

$$(BC):3x-4y-14=0,\ (AC):x+5y-11=0.$$

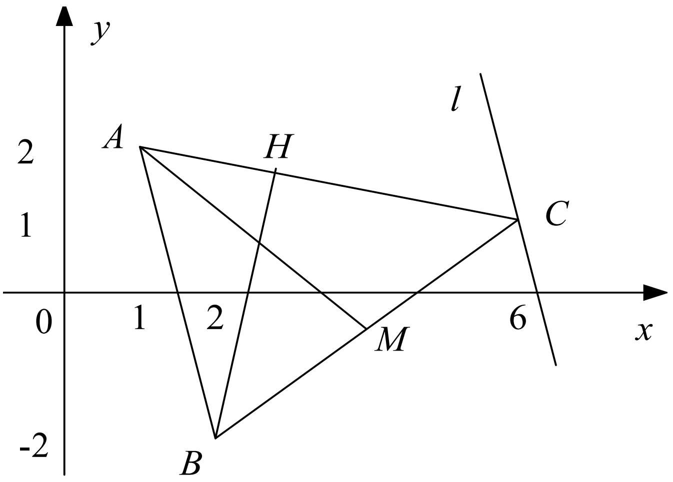


Рис. 3

2) Висота $BH\perp AC$ (рис. 3), тому нормальний вектор $\overline{n}_{AC}(1;5)\parallel BH$ є напрямним для висоти. Скориставшись канонічним рівнянням прямої (6), записуємо рівняння BH, що проходить через точку $B(2;-2)$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-(-2)}{5}\Rightarrow 5(x-2)=y+2.$$
$$(BH):5x-y-12=0.$$

Медіана AM ділить точкою M навпіл сторону BC. Координати середини відрізка, тобто точки M, обчислимо за допомогою формул (2)

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+6}{2}=4,\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;2)$ і $M(4;-1/2)$:

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{-1/2-2}\Rightarrow\frac{5}{2}(x-1)=3(y+1/2).$$
$$(AM):5x-6y-8=0.$$

3) Пряма l, що проходить через точку C паралельно AB буде мати такий самий напрямний вектор як і AB, тобто $\overline{a}(1;-4)$. Запишемо канонічне рівняння прямої l:

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-1}{-4}.$$
$$l:4x+y-25=0.$$

Оскільки прямі l і AB паралельні, то відстань між цими прямими можна визначити як відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої. Відстань від точки C прямої l до прямої AB знайдемо за формулою (8):

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 6+1\cdot 1-6|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{19}{\sqrt{17}}.$$

Площина в просторі.

Література: [1] – с. 140-144, [2] – с. 129-148, [4] – с. 66-78, [5] – с. 159-188.

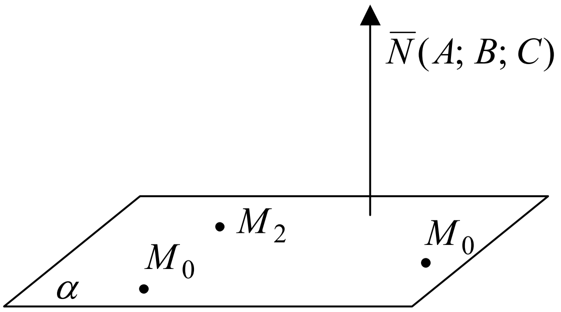


Рис. 4

1. Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$, який називають *нормальним вектором площини* (рис. 4), має вигляд
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9)$$
Позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Отримаємо *загальне рівняння площини*
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

2. Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ має вигляд
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Кут між двома площинами, що мають нормальні вектори $\overline{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ та $\overline{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, визначається як кут між $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$:
$$\cos\varphi = \frac{<\overline{N}_1, \overline{N}_2>}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}. \quad (11)$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою:
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (12)$$

Пряма в просторі.

1. Пряма, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до вектора $\bar{a}(a_1; a_2)$, який називається напрямним вектором прямої, має рівняння виду:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (13)$$
Рівняння (13) називають *канонічним рівнянням прямої*.
2. Пряма, що проходить через дві точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $M_1(x_1; y_1; z_1)$ має рівняння виду:
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Нехай $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ – напрямний вектор прямої l, а $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ – напрямний вектор прямої m, тоді косинус кута між цими прямими визначається за формулою:

$$\cos(l\hat{\ },m)=\frac{<\overline{a},\overline{b}>}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

П р и к л а д 3. (Задача 2.3.) В умовах прикладу 1 знайти:

1) рівняння прямої A_1A_2;
2) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
3) кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
4) відстань від точки M до площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

1) Скористаємося канонічним рівнянням прямої (13). За напрямний вектор даної прямої можна прийняти вектор $\overline{A_1A_2}=(5;3;1)$. Враховуючи, що пряма проходить через точку $A_1(-1;0;1)$, дістанемо рівняння прямої A_1A_2 у вигляді

$$(A_1A_2):\frac{x+1}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}.$$

2) Запишемо рівняння площини (10), що проходить через три задані точки $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$ і $A_3(1;2;4)$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 7(x+1)-13y+4(z-1)=0.$$

$$(A_1A_2A_3):7x-13y+4z+3=0.$$

3) Рівняння площини $A_1A_2A_4$ знаходимо аналогічно завданню 2): $(A_1A_2A_4):-10x+11y+17z-27=0$. Нормальні вектори площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$ мають координати відповідно $\overline{N}_1=(7;-13;4)$, $\overline{N}_2=(-10;11;17)$. Скориставшись формулою (11), знаходимо кут між цими площинами

$$\cos\varphi=\frac{7\cdot(-10)+(-13)\cdot 11+4\cdot 17}{\sqrt{7^2+(-13)^2+4^2}\sqrt{(-10)^2+11^2+17^2}}=\frac{-145}{\sqrt{234}\sqrt{510}}=\frac{-145}{\sqrt{119340}}=$$

$$=-\frac{145}{345}=-\frac{29}{69}.\Rightarrow\varphi=\arccos\left(-\frac{29}{69}\right)\approx 2{,}00456.$$

3) Площина α, паралельна до площини $A_1A_2A_3$, одночасно перпендикулярна до вектора $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=(7;-13;4)$. Оскільки вона також проходить через точку $M(2;1;2)$, то за формулою (9) маємо

$$7(x-2)-13(y-1)+4(z-2)=0,$$

$$\alpha:\ 7x-13y+4z-9=0,$$

Відстань від точки M до площини $A_1A_2A_3$ обчислимо скориставшись формулою (12):

$$d=\frac{|\,7\cdot 2-13\cdot 1+4\cdot 2+3\,|}{\sqrt{243}}=\frac{12}{\sqrt{243}}.$$

Задачі контрольної роботи № 2

Задача 2.1. Дано координати вершин піраміди A_1, A_2, A_3, A_4 і точка M.

Засобами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3;
3) площу грані $A_1A_2A_3$;
4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5) довести, що вектори A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{A_1M}$ в цьому базисі:

1. $A_1(-2;0;2)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(3;2;4)$, $A_4(1;3;2)$, $M(1;0;3)$.
2. $A_1(1;2;3)$, $A_2(2;0;0)$, $A_3(3;2;5)$, $A_4(4;0;0)$, $M(2;1;2)$.
3. $A_1(3;0;6)$, $A_2(1;-3;2)$, $A_3(1;3;2)$, $A_4(2;2;5)$, $M(3;2;5)$.
4. $A_1(-2;0;-1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(3;2;7)$, $M(4;1;5)$.
5. $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(2;2;5)$, $A_4(2;0;0)$, $M(-1;2;3)$.
6. $A_1(-2;1;0)$, $A_2(3;2;7)$, $A_3(4;-1;2)$, $A_4(6;1;5)$, $M(4;5;6)$.
7. $A_1(-1;3;0)$, $A_2(2;0;0)$, $A_3(-4;1;2)$, $A_4(3;2;7)$, $M(-3;2;1)$.
8. $A_1(6;1;5)$, $A_2(5;1;0)$, $A_3(4;0;0)$, $A_4(-6;0;5)$, $M(2;3;1)$.
9. $A_1(1;-1;6)$, $A_2(-5;-1;0)$, $A_3(3;-2;2)$, $A_4(2;2;5)$, $M(4;1;2)$.
10. $A_1(0;0;0)$, $A_2(2;1;1)$, $A_3(1;-1;1)$, $A_4(1;-1;2)$, $M(5;2;1)$.

Задача 2.2. Дано вершини трикутника ABC. Знайти:

1) рівняння сторін AB, AC, BC;
2) рівняння медіани AM і висоти BH;
3) точку перетину його медіан;
4) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно прямій AB, і обчислити відстань між цими прямими.

1. $A(9;5)$, $B(5;2)$, $C(13;-4)$.
2. $A(4;6)$, $B(8;3)$, $C(0;-3)$.
3. $A(3;7)$, $B(7;4)$, $C(-1;-2)$.
4. $A(2;6)$, $B(6;3)$, $C(-2;-3)$.
5. $A(1;5)$, $B(5;2)$, $C(-3;-4)$.
6. $A(0;6)$, $B(4;3)$, $C(-4;-3)$.
7. $A(6;4)$, $B(10;1)$, $C(2;-5)$.
8. $A(8;6)$, $B(4;3)$, $C(12;-3)$.
9. $A(7;5)$, $B(11;2)$, $C(3;-4)$.
10. $A(3;3)$, $B(-1;0)$, $C(7;-6)$.

Задача 2.3. В умовах задачі 2.1 знайти:

1) рівняння прямої A_1A_2;
2) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
3) кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
4) рівняння площини, що проходить через точку M паралельно площині $A_1A_2A_3$, і обчислити відстань між цими площинами.

§3. ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Основні відомості про функцію

Література: [5] – с. 217-266, [6] – с. 16-65, [7] – с. 131-147, [8] – с. 137-140.

Величину y називають *функцією* змінної величини x в області визначання D, якщо кожному значенню x із цієї області відповідає одне певне значення величини y.

Множину значень, яких набуває величина y, називають *областю значень функції*.

Графіком функції (в системі декартових прямокутних координат) називають множину всіх точок площини, абсциси яких є значеннями змінної, а ординати – відповідними значеннями функції.

Основні елементарні функції:

1) степенева $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$;
2) показникова $y = a^x, a > 0, a \neq 1$;
3) логарифмічна $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$;
4) тригонометричні функції $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$;
5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Для побудови графіків функцій застосовують такі прийоми: побудова по точках; виконання дій над графіками (додавання, віднімання, множення графіків); перетворення графіків (зсув, розтяг).

Знаючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій:

1) $y = f(x - a)$ – вихідний графік зсунутий вздовж осі Ox на величину a;
2) $y = f(x) + b$ – вихідний графік зсунутий вздовж осі Oy на величину b;
3) $y = A\, f(x)$ – вихідний графік розтягнений в A раз вздовж осі Oy;
4) $y = f(k \cdot x)$ – вихідний графік розтягнений в $\frac{1}{k}$ раз вздовж осі Ox.

Виконуючи вказані зсуви та деформації графіка функції $y = f(x)$ у вказаному порядку один за одним, можна побудувати графік для більш складної функції

$$y = A \cdot f\left[k \cdot (x - a)\right] + b. \tag{1}$$

Приклад 1. (Задача 3.1) Побудувати графік функції $y = -3\sin(2x + 8)$ перетворенням графіка функції $y = \sin x$.

Розв'язання:

Перетворимо задану функцію: $y = -3\sin(2x + 8) = -3\sin 2 \cdot (x + 4)$.

Порівнявши її з виразом (1), визначимо значення параметрів: $A = -3, k = 2, a = -4, b = 0$.

Побудуємо графік заданої функції, керуючись загальними вказівками:

1) збільшимо в 3 рази ординати точок графіка функції $y = \sin x$ за абсолютною величиною та змінимо їх знаки на протилежні – отримаємо графік функції $y = -3\sin x$;
2) зменшимо у 2 рази абсциси точок графіка функції $y = -3\sin x$ – отримаємо графік функції $y = -3\sin 2x$;
3) перенесемо точки графіка функції $y = -3\sin 2x$ вздовж осі абсцис на 4 одиниці масштабу цієї осі вліво – отримаємо шуканий графік функції $y = -3\sin 2(x+4)$.

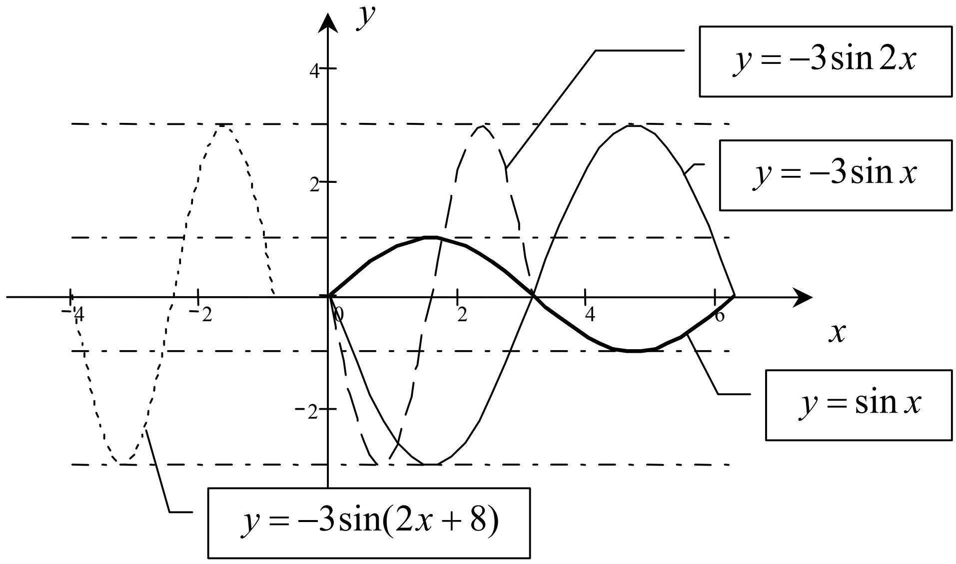


Рис. 1

Границя функції

Література: [5] – с. 267-343, [6] – с. 66-109, [7] – с. 149-190, [8] – с. 142-149.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому X – околі точки x_0, окрім, можливо, самої точки x_0.

Число A називається границею функції в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Умовно записують $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, якщо $|f(x)| > M$ при $0 < |x - a| < \delta$, де M – довільне додатне число. У цьому випадку функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$.

Теореми про границі функцій.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі при $x \to x_0$, тоді мають місце такі співвідношення:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x), \ (c = const);$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n, \ (n \in N);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0;$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}; \qquad \lim_{x \to x_0} C = C, \ (C = const);$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) > 0.$$

При знаходженні границі функції виконуються такі правила $(c = const)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{c}{x} = \infty; \ \lim_{x \to \infty} \frac{x}{c} = \infty; \ \lim_{x \to \infty} cx = \infty; \ \lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0; \ \lim_{x \to +\infty} c^x = \begin{cases} 0, \ 0 < c < 1; \\ +\infty, \ c > 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, \ 0 < c < 1; \\ 0, \ c > 1; \end{cases} \quad \lim_{x \to x_0} (\log_c f(x)) = \log_c (\lim_{x \to x_0} f(x)), \ (c > 1);$$

$$\lim_{x \to 0} \log_c x = -\infty, \ (c > 1); \quad \lim_{x \to +\infty} \log_c x = +\infty, \ (c > 1).$$

Важливі границі.

Для обчислення границі в багатьох випадках використовують:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – перша важлива границя;

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \ \lim\limits_{y \to \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$ – друга важлива границя.

Порівняння нескінченно малих функцій.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями одного порядку. Якщо $c=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – еквівалентні (позначають $\alpha(x)\sim\beta(x)$).

При знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) можна замінити іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій.

Таблиця еквівалентних функцій при $x\to 0$:

$x\sim\sin x\sim tg\, x\sim\arcsin x\sim arctg\, x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$; $a^x-1\sim x\ln a$;

$\log_a(1+x)\sim x\log_a e$; $(1+x)^k-1\sim kx, (k>0)$.

Приклад 2. (Задача 3.2(а)) Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-7x+1}{3x^2+5}$.

Розв'язання:

При $x\to\infty$ чисельник і знаменник є нескінченно великими функціями (невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$). Поділимо чисельник і знаменник на старший степінь x в чисельнику і знаменнику (x^2).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-7x+1}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{5}{x^2})}=$$

$$=6/3=2.$$

Приклад 3. (Задача 3.2(б)) Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Розв'язання:

При $x\to 0$ маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Для уникнення невизначеності перетворимо функцію:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}=\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x})^3-1^3}=$$

$$=\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{1+x-1}=\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x}.$$

Оскільки в означенні границі $x\neq x_0$, тобто в даній задачі $x\neq 0$, то під знаком границі маємо право скоротити на x. Отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)=$$

$$=1+1+1=3.$$

П р и к л а д 4 . (Задача 3.2(в)) Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{\sin 8x-\sin 4x}$.

Розв'язання:

Використаємо таблицю еквівалентних функцій: при $x\to 0$ $\sin x\sim x$, $\sin 2x\sim 2x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin 8x-\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\cos 6x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 6x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

П р и к л а д 5 . (Задача 3.2(г)) Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-4}\right)^{x}$.

Розв'язання:

При $x\to\infty$ маємо невизначеність 1^{∞}. При знаходженні границі будемо використовувати другу важливу границю. Для цього перетворимо функцію

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-4}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+8}{x-4}-1\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-4}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{12}\cdot\frac{12}{x-4}x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{12}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x-4}}=e^{12}.$$

Диференціальне числення функції однієї змінної

Література: [5] – с. 358-423, [6] – с. 111-163, [7] – с. 191-245, [8] – с. 151.

Похідна функції в точці. Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Функція, яка має скінченну похідну в точці x, називається диференційовною в цій точці.

Основні правила диференціювання.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в точці x, тоді в цій точці мають місце такі співвідношення:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
2) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}$, $v(x)\neq 0$.

При розв’язанні задач на обчислення похідної застосовують ряд формул для *<u>похідних основних елементарних функцій</u>*:

1) $c'=0,\ c=const$;
2) $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, ($\alpha$ – довільне число);
3) $(a^{x})'=a^{x}\ln a$, ($a>0,\ a\neq 1$);
4) $(e^{x})'=e^{x}$;
5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ (x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$;
6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;
7) $(\sin x)'=\cos x$;
8) $(\cos x)'=-\sin x$;
9) $(\mathrm{tg}\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ (x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z)$;
10) $(\mathrm{ctg}\, x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x},\ (x\neq \pi n,\ n\in Z)$;
11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x|<1)$;
12) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x|<1)$
13) $(\mathrm{arctg}\, x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
14) $(\mathrm{arcctg}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;
15) $(\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{ch}\, x$;
16) $(\mathrm{ch}\, x)'=\mathrm{sh}\, x$;
17) $(\mathrm{th}\, x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;
18) $(\mathrm{cth}\, x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x},\ (x\neq 0)$.

<u>Похідна складеної функції.</u> Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну u_x' в точці x, а функція $y=f(u)$ має похідну y_u' у відповідній точці u, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ має похідну y_x' в точці x і справедливою є формула

$$y_x'=y_u'\cdot u_x'.$$

<u>Похідна функції, заданої параметрично.</u> Похідна функції, яка задана

параметрично рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ диференційовні в точці t, причому $\frac{dx}{dt} \neq 0$, обчислюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

<u>Диференціювання неявної функції.</u> Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Будемо вважати дану функцію диференційовною.

Продиференціювавши обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, отримаємо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції для всіх значень x і y, при яких множник y' в рівнянні не перетворюється в нуль.

<u>Диференціювання показниково-степеневої функції.</u>

Похідну показниково-степеневої функції знаходять, провівши попереднє логарифмування.

$y = u^v$ – показниково-степенева функція,

де u і v – задані і диференційовні функції від x. Маємо

$$\ln y = v \ln u,\quad (\ln y)' = (v \ln u)',\quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u};\quad y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

П р и к л а д 6. (Задача 3.3) Знайти похідну функції $y = e^{2x}\sin x$.

Розв'язання:

$$y' = (e^{2x}\sin x)' = (e^{2x})'\sin x + e^{2x}(\sin x)' = e^{2x}(2x)'\sin x + e^{2x}\cos x =$$
$$= 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x = e^{2x}(2\sin x + \cos x).$$

П р и к л а д 7. (Задача 3.3) Знайти похідну функції $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання:

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 8. (Задача 3.3) Знайти похідну функції, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$$

Розв'язання:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'}$. Знайдемо y_t' і x_t'.

$$y_t' = \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)' = (\cos^{-2} t)' = -2\cos^{-3} t \cdot (\cos t)' = -2\cos^{-3} t \cdot (-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

$$x_t' = (\ln(ctg\ t))' = \frac{1}{\operatorname{ctg} t} \cdot (\operatorname{ctg} t)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg} t \cdot \sin^2 t} = -\frac{1}{\cos t \cdot \sin t},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{2\sin t \cdot \cos t \cdot \sin t}{\cos^3 t \cdot (-1)} = -2\operatorname{tg}^2 t.$$

Приклад 9. (Задача 3.3) Знайти похідну показниково-степеневої функції

$$y = (\ln x)^{e^x}.$$

Розв'язання:

$$y = (\ln x)^{e^x}, \ \ln y = e^x \ln(\ln x), \ \frac{y'}{y} = (e^x)' \ln(\ln x) + e^x (\ln(\ln x))',$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln(\ln x) + e^x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}, \ y' = y \cdot e^x (\ln(\ln x) + \frac{1}{x \ln x}),$$

$$y' = (\ln x)^{e^x} \cdot e^x (\ln(\ln x) + \frac{1}{x \ln x}).$$

Приклад 10. (Задача 3.3) Знайти похідну функції, яку задано неявно

$$y^2 + 2xy + 4 = 0.$$

Розв'язання:

$$(y^2 + 2xy + 4)' = (0)', \ 2yy' + (2x)'y + 2xy' + (4)' = 0, \ 2yy' + 2y + 2xy' = 0,$$

$$y'(2y + 2x) + 2y = 0, \ y' = -\frac{2y}{2y + 2x}, \ y' = -\frac{2y}{2(y + x)} = -\frac{y}{y + x}.$$

<u>Похідні вищих порядків.</u> Похідною другого порядку (другою похідною) функції $y = f(x)$ називається похідна від її похідної. Друга похідна позначається так: y'' або $\frac{d^2 y}{dx^2}$, або $f''(x)$. Аналогічно похідною третього порядку функції $y = f(x)$ є похідна від похідної другого порядку: $y''' = (y'')'$.

Взагалі, похідною n-го порядку від функції $y = f(x)$ називається похідна від похідної $(n-1)$-го порядку: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Позначають n-у похідну так: $y^{(n)}$ або $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, або $f^{(n)}(x)$. Якщо функція задана параметрично: $x = x(t),\ y = y(t)$, то y_{xx}'' обчислюється за формулою: $y_{xx}'' = \dfrac{(y_x')_t'}{x_t'}$.

Приклад 11. (Задача 3.3) Знайти y_x' і y_{xx}'', якщо функція задана параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t} = -\operatorname{tg} t,$$

$$y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'} = \frac{(-\operatorname{tg} t)_t'}{(a\cos^3 t)_t'} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}.$$

Диференціал.

Якщо задано диференційовну функцію $y = f(x)$, то її приріст

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \ (1)$$

де $\alpha(\Delta x)\to 0$, коли $\Delta x \to 0$. При $\Delta x \to 0$ величина $\alpha(\Delta x)\Delta x$ є величиною нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx. Перший доданок у формулі (1) $f'(x)\Delta x$ є головною частиною приросту функції в точці x. Цей доданок і називається диференціалом функції.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається добуток похідної даної функції на приріст незалежної змінної. Диференціал функції позначається символом $dy = f'(x)\Delta x$.

Диференціалом незалежної змінної називається її приріст: $dx = \Delta x$.

Тому $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

Геометрично (рис. 2) диференціал функції $y = f(x)$ являє собою приріст ординати дотичної до графіка функції в точці $M(x; y)$.

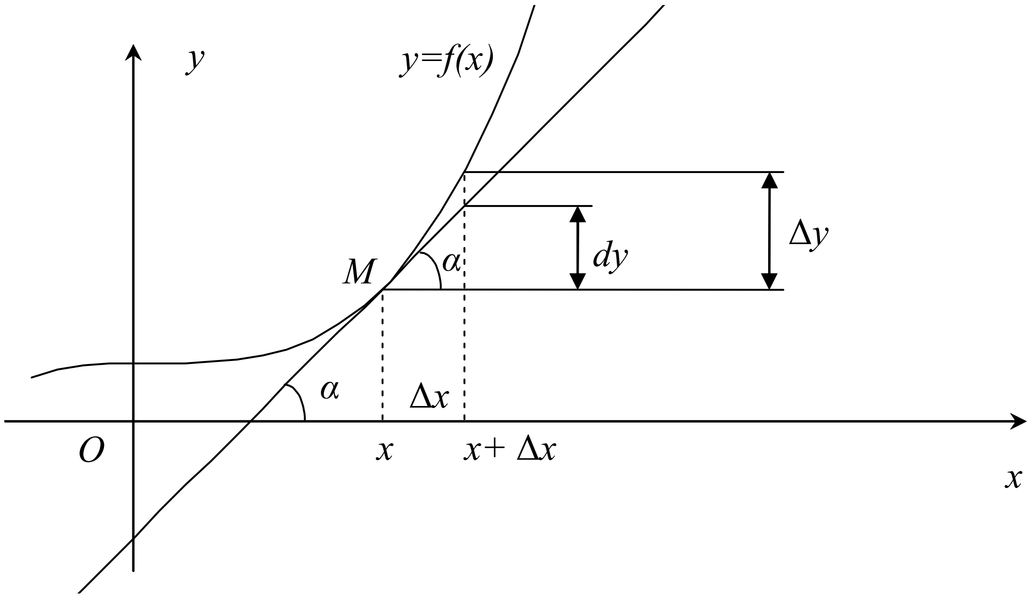


Рис. 2

Основні властивості диференціала:

1) $dC = 0,\ C = const$;
2) $d(C \cdot u) = C \cdot du$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(u \cdot v) = udv + vdu$;
5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$;
6) $df(u) = f'(u)du$.

Застосування диференціала для наближених обчислень. Якщо приріст Δx аргументу малий за абсолютною величиною, то $\Delta y \approx dy$, тому

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Диференціалом другого порядку функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку: $d^2 y = d(dy)$.

Аналогічно $d^3 y = d(d^2 y), \ldots, d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Якщо $y = f(x)$ і x – незалежна змінна, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2, d^3 y = f'''(x)(dx)^3, \ldots, d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Приклад 12. Знайти диференціал функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Розв'язання:

$$dy = (arctg\ x)' \cdot dx = \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

П р и к л а д 1 3 . Знайти диференціали першого і другого порядків функції $y = e^{2x}$.

Розв'язання:

$dy = (e^{2x})' \cdot dx = 2e^{2x}dx;\ d^2y = d(dy) = d(2e^{2x}dx) = 2 \cdot 2e^{2x}dx^2 = 4e^{2x}dx^2$.

П р и к л а д 1 4 . (Задача 3.4) Обчислити наближено за допомогою диференціала $\sqrt[3]{27{,}54}$.

Розв'язання:

Покладемо $y = \sqrt[3]{x},\ x = 27{,}54,\ x = x_0 + \Delta x = 27 + 0{,}54,\ x_0 = 27,\ \Delta x = 0{,}54$. Застосуємо формулу $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\ y'(27) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27},\ y(27) = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$y(27{,}54) \approx 3 + \frac{1}{27}0{,}54 = 3{,}02.$$

Застосування диференціального числення для дослідження функцій

Література: [5] – с. 449-481, [6] – с. 165-210, [7] – с. 246-266, [8] – с. 167-183.

Монотонність функції. Якщо $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ всюди, крім, можливо, скінченого числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ *зростає* (*спадає*) на $(a;b)$.

Інтервали монотонності функції (інтервали спадання чи зростання) відділяються один від одного точками, де похідна функції рівна нулю або не існує. Дані точки називаються критичними точками.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $y = f(x)$, необхідно: 1) знайти область визначення функції; 2) знайти похідну даної функції; 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і в кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Локальний екстремум. Достатні умови екстремуму:

Правило 1. Якщо x_0 – критична точка функції $y = f(x)$ і при довільному малому $\delta > 0$ виконуються нерівності $f'(x_0 - \delta) > 0,\ f'(x_0 + \delta) < 0$, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 має максимум; якщо ж $f'(x_0 - \delta) < 0,\ f'(x_0 + \delta) > 0$, то $y = f(x)$ в точці x_0 має мінімум; якщо ж знаки $f'(x_0 - \delta)$ і $f'(x_0 + \delta)$ однакові, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.

Правило 2. Якщо $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0,$ то функція $y=f(x)$ в точці має екстремум, а саме максимум, якщо $f''(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$.

Для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необхідно із значень функції на кінцях відрізка і в критичних точках, які належать даному відрізку, вибрати найбільше (найменше).

Приклад 15. (Задача 3.5) Знайти найбільше і найменше значення функції $y=3x-x^3$ на відрізку $[-2;3]$.

Розв'язання:

Знайдемо похідну: $y'=3-3x^2$.

Знайдемо критичні точки, розв'язавши рівняння $y'=0,\ 3-3x^2=0,\ x=\pm 1$ – стаціонарні точки, які належать вказаному відрізку $[-2;3]$.

Визначимо значення функції в стаціонарних точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1)=-3+1=-2,\ f(1)=3-1=2,\ f(-2)=-6+8=2,\ f(3)=9-27=-18.$$

Із знайдених значень вибираємо найбільше і найменше: $\max f(x)=2$ на $[-2;3]$, $\min f(x)=-18$ на $[-2;3]$.

Опуклість. Увігнутість. Точки перегину. Графік функції $y=f(x)$ називається опуклим (увігнутим) на інтервалі $(a;b)$, якщо він розташований нижче (вище) дотичної, проведеної в довільній точці графіка над даним інтервалом.

Достатні умови опуклості (увігнутості) графіка функції: Якщо $f''(x_0)<0$ на інтервалі $(a;b)$, то графік функції опуклий на вказаному інтервалі; якщо $f''(x_0)>0$, то графік функції увігнутий на інтервалі $(a;b)$.

Точка $(x_0;f(x_0))$ графіка функції, яка відділяє його опуклу частину від увігнутої називається *точкою перегину*. В абсцисах точок перегину друга похідна функції дорівнює нулю або не існує ($f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ – не існує). Точки, в яких $f''(x_0)=0$ або не існує, називають критичними точками другого роду.

Якщо x_0 – критична точка другого роду і при довільному достатньо малому $\delta>0$ виконуються нерівності $f''(x_0-\delta)<0,\ f''(x_0+\delta)>0$ або $f''(x_0-\delta)>0,\ f''(x_0+\delta)<0$, то точка кривої $y=f(x)$ з абсцисою x_0 є точкою перегину.

П р и к л а д 1 6. Знайти проміжки опуклості та ввігнутості графіка функції $y = x^5 + 5x + 6$.

Розв'язання:

Знайдемо y'': $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$. $x = 0$ – критична точка другого роду. Якщо $x < 0$, то $f'' < 0$ – крива опукла. Якщо $x > 0$, то $f'' > 0$ – крива ввігнута. Отже, на проміжку $(-\infty; 0]$ – крива випукла, а на $[0; +\infty)$ – ввігнута.

<u>*Асимптоти*</u>. Пряма L називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки $M(x; y)$ кривої до прямої L прямує до нуля при необмеженому віддаленні даної точки по кривій від початку координат.

Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існують границі:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx),$$

або

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

<u>Схема дослідження функції та побудова графіка.</u>

1. Знайти область визначення функції, інтервали неперервності, точки розриву.
2. Знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями.
3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції у цих точках.
5. Знайти інтервали опуклості, ввігнутості та перегину.
6. Дослідження функції на межі області існування. Асимптоти графіка.
7. Побудувати графік функції, враховуючи дослідження.

П р и к л а д 17. (Задача 3.6) Дослідити методами диференціального числення функцію

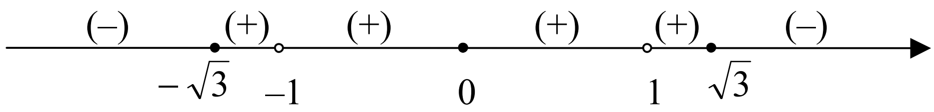
$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

та побудувати її графік

Розв'язання:

1. Область визначення: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Точки розриву $x = 1,\ x = -1$.
2. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0; 0)$.
3. Функція не періодична. Оскільки $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1 - (-x)^2} = -f(x)$, то функція непарна, а отже графік функції симетричний відносно початку координат.
4. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2} = 0$. Розв'язком даного рівняння є $x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$.

   Похідна не існує в $x = \pm 1$. Знайдемо знаки y' на проміжках:



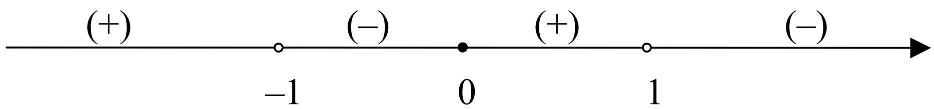
Отже, на $(-\infty; -\sqrt{3}]$ – функція спадає,

на $[-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0] \cup [0; 1) \cup (1; \sqrt{3}]$ – функція зростає,

на $[\sqrt{3}; +\infty)$ – функція спадає.

У точках $x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$ функція має локальний екстремум: $x = \sqrt{3},\ y(\sqrt{3}) = -2{,}6$ – локальний максимум, $x = -\sqrt{3},\ y(-\sqrt{3}) = 2{,}6$ – локальний мінімум.

5. Знаходимо y'': $y'' = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$. Похідна $y'' = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$. Знайдемо знаки y'' на проміжках:



Отже, на $(-\infty; -1) \cup [0; 1)$ – крива ввігнута, на $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ – крива опукла.

6. $x = 1,\ x = -1$ – вертикальні асимптоти кривої. Знайдемо похилу асимптоту кривої $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(1-x^2)x}=-1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-1)x\right)=0,\quad y=-x\ \text{– похила}$$

асимптота.

7. Враховуючи проведені дослідження будуємо графік функції.

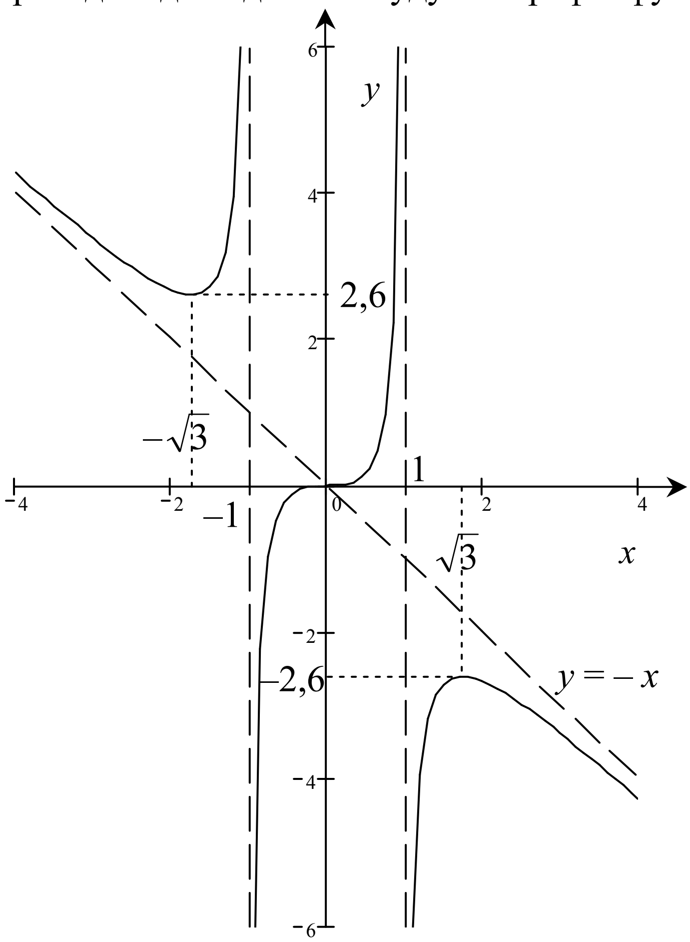


Рис. 3

Задачі контрольної роботи № 3

Задача 3.1. Побудувати графік функції $y=A\sin(ax+b)$ перетворенням графіка функції $y=\sin x$:

1. $y=\frac{2}{3}\sin(2x+3)$. 2. $y=\frac{5}{6}\sin(\frac{2}{3}x+1)$. 3. $y=-\frac{5}{6}\sin(x+1)$.

4. $y=3\sin(4x-2)$. 5. $y=-\sin(\frac{x}{2}-1)$.

Побудувати графік функції $y=A\cos(ax+b)$ перетворенням графіка функції $y=\cos x$:

6. $y=2\cos\left(\frac{2}{3}x-1\right)$. 7. $y=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)$. 8. $y=-2\cos(3x+1)$.

9. $y=-2\cos(x+1)$. 10. $y=-3\cos(3x+2)$.

Задача 3.2. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^2+1}{5x^5-x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{4+x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+5x-4x^3}{5x^3+x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-3x-28}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x-5}{5x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}{2x^2+5x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} 5x\cdot\operatorname{ctg}3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7x^2}{5x^3-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{11}-11x^5-5}{5-x-6x^{11}}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+9}{3+x^7+5x^9}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+5)[\ln(x+3)-\ln x]$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{5x^2+3x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x+3x^7}{4x^8-x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{7x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{arctg}2x}{2\sin3\text{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+2}\right)^{3x-6}$.

Задача 3.3. Знайти перші похідні даних функцій. Для б) і д) знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1. а) $y=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2}$; б) $y=\ln\sin^2(2x+5)$;

в) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$; г) $y=ctg(xy)$;

д) $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

2. а) $y=(e^{\cos x}+3)^2$; б) $y=\text{arctg}\sqrt{\dfrac{3\text{-}x}{x\text{-}2}}$;

в) $y=(\cos x)^{x^2}$; г) $3y=\sin(x-y)$;

д) $\begin{cases} x=3\cos^2 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

3. а) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y=\ln\cos x+\dfrac{1}{2}\text{tg}^2\sqrt{x}$;

в) $y=(\sqrt{x})^{\ln 2x}$; г) $x^3+y^3-3axy=0$;

д) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=e^{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$, $t\in[-1;1]$.

4. а) $y=(x^2+4)\text{arctg}\dfrac{x}{2}$; в) $y=3^{\cos x^2}+\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$;

в) $y=(x+x^2)^{\ln x}$; г) $y^2x=e^{\frac{y}{x}}$;

д) $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$

5. а) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

б) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+e^{2x^2}$;

в) $y=(\operatorname{tg}\sqrt{x})^{2x}$;

г) $y^2=x\sin y$;

д) $\begin{cases} x=a\sin 2t, \\ y=b\cos 2t, \end{cases}$ $t\in(0;\infty)$.

6. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$;

б) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{x}+\ln\cos x$;

в) $y=(\arcsin x)^{\frac{x}{2}}$;

г) $x-y+e^y\operatorname{arcctg} x=0$;

д) $\begin{cases} x=\sin^2(1-4t), \\ y=\cos^2(1-4t). \end{cases}$

7. а) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}+\dfrac{5}{x^2}$;

б) $y=4\sqrt{x^2-4}-\left(\arcsin\dfrac{2}{x}\right)^2$;

в) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$;

г) $y=\sin x=\cos(x-y)$;

д) $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=(2+e^{-t})^3. \end{cases}$

8. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)$;

б) $y=2^{ctg^2\frac{4}{x}}\cdot(x^2+\dfrac{1}{x^2})$;

в) $y=x^{x^x}$;

г) $\sqrt{y}+e^{x\sqrt{y}}-5=0$;

д) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=1/\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$

9. а) $y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^3+\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$;

б) $y=\dfrac{2}{\operatorname{ctg} x-1}+\ln\operatorname{tg} x$;

в) $y=(\sin 2x)^{\sqrt{x}}$;

г) $x-y=e^{x+y}$;

д) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}(1+t)^2, \\ y=\sqrt{t^2+2t+2}. \end{cases}$

10. а) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$;

б) $y=\ln^2\sqrt{x}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}$;

в) $y=(x^3+1)^{\operatorname{ctg} 2x}$;

г) $y=\arcsin\sqrt{xy}+2$;

д) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$ $t\in(0;\pi)$.

Задача 3.4. Обчислити наближено за допомогою диференціалу.

1. $y = \arcsin 0{,}08$.
2. $y = \sqrt[3]{27{,}34}$.
3. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1{,}012$.
4. $y = \sqrt{4x - 1}, \quad x = 2{,}56$.
5. $y = (0{,}998)^{21}$.
6. $y = \sqrt[5]{(1{,}03)^2}$.
7. $y = \sqrt{(1{,}97)^2 + 5}$.
8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x = 1{,}58$.
9. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0{,}01$.
10. $y = \sqrt[3]{x^3 + 2x + 5}, \quad x = 0{,}97$.

Задача 3.5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

1. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16, \quad a = 1, b = 4$.
2. $f(x) = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}, a = -1, b = 2$.
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, \ a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}$.
4. $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x + 2, \ a = 1, b = 5$.
5. $f(x) = x - \sin x, \quad a = -\pi, b = \pi$.
6. $f(x) = \dfrac{10x}{1+x^2}, \quad a = 0, b = 3$.
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x, \quad a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}$.
8. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 15, a = -2, b = -\dfrac{1}{2}$.
9. $f(x) = x - \ln(1+x), \ a = -\dfrac{1}{2}, b = 1$.
10. $f(x) = 81x - x^4, \quad a = -1, b = 4$.

Задача 3.6. Дослідити методами диференційного числення функцію $y = f(x)$ та побудувати її графік.

1. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.
2. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
3. $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$.
4. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.
5. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.
6. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$.
7. $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$.
8. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.
9. $y = -\dfrac{8x}{x^2 + 4}$.
10. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

§4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Невизначений інтеграл

Література: [6] – с. 240-270, [7] – с. 321-361, [5] – с. 575-716, [8] – с. 208-242.

<u>Первісна функції.</u> Функція $F(x)$ називається первісною функції $y = f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і $F'(x) = f(x),\ x \in (a;b)$.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $(a;b)$ і C – довільна стала, то вираз $F(x)+C$ називається *<u>невизначеним інтегралом</u>* функції $y = f(x)$ на цьому проміжку і позначають символом $\int f(x)dx,\ f(x)$ називають підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

$\int f(x)dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x),\ x \in (a;b)$.

<u>Властивості невизначеного інтеграла:</u>

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.
2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.
3. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx$.
4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

<u>Таблиця інтегралів.</u>

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$
4. $\int e^u du = e^u + C.$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
6. $\int \cos u du = \sin u + C.$
7. $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C.$
8. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C.$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C.$
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C.$
11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\dfrac{u}{2}\right| + C.$
12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2}\right)\right| + C.$
13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm A}\right| + C.$

16. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$

17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$

18. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

19. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$

20. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$

21. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

22. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

<u>Метод безпосереднього інтегрування.</u> Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням.

П р и к л а д 1. (Задача 4.1(а)) Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{(x+\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання:

$$\int \frac{(x+\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) + \int \arcsin x d(\arcsin x) = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C =$$

$$= \frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

<u>Заміна змінної.</u> Суть даного методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій <u>теоремі:</u>

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, тобто $\int f(x)dx = F(x) + C,\ x \in (a;b)$, і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. Тоді справедливою є формула:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

П р и к л а д 2. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+5}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+5}dx = \left| \begin{matrix} 2x+1=t^2, \; x=\dfrac{t^2-1}{2}, \\ dx = tdt, \; t=\sqrt{2x+1} \end{matrix} \right| = \int \frac{tdt}{t+5} = \int \frac{(t+5)-5}{t+5}dt = \int \left(1-\frac{5}{t+5}\right)dt =$$

$$= \int dt - 5\int \frac{dt}{t+5} = t - 5\int \frac{d(t+5)}{t+5} = t - \ln|t+5| + C = \sqrt{2x+1} - 5\ln\left|\sqrt{2x+1}+5\right| + C.$$

<u>Інтегрування частинами.</u> Справедлива формула $\int udv = uv - \int vdu$, $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на деякому проміжку функції. Дана формула дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$. Для цього необхідно провести розбиття підінтегрального виразу udv на u і dv так, щоб отриманий $\int vdu$ був простіший вихідного. Вкажемо для деяких типів інтегралів зручне розбиття підінтегрального виразу.

I. $\left.\begin{matrix} \int P(x)\sin kxdx \\ \int P(x)\cos kxdx \\ \int P(x)e^{kx}dx \end{matrix}\right] \Rightarrow u = P(x), \; dv = \left[\begin{matrix} \sin kxdx \\ \cos kxdx \\ e^{kx}dx \end{matrix}\right.$, $P(x)$ – многочлен, k – дійсне число.

II. $\left.\begin{matrix} \int P(x)\ln xdx \\ \int P(x)\arcsin xdx \\ \int P(x)\arccos xdx \\ \int P(x)\,\mathrm{arctg}\, xdx \\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\, xdx \end{matrix}\right] \Rightarrow u = \left[\begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \mathrm{arctg}\, x \\ \mathrm{arcctg}\, x \end{matrix}\right.$, $dv = P(x)dx$, , $P(x)$ – многочлен.

П р и к л а д 3. Знайти невизначений інтеграл $\int (x+1)e^x dx$.

Розв'язання:

$$\int (x+1)e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x+1, \; du = dx, \\ dv = e^x dx, \; v = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x+1) - \int e^x dx = e^x(x+1) - e^x + C =$$

$$= xe^x + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання:

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx, \\ dv = x^3 dx,\ v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

<u>Інтегрування найпростіших дробів.</u> Раціональним дробом називається вираз $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени. Раціональний дріб називається <u>*правильним*</u>, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший степеня многочлена $Q(x)$. У противному випадку дріб називається <u>*неправильним*</u>.

<u>*Найпростіші (елементарні) дроби:*</u>

1) $\frac{A}{x-a}$;
2) $\frac{A}{(x-a)^m}$, де $m \in Z,\ m > 1$;
3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де $\frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів;
4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, де $n \in Z,\ n > 1$, x^2+px+q не має дійсних коренів.

Інтеграли від елементарних дробів 1-2 типу:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;
2) $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = -\frac{A}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$;
3) Щоб обчислити інтеграл 3-го типу необхідно:
   а) виділити в чисельнику похідну знаменника;
   б) розбити інтеграл на два;
   в) у другому інтегралі виділити у знаменнику повний квадрат.
4) Інтегрування дробів 4-го типу див. [7] стор. 353, 341-342.

П р и к л а д 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+10}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}dx = \left|(x^2+4x+9)' = 2x+4\right| = \int \frac{2x+4-1}{x^2+4x+9}dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+9}dx -$$

$$-\int \frac{1}{x^2+4x+9}dx = \int \frac{d(x^2+4x+9)}{x^2+4x+9} - \int \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \ln\left|x^2+4x+9\right| -$$

$$-\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2} = \ln\left|x^2+4x+9\right| - \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Інтегрування раціональних дробів за допомогою розкладу на елементарні дроби.

Перед інтегруванням раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ необхідно зробити такі алгебраїчні перетворення та обчислення:

1) якщо задано неправильний дріб, то виділити з нього цілу частину, тобто подати його у вигляді $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, де $M(x)$ – многочлен, $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб;
2) розкласти знаменник дробу на множники
$$Q(x) = (x-a)^m \ldots (x^2+px+q)^n \ldots,$$
де x^2+px+q має комплексні спряжені корені;
3) правильний раціональний дріб розкласти на суму елементарних дробів:
$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)} + \ldots;$$
4) знайти невизначені коефіцієнти
$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots,$$
для чого звести останню рівність до спільного знаменника, прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах отриманої тотожності і розв'язати систему лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. Можна визначити коефіцієнти іншим способом, надаючи в отриманій тотожності змінній x довільні числові значення. Часто корисно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

П р и к л а д 6. (Задача 4.2(б)) Знайти $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Розв'язання:

Розкладемо на множники знаменник:

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тоді

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2x(x-1)(x^2+x+1) + A_3x^2(x^2+x+1) + (Bx+C)x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}.$$

При рівняємо чисельники дробів:

$$1 = A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2x(x-1)(x^2+x+1) + A_3x^2(x^2+x+1) + (Bx+C)x^2(x-1).$$

При $x = 0$ будемо мати $1 = -A_1 \Rightarrow A_1 = -1$. При $x = 1$ будемо мати $1 = 3A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{3}$. Запишемо попередню рівність у вигляді

$$1 = A_1(x^3 - 1) + A_2(x^4 - x) + A_3(x^4 + x^3 + x^2) + Bx^4 + Cx^3 - Bx^3 - Cx^2.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^4, x^3, x^2:

$$x^4 : A_2 + A_3 + B = 0,$$

$$x^3 : A_1 + A_3 + C - B = 0,$$

$$x^2 : A_3 - C = 0.$$

Отримали систему лінійних рівнянь, із якої знайдемо невідомі A_2, B, C.

$$\begin{cases} A_2 + A_3 + B = 0, \\ A_1 + A_3 + C - B = 0, \\ A_3 - C = 0. \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} C = A_3 \Rightarrow C = \frac{1}{3}, \\ B = A_1 + A_3 + C = -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \\ A_2 = -B - A_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0. \end{array} \right.$$

Тоді $\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$, а отже

$$\int \frac{1}{x^5 - x^2}dx = -\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Інтегрування ірраціональних функцій .

І. Інтеграли виду $\int R\left(x^{\frac{n_1}{s_1}}, x^{\frac{n_2}{s_2}}, x^{\frac{n_3}{s_3}}, x^{\frac{n_4}{s_4}}, \ldots\right)dx$, де $n_i, s_i\ (i=1,2,\ldots)$ – цілі числа, обчислюються за допомогою підстановки $x=t^k$, де $k=HCK(s_1, s_2, s_3,\ldots)$ – найменше спільне кратне чисел $s_1, s_2, s_3,\ldots$.

ІІ. Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_2}{s_2}}, \ldots\right)dx$, де $n_i, s_i\ (i=1,2,\ldots)$ – цілі числа, $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, обчислюються за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де $k=HCK(s_1, s_2,\ldots)$.

Якщо в інтегралі типу (ІІ) $c=0, d=1$, то він набуває виду $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{n_1}{s_1}}, (ax+b)^{\frac{n_2}{s_2}}, \ldots\right)dx$. Даний інтеграл обчислюється за допомогою підстановки $ax+b=t^k$, де $k=HCK(s_1, s_2,\ldots)$.

ІІІ. Інтеграли, які містять ірраціональний вираз $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Щоб обчислити даний інтеграл необхідно:

1) винести за знак інтеграла $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$;

2) виділити повний квадрат у підкореневому виразі.

Тоді даний інтеграл зведеться до табличного $\int\frac{dx}{\sqrt{u^2\pm A}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm A}\right|+C$, якщо $a>0$, або $\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{A}+C$, якщо $a<0, b^2-4ac>0$.

б) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Щоб обчислити даний інтеграл необхідно:

1) виділити похідну підкореневого виразу у чисельнику;
2) розбити інтеграл на два;
3) перший інтеграл обчислити за правилом інтегрування степеневої функції, другий як інтеграл типу а).

IV. Інтеграли виду

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx,\quad \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx,\quad \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$$

зводяться до інтегралів від раціональних функцій відносно $\sin t$ чи $\cos t$ за допомогою підстановок:

а) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx \ \to\ x=a\sin t\ (x=a\cos t)$;

б) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx \ \to\ x=\frac{a}{\sin t}\ (x=\frac{a}{\cos t})$;

в) $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx \ \to\ x=a\,\mathrm{tg}\,t\ (x=a\,\mathrm{ctg}\,t)$.

П р и к л а д 7. (Задача 4.1) Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx.$$

Розв'язання:

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx=\int \frac{(10x+8)\cdot\frac{3}{10}-\frac{24}{10}-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx=\frac{3}{10}\int \frac{(10x+8)}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx-$$

$$-\frac{94}{10}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+8x+1}}=\frac{3}{10}\int \frac{d(5x^2+8x+1)}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx-\frac{94}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}}}=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-\frac{94}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{8}{10}\right)^2-\frac{64}{100}+\frac{1}{5}}}=\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-$$

$$-\frac{94}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{8}{10}\right)^2-\frac{22}{50}}}=\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-\frac{47}{5\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{8}{10}+\sqrt{x^2+\frac{8}{5}x+\frac{1}{5}}\right|+C.$$

П р и к л а д 8. (Задача 4.1) Знайти невизначений інтеграл $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язання:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \left|\begin{array}{l} x=2\sin t, \\ dx = 2\cos t dt \end{array}\right| = \int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt =$$

$$=8\int \sin^2 t\cdot 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 16\int \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int (\frac{1}{2}2\sin t\cos t)^2 dt =$$

$$=4\int \sin^2 2t dt = 4\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 2\int dt - 2\int \cos 4t dt = t-\frac{1}{2}\sin 4t + C =$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t, \\ \sin t = \frac{x}{2},\ t=\arcsin\frac{x}{2} \end{array}\right| = 2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin(4\arcsin\frac{x}{2})+C.$$

<u>Інтегрування тригонометричних функцій .</u>

Інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Проте в деяких випадках обчислення $\int R(\sin x,\cos x)dx$ може бути спрощеним використанням інших підстановок:

1) Якщо $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно $\sin x$ ($R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$), використовується підстановка $\cos x=t,\ dt=-\sin x dx$.
2) Якщо $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно $\cos x$ ($R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$), використовується підстановка $\sin x=t,\ dt=\cos x dx$.
3) Якщо $R(\sin x,\cos x)$ парна відносно і $\sin x$, і $\cos x$ ($R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$), використовується підстановка $tg\ x=t,\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Інтеграли типу $\int \sin^n x\cdot\cos^m x dx$, де n і m – парні додатні числа, обчислюються з допомогою перетворень підінтегральної функції за формулами:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

П р и к л а д 9. (Задача 4.1) Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{2-\sin x}{1+\cos x}dx$.

Розв'язання:

Підінтегральна функція $\frac{2-\sin x}{1+\cos x}$ не є ні непарною відносно $\sin x$, ні непарною відносно $\cos x$, ні парною відносно і $\sin x$, і $\cos x$. Тому будемо використовувати універсальну тригонометричну підстановку.

$$\int \frac{2-\sin x}{1+\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{1+t^2+1-t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2+1-t}{1+t^2}dt = 2\int dt - \int \frac{2t}{1+t^2}dt = 2t - \int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} =$$

$$= 2t - \ln\left|1+t^2\right| + C, \text{ де } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

П р и к л а д 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$.

Розв'язання:

Підінтегральна функція непарна по $\sin x$, тому використовуємо заміну $\cos x = t$.

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \\ dt = -\sin t\, dt \end{array} \right| = \int \cos^2 x \cdot (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int t^2(1-t^2)dt =$$

$$= -\int (t^2 - t^4)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

П р и к л а д 11. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}.$$

Розв'язання:

Підінтегральна функція парна відносно і $\sin x$, і $\cos x$, тому використовуємо підстановку $tg\ x = t$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} tg\ x = t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{dt}{(1+t^2)(\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2})}=\int \frac{dt}{t^2+2t-1}=\int \frac{dt}{(t+1)^2-2}=$$

$$=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\,x+1-\sqrt{2}}{tg\,x+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Визначений інтеграл

Література: [6] – с. 270-308, [7] – с. 365-408, [5] – с. 716-792, [8] – с. 243-266.

<u>*Інтегральна сума.*</u> Нехай на відрізку $[a;b]$, $(a<b)$ осі Ox задана неперервна функція $f(x)$. Утворимо розбиття відрізка $[a;b]$ довільними точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$. Довжину частинного відрізка $[x_{k-1};x_k]$ значимо $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. На кожному частинному відрізку виберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через ξ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ і знайдемо $f(\xi_k)$ – значення функції в даній точці та добуток $f(\xi_k)\Delta x_k$. Складемо суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, яка називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

<u>*Визначений інтеграл.*</u> Позначимо через λ довжину найбільшого із частинних відрізків $[x_{k-1};x_k]$, $(k=1,2,\ldots)$ даного розбиття $\lambda=\max\Delta x_k$.

Границя інтегральної суми $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ за умови, що $\lambda\to 0$, якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від того, яка точка ξ_k вибрана на кожному частинному відрізку, називається <u>*визначеним інтегралом*</u> функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, тобто

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Формула Ньютона-Лейбніца.</u> Має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

де функція $F(x)$ є довільна первісна для підінтегральної функції $f(x)$.

Основні властивості визначеного інтеграла.

1. $\int_a^b dx = b - a$.
2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
3. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx$.
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\alpha)d\alpha$ (змінну інтегрування можна позначати довільною буквою).
7. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Заміна змінної у визначному інтегралі. Часто для спрощення обчислення визначеного інтеграла доводиться заміняти незалежну змінну x, покладаючи, що $x = \varphi(t)$. Це приводить до формули перетворення визначеного інтеграла при введенні нової змінної

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt .$$

При цьому вважається, що:

1) $f(x)$ – неперервна на $[a; b]$;
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на $[\alpha; \beta]$;
3) $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$;
4) $x = \varphi(t)$ – монотонна на $[\alpha; \beta]$.

Інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu ,$$

де u і v функції від змінної x, які мають неперервні похідні на відрізку інтегрування.

П р и к л а д 1 2 . (Задача 4.3) Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2+4)^3}.$$

Розв'язання:

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2xdx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+4)^{-3} d(x^2+4) = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(x^2+4)^{-2}}{-2}\right|_0^2 =$$

$$= -\left.\frac{1}{4(x^2+4)^2}\right|_0^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{256}.$$

П р и к л а д 1 3 . (Задача 4.3 б)) Обчислити визначений інтеграл

$$\int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}.$$

Розв'язання:

$$\int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}} = \left|\begin{array}{l} x+6=t^2,\ \ x=t^2-6, \\ t=\sqrt{x+6},\ \ 3\le x\le 10, \\ dx=2tdt,\ \ 3\le t\le 4 \end{array}\right| = \int_3^4 \frac{2tdt}{(t^2-6-1)t} = 2\int_3^4 \frac{dt}{t^2-7} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right|\Bigg|_3^4 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\ln\left|\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}\right| - \ln\left|\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{(4-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{16+5\sqrt{7}}{9}.$$

П р и к л а д 1 4 . (Задача 4.3 в)) Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi} (1-8x)\cos 4xdx.$$

Розв'язання:

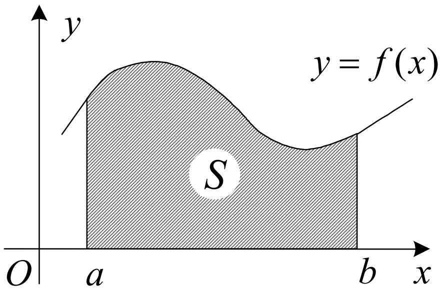
$$\int_0^{\pi} (1-8x)\cos 4xdx = \left|\begin{array}{l} u=1-8x,\ \ du=-8dx, \\ dv=\cos 4x,\ \ v=\frac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right| = \left.\frac{(1-8x)\sin 4x}{4}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin 4x(-8)}{4}dx =$$

$$= 0 + 2\int_0^{\pi}\sin 4xdx = 2\frac{1}{4}(-\cos 4x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Застосування визначеного інтеграла.

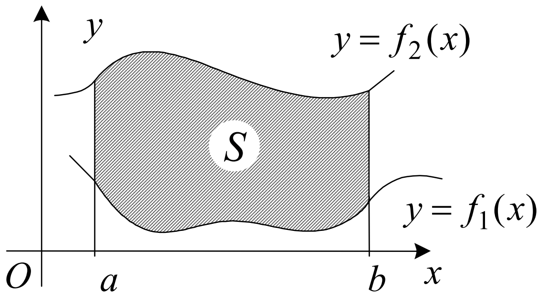
1. Площа плоскої фігури.

Площа криволінійної трапеції. Площу плоскої фігури, обмеженою неперервною кривою $f(x)$, віссю Ox і двома прямими $x=a,\ x=b\ (a<b)$, знаходять за формулою



$$S=\int_a^b f(x)dx \text{ або } S=\int_a^b ydx.$$

Якщо *фігура обмежена двома неперервними кривими*, рівняння яких $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, до того ж всюди на $[a;b]$ $f_2(x)\ge f_1(x)$, і двома прямими $x=a,\ x=b$, то площа визначається за формулою



$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Якщо плоска фігура, *обмежена кривою*, яка задана *в параметричній формі* рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t_1\le t\le t_2,$$

то площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

2. Довжина дуги плоскої кривої.

Якщо *крива задана явно в декартовій системі координат* $y=f(x)$, то довжина дуги

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

де a і b відповідно абсциси початку і кінця дуги.

Якщо <u>*крива задана параметрично*</u>

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2,$$

а $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ мають неперервні похідні, то довжина дуги

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Якщо <u>*крива задана*</u> рівнянням <u>*в полярних координатах*</u> $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

<u>3. Об'єм тіла.</u>

Якщо <u>*площа перерізу тіла*</u> площиною, перпендикулярною до осі Ox, може бути виражена як <u>*функція від*</u> x, тобто у вигляді $S = S(x)$ $(a \le x \le b)$, то об'єм частини тіла, обмеженої площинами $x = a,\ x = b$ знаходиться за формулою

$$V = \int_{a}^{b} S(x)dx.$$

<u>*Об'єм тіла обертання.*</u> Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $y = 0,\ x = a,\ x = b\ (a < b)$ обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx.$$

Якщо фігура обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a,\ x = b$, обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання

$$V_x = \pi \int_{a}^{b} ({y_2}^2 - {y_1}^2) dx.$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $x = \varphi(y)$, прямими $y = c,\ y = d,\ x = 0\ (c < d)$, обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

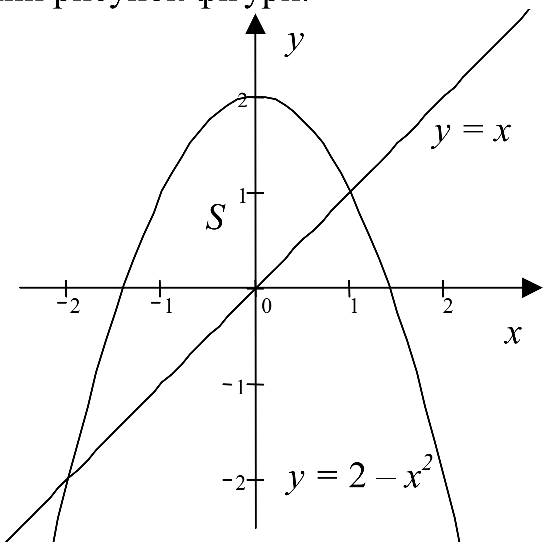
$$V_y = \pi \int_{c}^{d} x^2 dy.$$

П р и к л а д 1 5 . (Задача 4.5) Знайти площу фігури, обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x^2$.

Розв'язання:

Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування.

Зробимо схематичний рисунок фігури.

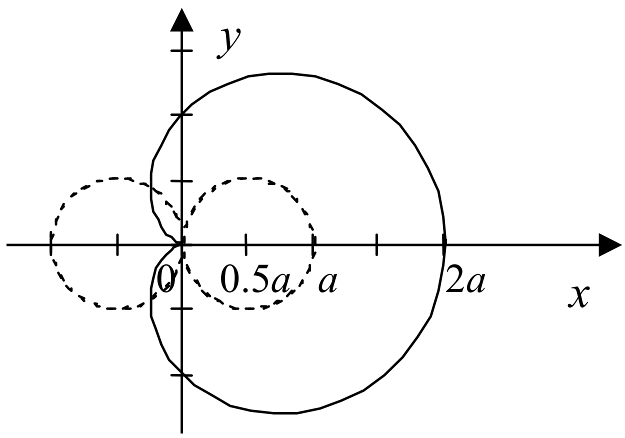


Тоді $S = \int\limits_{-2}^{1} ((2 - x^2) - x)dx = (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$ (кв. од.).

П р и к л а д 1 6 . (Задача 4.5) Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язання:

Зобразимо кардіоїду $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.



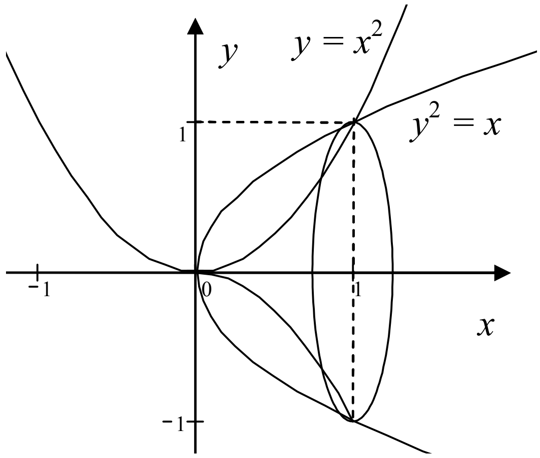
Змінюючи полярний кут від 0 до π, одержимо половину шуканої довжини. Тому маємо

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi}=8a.$$

П р и к л а д 17. (Задача 4.5) Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігур, які обмежені лініями: $y^2=x,\ y=x^2$.

Розв'язання:



$V_x=\pi\int_a^b({y_2}^2-{y_1}^2)dx$. У нашому випадку $a=0,\ b=1,\ y_2=\sqrt{x},\ y_1=x^2$,

тому $V_x=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$ (куб. од).

Невласний інтеграл

Література: [6] – с. 308-320, [7] – с. 385-394, [5] – с. 756-770, [8] – с. 247-251.

Невласними інтегралами називають: 1) інтеграли з нескінченними межами; 2) інтеграли від необмежених функцій.

Невласний інтеграл від $f(x)$ в межах від a до $+\infty$ визначається

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо дана границя існує, то невласний інтеграл називають *збіжним*, якщо границі не існує або вона рівна нескінченності, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

Аналогічно $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$.

Якщо $f(x)$ має нескінченний розрив в точці $C \in [a;b]$ і $f(x)$ неперервна на проміжках $[a;c)$ і $(c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Для дослідження збіжності невласних інтегралів часто використовують формулу Ньютона-Лейбніца, а саме:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

П р и к л а д 18. (Задача 4.4) Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1.$$

П р и к л а д 19. (Задача 4.4) Обчислити інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$.

Розв'язання:

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = [x = 2 \text{ – особлива точка}] = \lim_{\alpha\to 0} \int_0^{2-\alpha} \frac{dx}{2-x} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} (-\ln|2-x|)\Big|_0^{2-\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} (-\ln|2-2+\alpha| + \ln 2) = -\lim_{\alpha\to 0} (-\ln\alpha + \ln 2) = +\infty + \ln 2 = +\infty.$$

Задачі контрольної роботи № 4

Задача 4.1. Знайти невизначені інтеграли. В пп. а), б) результати перевірити диференціюванням.

1.

а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln x}-2}{x}dx$; в) $\int (4-3x)e^{-3x}dx$;

г) $\int \frac{2x+9}{x^2+6x+13}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+\mathrm{tg}x}$.

2.

а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int \frac{\arccos x+4}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \ln(x^2+4)dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; д) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

3.

а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}x}}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{6x-1}dx$;

г) $\int \frac{x+9}{x^2+2x+10}dx$; д) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

4.

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\mathrm{tg}x+1)}$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$; в) $\int (5x\text{-}2)e^{3x}dx$;

г) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

5.

а) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx$; б) $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \ln(4x^2+1)dx$;

г) $\int \frac{3-4x}{\sqrt{x^2-4x+20}}dx$; д) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

6.

а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; б) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$; в) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{3x-1}dx$;

г) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$; д) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

7.

а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}dx$; б) $\int \sin^5 xdx$; в) $\int (1-6x)e^{2x}dx$;

г) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+29}$; д) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

8.

а) $\int \cos^5 xdx$; б) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx$;

г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+29}}$; д) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{4x^2}dx$.

9.

а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\int \operatorname{ctg}(2x+1)dx$; в) $\int e^{-2x}(4x-3)dx$;

г) $\int \frac{4x+27}{x^2+8x+17}dx$; д) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

10.

а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int \frac{1-tgx}{\cos^2 x}dx$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$;

г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$; д) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$.

Задача 4.2. Знайти невизначений інтеграл.

1. а) $\int \frac{dx}{x(6x^2-7x-3)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; в) $\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx$.

2. а) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; в) $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

3. а) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; в) $\int \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\cdot\frac{x+3}{x-3}dx$.

4. а) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$; в) $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$.

5. а) $\int \frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$; в) $\int \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx$.

6. а) $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$; б) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$; в) $\int \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx$.

7. а) $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; в) $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}dx$.

8. а) $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$; б) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+x)}$: в) $\int \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx$.

9. а) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; б) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; в) $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}dx$.

10.а) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; б) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+4)}$ в) $\int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}dx$.

Задача 4.3. Обчислити визначений інтеграл.

1. а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$; в) $\int\limits_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2xdx$.

2. а) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; б) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int\limits_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\sin 3xdx$.

3. а) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; б) $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; в) $\int\limits_0^{\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2xdx$.

4. а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x-\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int\limits_0^3 \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} (x^2-3x+2)\sin xdx$.

5. а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$; б) $\int\limits_0^4 \frac{4x+3}{\sqrt{2x+1}+5}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} (8x^2+16x+17)\cos 4xdx$.

6.а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; б) $\int\limits_0^5 \frac{14x-5}{\sqrt{7x+1}+2}dx$; в) $\int\limits_0^3 (x^2-3x)\sin 3xdx$.

7. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\mathrm{arctgx})^4}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_3^7 \frac{10x-3}{\sqrt{5x+1}+3}dx$; в) $\int\limits_{-4}^{0} (x^2+7x+12)\cos xdx$.

8. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$; б) $\int\limits_2^6 \frac{4x+1}{\sqrt{2x-3}+7}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-5x+6)\sin 3xdx$.

9. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x\ln\cos xdx$; б) $\int\limits_1^5 \frac{2x-1}{\sqrt{3x+1}+4}dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} (1-8x^2)\cos 4xdx$.

10. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_0^6 \frac{6x+5}{\sqrt{2x+4}-7}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-5x^2)\sin xdx$.

Задача 4.4. Обчислити невласний інтеграл.

1. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$;
3. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$;
4. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;
5. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$;
6. $\int\limits_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$;
7. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$;
8. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$;
9. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;
10. $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Задача 4.5.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=3x^2+1$ і прямою $y=3x+7$.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ та віссю Ox.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho=3(1+\cos\varphi)$.
4. Обчислити площу фігури, обмеженої чотирьох пелюстковою розою $\rho=4\sin 2\varphi$.
5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі Ox фігури, обмеженої параболами $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.
6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі Ox фігури, обмеженої напівеліпсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболою $x=\sqrt{1-y}$ та віссю Oy.
7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі Oy фігури, обмеженої кривими $y=\frac{2}{1+x^2}$ і $y=x^2$.
8. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y=\sqrt{(x-2)^3}$ від точки $A(2;\,0)$ до точки $B(6;\,8)$.
9. Обчислити довжину однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t); \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.
10. Обчислити довжину кардіоїди $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

§5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Література [5] – с. 499-574, [6] – с. 341-407, [7] – с. 284-329.

Якщо кожній точці $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ множини D n-вимірного простору R^n за деяким законом поставлено у відповідність одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то говорять, що в області $D \subset R^n$ задано *функцію* n незалежних змінних

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де D – *область визначення функції*, E – *область значень функції*.

Зокрема, коли $n = 2$, маємо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, якщо кожній парі $(x, y) \in D$ на площині поставлено у відповідність одне і тільки одне число z.

Позначимо *частинні прирости* функції z:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),\ \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x};\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

то їх називають *частинними похідними функції* $z = f(x, y)$ у точці (x, y) відповідно за змінними x та y.

Позначення: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ або z'_x, z'_y.

Правило знаходження частинних похідних першого порядку:

Для обчислення частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ користуються відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі змінні, крім x (y), сталими.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції

$$z = x + y^3 + \ln(2x + y^2).$$

Розв'язання.

Функція визначена в області $y^2 > -2x$. Вважаючи, що y стале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2x + y^2} \cdot 2,\ y^2 > -2x.$$

Вважаючи, що x стале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \frac{1}{2x + y^2} \cdot 2y,\ y^2 > -2x.$$

Частинну похідну функції $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ за змінною x (y) називають *<u>частинною похідною другого порядку</u>*.

Позначають:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – частинна похідна за змінною x від $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – частинна похідна за змінною y від $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – частинна похідна за змінною x від $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – частинна похідна за змінною y від $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Останні дві похідні називають *<u>мішаними похідними</u>* другого порядку.

Частинні похідні вищих порядків знаходять послідовно одну від іншої, причому для мішаних частинних похідних справедлива теорема.

<u>Теорема.</u> Якщо функція $z = f(x, y)$ та її похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неперервні у точці (x, y) і в деякому її околі, то в цій точці $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

П р и к л а д 2. (Задача 5.1.) Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}$, якщо $z = \dfrac{xy}{x-y}$.

Розв'язання.

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{xy}{x-y}\right)'_x = y\left(\frac{x}{x-y}\right)'_x = y\frac{x'_x(x-y) - x(x-y)'_x}{(x-y)^2} = y\frac{x-y-x}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{xy}{x-y}\right)'_y = x\left(\frac{y}{x-y}\right)'_y = x\frac{y'_y(x-y) - y(x-y)'_y}{(x-y)^2} = x\frac{x-y+y}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)'_x = -y^2\left(\frac{1}{(x-y)^2}\right)'_x = -y^2(-2)(x-y)^{-3} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)'_y=x^2\left(\frac{1}{(x-y)^2}\right)'_y=x^2(-2)(x-y)^{-3}(-1)=\frac{2x^2}{(x-y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)'_y=-\frac{2y(x-y)^2-y^2 2(x-y)\cdot(-1)}{(x-y)^4}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}.$$

Підставимо знайдені значення частинних похідних у ліву частину заданої рівності:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2y^2}{(x-y)^3}+2\left(\frac{2xy}{(x-y)^3}\right)+\frac{2x^2}{(x-y)^3}=$$

$$=\frac{2y^2-4xy+2x^2}{(x-y)^3}=\frac{2(x-y)^2}{(x-y)^3}=\frac{2}{x-y}.$$

Одержали вираз, що знаходиться в правій частині заданої рівності. Таким чином рівність доведена.

Функція $z=f(x,y)$ називається <u>*диференційовною*</u> в точці (x_0,y_0), якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

де $A,\ B\in R$; α,β – нескінченно малі при $\Delta x,\Delta y\to 0$.

<u>*Повним диференціалом першого порядку*</u> dz функції $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) називається головна лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту функції:

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

Так як x та y – незалежні змінні, то $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$.

<u>Теорема.</u> Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці (x_0,y_0) і $dz=A\Delta x+B\Delta y$, то в точці (x_0,y_0) існують частинні похідні, причому

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=A,\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=B.$$

Отже <u>повний диференціал</u> функції $z=f(x,y)$ обчислюється за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

При досить малих Δx та Δy для диференційовної функції z в точці (x_0,y_0) має місце <u>наближена формула</u> $\Delta f(x_0,y_0)\approx df(x_0,y_0)$, звідки

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y. \qquad (1)$$

Якщо $z = f(x,y)$ – значення функції, $\bar{z} \approx f(x,y)$ – наближене значення функції, то число $|\bar{z} - z|$ називають <u>*абсолютною похибкою*</u> наближення, а число $\left|\frac{\bar{z} - z}{z}\right|$ – <u>*відносною похибкою*</u>.

<u>Максимальна абсолютна похибка</u> $|\Delta^* z|$ обчислення значення функції z:

$$|\Delta^* z| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta^* y|,$$

де $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$– максимальна абсолютна похибка відповідно змінних x та y.

<u>Максимальна відносна похибка</u> $|\delta^* z|$ обчислення значення функції z:

$$|\delta^* z| = \left|\frac{\partial}{\partial x}(\ln|f|)\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}(\ln|f|)\right| |\Delta^* y|,$$

або

$$|\delta^* z| = \left|\Delta^* \ln|f|\right|,$$

тобто максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці її логарифма.

<u>Рівняння дотичної площини</u> до поверхні $z = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0, z_0), де $z_0 = f(x_0, y_0)$, має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

П р и к л а д 3. (Задача 5.2.) Задана функція $z = 2x^2 - xy + 3y$ і точки $A(2;1)$, $B(1{,}97;1{,}02)$.

1) Обчислити значення $z_1 = f(B) = f(x_1; y_1)$;
2) Обчислити наближене значення $\bar{z}_1$ за допомогою повного диференціала;
3) Знайти відносну похибку (у відсотках) при заміні приросту Δz диференціалом;
4) Написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x,y)$ в точці $C(2;1; f(2;1))$.

Розв'язання.

1) Обчислимо значення $z_1 = f(B) = f(1{,}97;1{,}02)$.

$$z_1 = 2 \cdot (1{,}97)^2 - 1{,}97 \cdot 1{,}02 + 3 \cdot 1{,}02 = 8{,}8124.$$

2) Обчислимо наближене значення $\bar{z}_1$ за допомогою повного диференціала. Нехай $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 1{,}97 - 2 = -0{,}03$, $\Delta y = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y$; $\quad \frac{\partial f(2;1)}{\partial x} = 4 \cdot 2 - 1 = 7$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 3; \qquad \frac{\partial f(2;1)}{\partial y} = -2 + 3 = 1;$$

$$f(2;1) = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 9.$$

Підставимо знайдені значення у формулу (1):

$$z_1 \approx \bar{z}_1 = 9 + 7 \cdot (-0,03) + 1 \cdot 0,02 = 8,81.$$

3) Знайдемо відносну похибку при заміні приросту Δz диференціалом dz.

$$|\delta z| = \left| \frac{z_1 - \bar{z}_1}{z_1} \right| = 0,00027 \cdot 100\% = 0,027\%.$$

4) Знайдемо рівняння дотичної площини до поверхні $z = 2x^2 - xy + 3y$ в точці $C(2;1;f(2;1)) = C(2;1;9)$. За попередніми обчисленнями $f'_x(2;1) = 7$; $f'_y(2;1) = 1$. Тоді рівняння дотичної площини має вигляд

$$z - 9 = 7 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 1) \Rightarrow 7x + y - z - 6 = 0.$$

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\bar{l}$ – вектор з початком у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$ – точка околу, що лежить на векторі $\bar{l}$; Δl – довжина відрізка M_0M. Якщо існує

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x; y; z) - f(x_0; y_0; z_0)}{\Delta l},$$

то ця границя називається *похідною функції* $u = f(x, y, z)$ *за напрямом* вектора $\bar{l}$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x; y; z) - f(x_0; y_0; z_0)}{\Delta l}.$$

Похідна за напрямом $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}$ характеризує швидкість зміни функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ за напрямом $\bar{l}$.

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ має в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}$ за будь-яким напрямом $\bar{l}(a; b; c)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma, \qquad (2)$$

де $\cos\alpha = \frac{a}{|\bar{l}|}$, $\cos\beta = \frac{b}{|\bar{l}|}$, $\cos\gamma = \frac{c}{|\bar{l}|}$.

Приклад 4. (Задача 5.3.) Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці M за напрямом тої нормалі до поверхні σ, яка утворює гострий кут з додатнім напрямком осі Oz. $u=\ln(2+x^2z)-x\sqrt{y}$, $\sigma: 2x^2+y^2+z^2=11$, $M(1;4;3)$.

Розв'язання.

Знайдемо нормальний вектор $\overline{n}(F'_x(M);F'_y(M);F'_z(M))$.

$$F(x;y;z)=2x^2+y^2+z^2-11,\ F'_x=4x,\ F'_y=2y,\ F'_z=2z,$$

$$F'_x(M)=4\cdot 1=4,\ F'_y(M)=2\cdot 4=8,\ F'_z(M)=2\cdot 3=6.$$

Отже нормальний вектор до поверхні σ в точці M такий: $\overline{n}(4;8;6)$. Координата z вектора $\overline{n}$ додатна (z=6), тому нормаль до поверхні σ утворює гострий кут з додатнім напрямом осі Oz.

Скористаємось формулою (2) для обчислення похідної за напрямом.

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{n}$:

$$|\overline{n}|=\sqrt{4^2+8^2+6^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29},$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{2\sqrt{29}}=\frac{2}{\sqrt{29}},\ \cos\beta=\frac{8}{2\sqrt{29}}=\frac{4}{\sqrt{29}},\ \cos\gamma=\frac{6}{2\sqrt{29}}=\frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xz}{2+x^2z}-\sqrt{y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{2\sqrt{y}},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2}{2+x^2z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M)=\frac{2\cdot 1\cdot 3}{2+1^2\cdot 3}-\sqrt{4}=\frac{6}{5}-2=-\frac{4}{5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{4}}=-\frac{1}{4},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}(M)=\frac{1^2}{2+1^2\cdot 3}=\frac{1}{5}.$$

Отже $$\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(M)=-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{29}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{29}}=-\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $\mathrm{grad}\,u$:

$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}.$$

Вектор градієнта вказує напрямок найшвидшого зростання функції.

Приклад 5. (Задача 5.4.) Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,y,z)$ і $v(x,y,z)$ в точці M. $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$, $v=xyz^3$, $M(1;-1;2)$.

Розв'язання.

Знайдемо градієнти скалярних полів у точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2yz, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2xz, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 6, \ \frac{\partial u}{\partial y}(M) = 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -6,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 6 \Rightarrow \operatorname{grad} u(M) = (6; -6; 6);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz^3, \ \frac{\partial v}{\partial y} = xz^3, \ \frac{\partial v}{\partial z} = 3xyz^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(M) = (-1) \cdot 2^3 = -8, \ \frac{\partial v}{\partial y}(M) = 1 \cdot 2^3 = 8,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(M) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2^2 = -12 \Rightarrow \operatorname{grad} v(M) = (-8; 8; -12).$$

Як відомо кут між векторами $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ знаходиться за формулою:

$$\cos(\bar{a} \,\widehat{,}\, \bar{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

У даному випадку:

$$|\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3},$$

$$|\operatorname{grad} v(M)| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{17}.$$

Таким чином, позначивши $\varphi = (\operatorname{grad} u \,\widehat{,}\, \operatorname{grad} v)$, отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{6 \cdot (-8) + (-6) \cdot 8 + 6 \cdot (-12)}{6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{17}} = \frac{168}{24\sqrt{51}} = \frac{7}{\sqrt{51}}, \ \varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{51}}.$$

Відомо, що функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D, досягає в цій області <u>найбільшого</u> $\max\limits_{(x,y)\in D} z$ і <u>найменшого</u> $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ <u>значень</u>.

<u>Для відшукання цих значень користуються правилом:</u>

1) знайти стаціонарні точки всередині заданої області і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на межі області;

3) серед знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

П р и к л а д 6. (Задача 5.5.) Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області D, яку задано системою нерівностей. Зробити схематичний рисунок області.

$$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2;\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1.$$

Розв'язання.

Зробимо рисунок області D.

1) Будуємо лінії, рівняння яких дістаємо заміною знаків нерівностей на знаки рівностей:

$$x = 0, y = 0, x + y = 1.$$

2) Визначаємо частину площини, яка відповідає кожній нерівності.

а) Для $x \ge 0$ беремо точку, яка не належить прямій $x = 0$, наприклад, $(1;0)$. Підставляємо її координати в нерівність $x \ge 0$, тобто $1 \ge 0$. Так як нерівність вірна, то частина площини, якій належить точка $(1;0)$, і є розв'язком нерівності. Заштрихуємо цю частину площини.

б) Для $y \ge 0$ беремо точку $(1;2)$. Підставляємо її координати у нерівність, тобто $2 \ge 0$. Нерівність вірна, значить заштриховуємо півплощину над віссю Ox.

в) Для $x + y \le 1$ беремо точку $(0;0)$. Підставляємо її координати у нерівність, одержуємо $0 + 0 \le 1$. Нерівність вірна, значить заштриховуємо півплощину під прямою $x + y = 1$.

3) Визначаємо частину площини, де одночасно перетинаються всі заштриховані півплощини, це й буде шукана область D (рис. 1).

4) Знайдемо стаціонарні точки функції z, які містяться всередині заданої області.

$$z'_x = 6x - 2,\ z'_y = 6y - 2.$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля і розв'яжемо систему, що утворилася:

$$\begin{cases} 6x - 2 = 0, \\ 6y - 2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Маємо стаціонарну точку $M\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, яка є внутрішньою точкою області D. Значення функції в цій точці

$$z(M) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

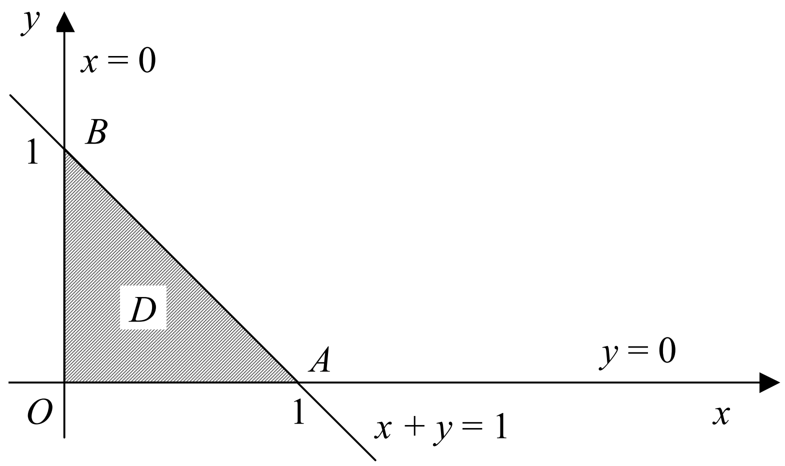


Рис. 1

2) Визначимо найбільше і найменше значення заданої функції на межі області.

На відрізку OA маємо $y=0$, тому функція запишеться у вигляді $z(x;0)=z_1=3x^2-2x+2, \quad 0\le y\le 1$. Таким чином, потрібно дослідити на екстремум функцію однієї змінної: $z_1'=6x-2, \quad 6x-2=0, \quad x=\dfrac{1}{3}$, $z_1\left(\dfrac{1}{3}\right)=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{5}{3}$. Крім того на кінцях проміжку маємо $z(O)=2$, $z(A)=3$.

На відрізку OB маємо $x=0$, звідки $z(0;y)=z_2=3y^2-2y+2, \quad 0\le x\le 1$. Отже, $z_2'=6y-2, \; 6y-2=0, \; y=\dfrac{1}{3}, \; z_2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}; \; z(B)=3$.

На відрізку AB маємо $y=1-x\Rightarrow$

$\Rightarrow z(x;1-x)=z_3=3x^2+3(1-x)^2-2x-2(1-x)+2=6x^2-6x+3, \; 0\le x\le 1$.

Рівняння $6x^2-6x+3=0$ в дійсній області розв’язків не має, оскільки його дискримінант менший нуля.

3) Порівнюючи значення $z(M)=\dfrac{4}{3}, \quad z_1\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}, \quad z(O)=2, \quad z(A)=3$, $z_2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}, \; z(B)=3$, приходимо до висновку, що найбільшого значення функція набуває на межі області в точках A і B: $\max\limits_{(x,y)\in D} z=3$, а найменшого – в середині області в точці M: $\min\limits_{(x,y)\in D} z=\dfrac{4}{3}$.

Задачі контрольної роботи № 5

Задача 5.1. Маємо $z = f(x, y)$. Довести, що

$$F(x;\, y;\, z;\, \frac{\partial z}{\partial x};\, \frac{\partial z}{\partial y};\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 0.$$

1. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $F = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y^2}$.
2. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $F = x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.
3. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. $z = e^{xy}$; $F = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$.
5. $z = \ln(x + e^{-y})$; $F = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
6. $z = \dfrac{x}{y}$; $F = x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
7. $z = x^y$; $F = y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$.
8. $z = xe^{\frac{y}{x}}$; $F = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
9. $z = \sin(x + ay)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
10. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $F = (x - y) \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Задача 5.2. Задані функція $z = f(x, y)$ і точки $A(x_0;\, y_0)$ і $B(x_1;\, y_1)$.

1. Обчислити значення $z_1 = f(B) = f(x_1;\, y_1)$;
2. Обчислити наближене значення $\overline{z_1}$ за допомогою повного диференціала;
3. Знайти відносну похибку (у відсотках) при заміні приросту Δz диференціалом dz;
4. Написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $C(x_0;\, y_0;\, z_0)$.

1. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;\, 2)$; $B(1{,}02;\, 1{,}96)$.

2. $z = 3x^2 - xy + x + y$; $A(1;\,3)$; $B(1{,}06;\,2{,}92)$.

3. $z = x^2 + 3xy - 6y$; $A(4;\,1)$; $B(3{,}96;\,1{,}03)$.

4. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; $A(2;\,3)$; $B(2{,}02;\,2{,}97)$.

5. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; $A(2;\,1)$; $B(1{,}96;\,1{,}04)$.

6. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; $A(2;\,4)$; $B(1{,}98;\,3{,}91)$.

7. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$; $A(-1;\,3)$; $B(-0{,}98;\,2{,}97)$.

8. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; $A(3;\,2)$; $B(3{,}05;\,1{,}98)$.

9. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$; $A(3;\,4)$; $B(3{,}04;\,3{,}95)$.

10. $z = xy + 2y^2 - 2x$; $A(1;\,2)$; $B(0{,}97;\,2{,}03)$.

Задача 5.3. Знайти похідну скалярного поля $U(x;\,y;\,z)$ в точці M за напрямком нормалі до поверхні σ, яка утворює гострий кут з додатним напрямком вісі OZ.

1. $U = 4\ln(3 + x^2) - 8xy$; $\sigma : x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$; $M(1;\,1;\,1)$.

2. $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$; $\sigma : 4z + 2x^2 - y^2 = 0$; $M(2;\,4;\,4)$.

3. $U = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz$; $\sigma : x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$; $M(1;\,1;\,1)$.

4. $U = \dfrac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$; $\sigma : z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$; $M(-2;\,\dfrac{1}{2};\,1)$.

5. $U = xz^2 - \sqrt{x^3y}$; $\sigma : x^2 - y^2 + 3z + 12 = 0$; $M(2;\,2;\,4)$.

6. $U = x\sqrt{y} - yz^2$; $\sigma : x^2 + y^2 = 4z$; $M(2;\,1;\,-1)$.

7. $U = 7\ln\left(\dfrac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$; $\sigma : 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$; $M(1;\,1;\,1)$.

8. $U = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + xz$; $\sigma : x^2 + y^2 - 2z = 10$; $M(2;\,2;\,-1)$.

9. $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $\sigma : 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$; $M(1;\,-2;\,4)$.

10. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $\sigma : x^2 + y^2 = 24z$; $M(3;\,4;\,1)$.

Задача 5.4. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $U(x;\,y;\,z)$ і $V(x;\,y;\,z)$ в точці M.

1. $V = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$; $U = \dfrac{yz^2}{x^2}$; $M\left(\sqrt{2};\,\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. $V = \dfrac{4\sqrt{6}}{x} - \dfrac{6}{9y} + \dfrac{3}{x}$; $U = x^2yz^3$; $M\left(2;\,\dfrac{1}{3};\,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

3. $V = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$; $U = \dfrac{z^3}{xy^2}$; $M\left(\dfrac{1}{3};\, 2;\, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

4. $V = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}z}$; $U = \dfrac{z}{x^3y^2}$; $M\left(1;\, 2;\, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

5. $V = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$; $U = \dfrac{x^2}{yz^2}$; $M\left(\sqrt{2};\, \dfrac{1}{\sqrt{2}};\, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. $V = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$; $U = \dfrac{z^2}{xy^2}$; $M\left(\dfrac{1}{3};\, 2;\, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

7. $V = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$; $U = \dfrac{xz^2}{y}$; $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\, \dfrac{1}{\sqrt{6}};\, 1\right)$.

8. $V = \dfrac{\sqrt{6}}{2x} - \dfrac{\sqrt{6}}{2y} + \dfrac{2}{3z}$; $U = \dfrac{yz^2}{x}$; $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\, \dfrac{1}{\sqrt{2}};\, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. $V = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$; $U = \dfrac{xy^2}{z^2}$; $M\left(\dfrac{1}{3};\, 2;\, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

10. $V = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}z}$; $U = \dfrac{x^3y^2}{z}$; $M\left(1;\, 2;\, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Задача 5.5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області D, яку задано системою нерівностей. Зробити рисунок.

1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27;\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$.
2. $z = x^2 + 2y^2 + 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3$.
3. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2;\ x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x$.
4. $z = x^2 + 3y^2 + x - y;\ x \ge 1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.
5. $z = x^2 + 2xy + 2y^2;\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.
6. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;\ x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.
7. $z = 10 + 2xy - x^2;\ 0 \le y \le 4 - x^2$.
8. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;\ x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0$.
9. $z = x^2 + xy - 2;\ 4x^2 - 4 \le y \le 0$.
10. $z = x^2 + xy;\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$.

Література:

1. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії./ В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. – К.: Вища шк., 2001. – 303 с.
2. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для втузов. –М.: Высш. шк., 1972. – 640 с.
3. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников химико-технологических специальностей высших учебных заведений. / С.Г. Григорьев, О.В. Мантуров, Е.С. Мироненко; под ред. О.В. Мантурова. – 2-е изд. перераб. – М.: Высш. шк., 1987. – 80 с.
4. Вища математика. Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.
5. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Издательство Харьковского Университета, 1967. – 946 с.
6. Бермант А.Р., Арамович И.Г. Краткий курс математического анализа (для втузов). – М.: Наука, 1973. – 720 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I. – М.: Высш. шк., 1986. – 415 с.

ЗМІСТ