Міністерство освіти і науки України
Черкаський державний технологічний університет

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання

Частина II

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 10 від 16.03.05 р.
та Методичною радою ЧДТУ,
Протокол № 8 від 20.04.05 р.

Черкаси ЧДТУ 2006

УДК 517 (07)
ББК 22,1
Н15

Укладачі: **Грижук** Олександра Павлівна,
Дідковський Руслан Михайлович, к.т.н.,
Ковтуненко Віктор Степанович,
Олексієнко Наталія Володимирівна, к.т.н.,
Синько Ірина Василівна,
Сухіна Олена Миколаївна,

Рецензент: Ламзіна Тетяна Борисівна, к.ф.-м.н.

Н15 Навчально-методичні матеріали до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання. Частина II / Укл.: Грижук О.П., Дідковський Р.М., Ковтуненко В.С., Олексієнко Н.В., Синько І.В., Сухіна О.М. – Черкаси: ЧДТУ, 2006. – 96 с.
ISBN 966-7533-85-9
966-7533-87-5

Навчальне видання

Навчально-методичні матеріали
до виконання контрольних робіт з вищої математики
для студентів технічних спеціальностей
заочної форми навчання
Частина II

Підписано до друку 19.07.2006. Формат 60х84 1/16. Папір офісн. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативний. Ум. друк. 5,58 арк. Обл.-вид. 4,53 арк. Тираж 500 прим. Зам. № 247-06.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.

ISBN 966-7533-85-9
966-7533-87-5

ВСТУП

Дані "Навчально-методичні матеріали" відповідають програмі дисципліни "Вища математика" для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання.

Друга частина вміщує п’ять розділів, що охоплюють матеріал третього та четвертого семестрів:

- Диференціальні рівняння.
- Числові та функціональні ряди.
- Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля.
- Теорія ймовірностей і математична статистика.
- Рівняння математичної фізики. Функції комплексного змінного. Операційне числення.

В кожному розділі наведено: посилання на навчальну літературу; короткі теоретичні відомості – формулювання основних понять і теорем; зразки розв’язування основних типів задач; підбір задач для виконання контрольних робіт (10 варіантів).

Матеріали рекомендовано для студентів заочної форми навчання, вони також можуть бути використані як довідник студентами денної форми навчання.

§6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Основні поняття і означення

Література: [1] – с. 421-427; [2] – с. 117-118; [3] – с. 10-21.

Диференціальними називаються рівняння, які пов'язують між собою незалежну змінну, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*. Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить в дане рівняння.

Диференціальне рівняння n-го порядку, не розв'язане відносно найвищої похідної, в загальному вигляді подається так

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно найвищої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (2)$$

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

або

$$y' = f(x, y). \qquad (4)$$

Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то рівняння (4) можна записати у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, або $dy = f(x, y)dx$. Якщо функція $f(x, y)$ є дробом $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то рівняння (4) можна переписати у *симетричній формі*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4) в області D називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка в результаті підстановки в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність по x при будь-яких допустимих значеннях сталої C.

Процес знаходження розв'язку називається інтегруванням диференціального рівняння.

Частинним називається будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$, який одержується із загального розв'язку при певному значенні сталої $C = C_0$.

Задачею Коші називається задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (4), що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Умова $y(x_0) = y_0$ називається початковою умовою диференціального рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ і її похідна $f_y^{'}$ неперервні в області *D*, то розв'язок диференціального рівняння (4) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує і єдиний.

Точки, в яких не виконуються умови теореми, називаються особливими. *Розв'язок* диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим* розв'язком. Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою*.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Література: [1] – с. 427-430; [2] – с. 118-123; [3] – с. 21-25.

Рівняння виду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

називається диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними*, якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ можна подати у вигляді

$$M(x,y) = M_1(x)\cdot N_1(y), \quad N(x,y) = M_2(x)\cdot N_2(y).$$

Аналогічно рівняння виду $y' = f(x,y)$, де $f(x,y) = M(x)\cdot N(y)$, є *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Рівняння (5) розв'язується шляхом відокремлення змінних. За допомогою алгебраїчних перетворень необхідно досягти того, щоб біля *dx* множником була функція, яка залежить тільки від змінної *x*, а біля *dy* – функція, яка залежить тільки від змінної *y*.

Подамо рівняння (5) у вигляді

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{6}$$

Для відокремлення змінних поділимо рівняння (6) на функцію $N_1(y)M_2(x)$ і дістанемо *диференціальне рівняння з відокремленими змінними*

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

яке має інтеграл

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,\ C = const,$$

або

$$\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + C.$$

Диференціальне рівняння (5) також має розв'язки $y = y_j$, $x = x_i$, де $y = y_j$ є коренем рівняння $N_1(y) = 0$, а $x = x_i$ є коренем рівняння $M_2(x) = 0$ (особливі розв'язки).

П р и к л а д 1. (Задача 6.1) Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$.

Розв'язання.

Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $xy(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2$.

Помножимо обидві частини рівняння на dx: $xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$.

Відокремимо змінні поділивши обидві частини рівняння на функцію $x(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

Знайдемо кожен інтеграл окремо та результати прирівняємо:

а) $$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln|C_1|$$

(тут сталу інтегрування записано у логарифмічній формі для зручності)

б) $$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \ln|C_2|$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)x = 1 \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 0$$

в) $$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln|C_1| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C_2| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln(y^2+1) = \ln\frac{x^2}{x^2+1} + \ln C^2 \quad \left(\text{тут } \ln C^2 = 2\ln|C_2| - 2\ln|C_1| = \ln\frac{C_2^2}{C_1^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2+1 = \frac{C^2x^2}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{C^2x^2}{x^2+1} - 1}$$ – загальний розв'язок.

Однорідні диференціальні рівняння

Література: [1] – с. 430-433; [2] – с. 123-126; [3] – с. 25-28.

Рівняння виду

$$y' = f(x,y) \tag{7}$$

називається <u>*однорідним*</u> диференціальним рівнянням, якщо функція $f(x,y)$ – однорідна.

Функція $f(x,y)$ називається <u>*однорідною*</u>, якщо при множенні аргументів на довільний параметр $t \neq 0$ значення функції не змінюється, тобто $f(x,y) = f(tx,ty)$.

Рівняння (7) за допомогою підстановки $y = ux$, де $u = u(x)$ (8), і відповідно $y' = x\frac{du}{dx} + u$, зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 2. (Задача 6.2) Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xy' = \frac{xy - y^2}{2y - 2x}.$$

Розв'язання.

Зведемо задане рівняння до виду (7), тобто поділимо його обидві частини на x : $y' = \frac{xy - y^2}{2xy - 2x^2}$.

Так як права частина рівняння – однорідна функція, то це рівняння однорідне і інтегрується заміною (8): $y = ux$, $y' = x\frac{du}{dx} + u$.

Маємо: $x\frac{du}{dx} + u = \frac{x(ux) - (ux)^2}{2x(ux) - 2x^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} + u = \frac{ux^2 - u^2x^2}{2ux^2 - 2x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\frac{du}{dx} + u = \frac{u - u^2}{2u - 2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} + u = -\frac{1}{2}u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{3}{2}u \Rightarrow$

$\frac{du}{u} = -\frac{3}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u} = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{C}{x\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{C}{x\sqrt{x}} \Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x}}.$

Лінійні диференціальні рівняння

Література: [1] – с. 433-438; [2] – с. 130-135; [3] – с. 29-31.

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{9}$$

де $p(x)$, $q(x)$ відомі функції, називається <u>*лінійним*</u> диференціальним рівнянням.

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння (9) називається <u>*однорідним*</u>. Якщо $q(x) \neq 0$, то рівняння (9) називається <u>*неоднорідним*</u>.

Розв'язок рівняння (9) будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$ (<u>метод Бернуллі</u>). Підставляючи

$$y = uv, \quad y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \tag{10}$$

у рівняння (9), дістанемо рівняння

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+p(x)uv=q(x). \tag{11}$$

В лівій частині рівняння (11) винесемо v за дужки:

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+p(x)u\right)=q(x). \tag{12}$$

Так як одну з функцій можна вибирати довільно, то виберемо таку функцію u, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{du}{dx}+p(x)u=0\,.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, знайдемо функцію $u = u(x)$ (обираємо найпростіший відмінний від нуля частинний розв'язок).

Підставивши знайдену функцію $u(x)$ у рівняння (12), знову одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u(x)\cdot\frac{dv}{dx}=q(x).$$

Розв'язавши його, отримаємо функцію $v = v(x, C)$. Тоді

$$y = u(x)\cdot v(x, C).$$

П р и к л а д 3. (Задача 6.3) Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{2x^2}{1+x^2},\ \ y(0)=\frac{2}{3}.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Так як дане диференціальне рівняння – лінійне, то вводимо заміну (10)

$$y=uv,\ \ y'=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\,.$$

Отримаємо:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+\frac{2xuv}{1+x^2}=\frac{2x^2}{1+x^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+\frac{2xu}{1+x^2}\right)=\frac{2x^2}{1+x^2}\,. \tag{13}$$

Прирівнюємо вираз в дужках до нуля і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}+\frac{2xu}{1+x^2}=0\ \Rightarrow\ \int\frac{du}{u}=-\int\frac{2x}{1+x^2}dx\ \Rightarrow\ \ln|u|=-\ln(x^2+1)\ \Rightarrow\ u=\frac{1}{x^2+1}.$$

Підставляємо знайдену функцію $u(x)$ в рівняння (13) і знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{1}{x^2+1}\frac{dv}{dx}=\frac{2x^2}{1+x^2}\ \Rightarrow\ dv=2x^2dx\ \Rightarrow\ v=\int 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3+C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий

$$y = uv = \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right).$$

Для знаходження частинного розв'язку підставимо задані значення змінних $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$ (початкові умови) в знайдений загальний розв'язок рівняння, звідки знайдемо значення довільної сталої *C*:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{0^2+1}\left(\frac{2}{3}\cdot 0^3 + C\right) \;\Rightarrow\; C = \frac{2}{3}.$$

Значення сталої *C* підставляємо у загальний розв'язок рівняння і записуємо шуканий частинний розв'язок: $y = \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right).$

Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Література: [1] – с. 455-460; [2] – с. 140-145; [3] – с. 61-65.

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{14}$$

третього порядку –

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0. \tag{15}$$

Загальний розв'язок рівняння (14) містить дві довільні сталі C_1 та C_2 і має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. За рахунок вибору довільних сталих C_1 та C_2 можна розв'язати задачу Коші, яка полягає в знаходженні частинного розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Аналогічно, загальний розв'язок рівняння (15) містить три довільні сталі C_1, C_2 та C_3 і має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3)$.

Розглянемо деякі випадки, коли можна понизити порядок диференціального рівняння (14) і звести його до диференціального рівняння першого порядку.

1) Якщо до запису рівняння не входить невідома функція *y*, тобто $F(x, y', y'') = 0$, то можна понизити порядок рівняння, узявши $y' = z$, $y'' = z'$, де $z = z(x)$ – функція, яка залежить від змінної x. При цьому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку $F(x, z, z') = 0$. Якщо буде знайдено загальний розв'язок цього рівняння $z = z(x, C_1)$, то знайдемо і розв'язок диференціального рівняння (14):

$$y = \int z(x, C_1)dx + C_2.$$

2) Якщо до запису рівняння не входить незалежна змінна x, тобто $F(y, y', y'') = 0$, то можна понизити порядок рівняння, якщо за нову незалежну змінну взяти y, а за шукану залежну змінну $z = y'$, де $z = z(y)$ – функція, яка залежить від змінної y. Таким чином:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z .$$

Початкове диференціальне рівняння другого порядку зводиться до диференціального рівняння першого порядку $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$. Якщо буде знайдено загальний розв'язок цього рівняння $z = z(y, C_1)$, то для відшукання загального розв'язку початкового диференціального рівняння дістанемо рівняння:

$$y' = z(y, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z(y, C_1) \Rightarrow \int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

П р и к л а д 4. (Задача 6.4) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1) $y'' + y' tgx = \sin 2x$;

2) $(x+1)y''' + y'' = x + 1$.

Розв'язання.

1) $y'' + y' tgx = \sin 2x$.

До запису рівняння не входить невідома функція y (перший випадок), значить, робимо заміну $y' = z,\ \ y'' = z' = \frac{dz}{dx}$. Одержуємо:

$$z' + ztgx = \sin 2x$$

– лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язується заміною $z = uv, \quad z' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uvtgx = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + utgx\right) = \sin 2x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} + utgx = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int tgxdx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|\cos x| \quad \Rightarrow \quad u = \cos x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos x\frac{dv}{dx} = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad v = \int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx = 2\int \sin xdx = -2\cos x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = uv = \cos x(-2\cos x + C_1)$$

Знайшовши значення z, повертаємось до заміни :

$$y' = z = \cos x(-2\cos x + C_1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \cos x(-2\cos x + C_1)dx = -2\int \cos^2 x dx + C_1 \int \cos x dx =$$

$$= -x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2$$

2) $(x+1)y''' + y'' = x + 1$

– диференціальне рівняння третього порядку, до запису якого не входить невідома функція y (перший випадок) і її перша похідна y', значить замінюємо найнижчу похідну, яка є в заданому рівнянні

$$y'' = z, \;\; y''' = z' = \frac{dz}{dx}.$$

Одержуємо: $(x+1)z' + z = x + 1$ – лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язується заміною $z = uv, \quad z' = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$.

$$(x+1)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + uv = x + 1 \;\Rightarrow\; u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x+1}\right) = 1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x+1} = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x+1} \;\Rightarrow\; \ln|u| = -\ln|x+1| \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{x+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}\frac{dv}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; v = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; z = uv = \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)$$

Повертаємось до заміни :

$y'' = z \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y' = \int \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)dx = \int \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2(x+1)} + \frac{C_1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C_1\ln|x+1| + C_2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\ln|x+1| + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y = \int \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\ln|x+1| + C_2\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\big((x+1)\ln|x+1| - x\big) + C_2 x + C_3.$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Література: [1] – с. 470-477; [2] – с. 149-151, 153-159; [3] – с. 72-76, 80-87.

Рівняння виду

$$y''+py'+qy=0, \quad p \text{ і } q - \text{ сталі}, \tag{16}$$

називається <u>*лінійним однорідним*</u> диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{17}$$

де y_1 і y_2 – два лінійно незалежних частинних розв'язки рівняння (16), C_1 та C_2 – довільні сталі.

Ці розв'язки знаходять у вигляді $y = e^{kx}$, де k – невизначена стала (дійсна або уявна). Для знаходження k складають характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{18}$$

Розв'язуючи рівняння (18), знаходимо його корені k_1 і k_2. Можливі такі три випадки.

1. Якщо $D > 0$, то $k_1 \neq k_2$ – дійсні числа, тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$, а загальний розв'язок має вигляд
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{19}$$
2. Якщо $D = 0$, то $k_1 = k_2 = k$ – дійсне число, тоді $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = xe^{kx}$, а загальний розв'язок має вигляд
$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \tag{20}$$
3. Якщо $D < 0$, то k_1 та k_2 – комплексні числа ($k_1 = \alpha + \beta i$ і $k_2 = \alpha - \beta i,\ \beta \neq 0$), тоді $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а загальний розв'язок має вигляд
$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{21}$$

Рівняння виду

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{22}$$

де p і q – сталі, а $f(x)$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a;b]$, називається <u>*лінійним неоднорідним*</u> диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння (16) у цьому випадку називається <u>*відповідним лінійним однорідним диференціальним рівнянням*</u>.

Загальний розв'язок рівняння (22) знаходять у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y = \overline{y} + y^*, \tag{23}$$

де $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння, а y^* – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

Якщо права частина рівняння (22) має спеціальний вигляд, то частинний розв’язок y^* можна знаходити, не вдаючись до інтегрування. Розглянемо деякі з таких випадків.

1) Нехай права частина рівняння (22) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{24}$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Тоді частинний розв’язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x), \tag{25}$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що і многочлен $P_n(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α, якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймають $r = 0$.

2) Нехай права частина рівняння (22) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x), \tag{26}$$

функція (24) є частинним випадком функції (26) при $\beta = 0$.

Тоді частинний розв’язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x), \tag{27}$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Шукані многочлени $Q_n(x)$ з формули (24) та $Q_s(x)$ і $L_s(x)$ з формули (27) мають бути повними, тобто містити всі степені x відповідно від 0 до n та від 0 до s.

П р и к л а д 5. (Задача 6.5) Знайти розв’язок задачі Коші:

1) $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{-x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Розв’язання.

1) $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами. Знайдемо розв’язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \ \Rightarrow\ k_1 = -1,\ k_2 = 4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тоді за формулою (19) загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв’язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x) = 17\sin x$ – подана у вигляді (26), тобто $f(x) = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 17\sin x)$. Тому розв’язок шукатимемо у вигляді (27)

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x),$$

де $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = i$;

$r = 0$, так як $\alpha + \beta i \neq k_1$ і $\alpha + \beta i \neq k_2$;

$s = 0$, так як $P_n(x) = 0, R_m(x) = 17 \Rightarrow n = m = 0$, тому $Q_0(x) = A,\ L_0(x) = B$.

Звідси:

$$y^* = x^0 e^0 (A\cos x + B\sin x) = A\cos x + B\sin x,$$
$$(y^*)' = -A\sin x + B\cos x,$$
$$(y^*)'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Підставляємо у задане рівняння:

$$y'' = (y^*)'',\ y' = (y^*)',\ y = y^*.$$
$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 17\sin x.$$

Розкриємо дужки та згрупуємо доданки у лівій частині відносно $\cos x$ та $\sin x$:

$$(-5A - 3B)\cos x + (3A - 5B)\sin x = 17\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos x$ та $\sin x$, одержимо

$$\begin{cases} -5A - 3B = 0, \\ 3A - 5B = 17; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5}B, \\ -\dfrac{9}{5}B - 5B = 17; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{2}, \\ B = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Звідси $y^* = \dfrac{3}{2}\cos x - \dfrac{5}{2}\sin x$.

Таким чином, знайшовши загальний розв’язок $\overline{y}$ відповідного однорідного та частинний розв’язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв’язок даного рівняння

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + \frac{3}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x.$$

Розв’яжемо задачу Коші при $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. Для цього знайдемо y':

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - \frac{3}{2}\sin x - \frac{5}{2}\cos x.$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0)=C_1+C_2+\frac{3}{2}=0 \;\Rightarrow\; C_1+C_2=-\frac{3}{2},$$

$$y'(0)=-C_1+4C_2-\frac{5}{2}=1 \;\Rightarrow\; C_1=4C_2-\frac{7}{2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1+C_2=-\dfrac{3}{2}, \\ C_1=4C_2-\dfrac{7}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=\dfrac{2}{5}, \\ C_1=-\dfrac{19}{10}. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо відповідь:

$$y=\bar{y}+y^*=-\frac{19}{10}e^{-x}+\frac{2}{5}e^{4x}+\frac{3}{2}\cos x-\frac{5}{2}\sin x.$$

2) $y''-8y'+16y=e^{4x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв’язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2-8k+16=0 \Rightarrow k_1=k_2=4 \Rightarrow k=4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тоді за формулою $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$ (20) загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y}=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв’язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x)=e^{4x}$ – подана у вигляді (24), причому $P_n(x)=1$ – многочлен нульового порядку, тобто $n=0$. Тому розв’язок шукатимемо у вигляді

$$y^*=x^r e^{\alpha x}Q_n(x),$$

де $\alpha=4$;
$r=2$, так як $\alpha=k_1$ і $\alpha=k_2$;
$n=0$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_0(x)=A$.

Звідси

$y^*=Ax^2e^{4x}$,

$(y^*)'=2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x}$,

$(y^*)''=2Ae^{4x}+8Axe^{4x}+8Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}=2Ae^{4x}+16Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}$.

Підставляємо у задане рівняння : $y''=(y^*)''$, $y'=(y^*)'$, $y=y^*$.

$$2Ae^{4x}+16Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}-8(2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x})+16(Ax^2e^{4x})=e^{4x},$$

$$e^{4x}(2A+16Ax+16Ax^2-16Ax-32Ax^2+16Ax^2)=e^{4x},$$

$$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Звідси $y^*=\frac{1}{2}x^2e^{4x}$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші при початкових умовах $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

$$y'=4C_1e^{4x}+C_2e^{4x}+4C_2xe^{4x}+xe^{4x}+2x^2e^{4x}=$$

$$=e^{4x}(4C_1+C_2+(4C_2+1)x+2x^2).$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0)=C_1=0,$$

$$y'(0)=4C_1+C_2=1 \Rightarrow C_2=1.$$

Таким чином, дістанемо відповідь:

$$y=xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}=(x+\frac{1}{2}x^2)e^{4x}.$$

3) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x};\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2+2k+2=0 \Rightarrow D=4-8=-4=(2i)^2 \Rightarrow k_1=-1-i,\ k_2=-1+i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні ($\alpha=-1,\ \beta=1$), тоді за формулою $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ (21) загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\overline{y}=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x)=x^2e^{-x}$ – подана у вигляді (24), причому $P_n(x)=x^2$ – многочлен другого порядку, тобто $n=2$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^*=x^re^{\alpha x}Q_n(x),$$

де $\alpha = -1$;
$r = 0$, так як $\alpha \neq k_1$ і $\alpha \neq k_2$;
$n = 2$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ (повний многочлен другого порядку).

Звідси

$$y^* = x^0 e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C),$$

$$(y^*)' = -e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{-x}(2Ax + B) = e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C),$$

$$(y^*)'' = -e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) + e^{-x}(-2Ax + 2A - B) =$$

$$= e^{-x}(Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C).$$

Підставляємо у задане рівняння : $y'' = (y^*)''$, $y' = (y^*)'$, $y = y^*$.

$$e^{-x}(Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C) + 2e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) +$$
$$+ 2e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) = x^2 e^{-x},$$

$$e^{-x}(Ax^2 + Bx + 2A + C) = x^2 e^{-x},$$

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних степенів x одержуємо:

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ 2A + C = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = -2. \end{cases}$$

Звідси $y^* = e^{-x}(x^2 - 2)$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \overline{y} + y^* = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(x^2 - 2) =$$
$$= e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2),$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші. Для цього знайдемо y':

$$y' = -e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x) =$$
$$= e^{-x}(-C_1 \cos x - C_2 \sin x - x^2 + 2 - C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x) =$$
$$= e^{-x}((-C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 - C_2)\sin x - x^2 + 2x + 2).$$

Підставивши початкові умови $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$ одержимо

$$y(0) = C_1 - 2 = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 2,$$
$$y'(0) = -C_1 + C_2 + 2 = 1 \ \Rightarrow \ C_2 = 1.$$

Таким чином, одержимо відповідь:

$$y = e^{-x}(2\cos x + \sin x + x^2 - 2).$$

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР) з постійними коефіцієнтами

Література: [1] – с. 491-493; [2] – с. 169-174; [3] – с. 94-106.

Система виду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{28}$$

де $a_{ij} = const$, називається *лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами*.

Цю систему можна записати у вигляді одного *матричного диференціального рівняння*

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{29}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}$.

Розв'язки системи шукатимемо у вигляді

$$y_1 = p_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = p_2 e^{\lambda t}, \quad \ldots \quad, \quad y_n = p_n e^{\lambda t}, \tag{30}$$

де $p_i = const \ (i = \overline{1,n}), \quad \lambda = const$.

Підставивши значення $y_1, \ y_2, \ \ldots \ , \ y_n$ у систему диференціальних рівнянь (29), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $p_1, \ p_2, \ \ldots \ , \ p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)p_n = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Якщо визначник матриці цієї системи прирівняти до нуля, то одержимо *характеристичне рівняння системи*

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda)p_1 & a_{12}p_2 & \ldots & a_{1n}p_n \\ a_{21}p_1 & (a_{22} - \lambda)p_2 & \ldots & a_{2n}p_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}p_1 & a_{n2}p_2 & \ldots & (a_{nn} - \lambda)p_n \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Нехай характеристичне рівняння (32) має n різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, які є <u>*характеристичними числами матриці системи*</u>. Кожному характеристичному числу відповідає власний вектор. Нехай характеристичному числу λ_k відповідає власний вектор $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$, $k=\overline{1,n}$. Тоді система диференціальних рівнянь (28) має n розв'язків:

1-й розв'язок, що відповідає кореню $\lambda=\lambda_1$:

$$y_{11}=p_{11}e^{\lambda_1 t},\quad y_{21}=p_{21}e^{\lambda_1 t},\quad \ldots\quad, y_{n1}=p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-й розв'язок, що відповідає кореню $\lambda=\lambda_2$:

$$y_{12}=p_{12}e^{\lambda_2 t},\quad y_{22}=p_{22}e^{\lambda_2 t},\quad \ldots\quad, y_{n2}=p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

....

n-й розв'язок, що відповідає кореню $\lambda=\lambda_n$:

$$y_{1n}=p_{1n}e^{\lambda_n t},\quad y_{2n}=p_{2n}e^{\lambda_n t},\quad \ldots\quad, y_{nn}=p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Таким чином, одержали фундаментальну систему розв'язків.

Загальний розв'язок системи такий:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1y_{11}+C_2y_{12}+\ldots+C_ny_{1n},\\ y_2 &= C_1y_{21}+C_2y_{22}+\ldots+C_ny_{2n},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= C_1y_{n1}+C_2y_{n2}+\ldots+C_ny_{nn}. \end{aligned} \tag{33}$$

П р и к л а д 6. (Задача 6.6) Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння і записати дану систему та її розв'язок в матричній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо дану систему у матричній формі:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \frac{dY}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix},$$

таким чином $\dfrac{dY}{dt}=AY$.

Запишемо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 4\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)-12=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0.$$

Його корені $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 5$ є характеристичними числами матриці.

При $\lambda_1 = -2$ рівняння системи (31) для визначення власного вектора мають вид :

$$\begin{cases}(2-(-2))p_1 + 4p_2 = 0, \\ 3p_1 + (1-(-2))p_2 = 0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4p_1 + 4p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3p_2 = 0;\end{cases} \Rightarrow\ p_1 + p_2 = 0,$$

отже система звелась до рівняння, яке визначає вектор (1; –1).

При $\lambda_2 = 5$ рівняння системи (30) для визначення власного вектора мають вигляд:

$$\begin{cases}(2-5)p_1 + 4p_2 = 0, \\ 3p_1 + (1-5)p_2 = 0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3p_1 + 4p_2 = 0, \\ 3p_1 - 4p_2 = 0;\end{cases} \Rightarrow -3p_1 + 4p_2 = 0,$$

це рівняння визначає вектор $(4; 3)$.

Одержуємо фундаментальну систему розв’язків:

для $\lambda = -2$: $y_{11} = e^{-2t}$, $y_{21} = -e^{-2t}$; для $\lambda = 5$: $y_{12} = 4e^{5t}$, $y_{22} = 3e^{5t}$.

Тоді загальний розв’язок системи за формулою (33) має вигляд:

$$\begin{cases}x = C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{5t};\end{cases}$$

або у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Задачі контрольної роботи № 6

Задача 6.1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
2. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$.
3. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.
4. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
5. $y\ln y + xy' = 0$.
6. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
7. $(e^x+8)dy - ye^x dx = 0$.
8. $y(1+\ln y) + xy' = 0$.
9. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
10. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

Задача 6.2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.
2. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.
3. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

4. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$. 5. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$. 6. $y' = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{2x^2 - 2xy}$.

7. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$. 8. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$. 9. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.

10. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.

Задача 6.3. Знайти розв'язок задачі Коші.

1. $y' - y\mathrm{ctg}x = 2x\sin x, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
2. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \qquad y(-1) = \frac{3}{2}$.
3. $y' - y\mathrm{tg}x = \cos^2 x, \qquad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.
4. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, \qquad y(2) = 4$.
5. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, \qquad y(1) = e$.
6. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \qquad y(1) = 1$.
7. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad y(0) = 0$.
8. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$.
9. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, \qquad y(0) = 1$.
10. $y' + \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \qquad y(0) = 1$.

Задача 6.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'''x\ln x = y''$. 2. $\mathrm{tg}xy'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.

3. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}\cdot y' = 2x$. 4. $xy''' + y'' = x + 1$.

5. $y'''\mathrm{tg}x = y'' + 1$. 6. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$.

7. $(1+\sin x)y''' = \cos xy''$. 8. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

9. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$.

10. $y'' - 2y'\mathrm{ctg}2x = 2\mathrm{ctg}2x$.

Задача 6.5. Знайти розв'язок задачі Коші.

1. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$.
2. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3;\quad y(0) = \dfrac{4}{3},\quad y'(0) = \dfrac{1}{27}$.
3. $y'' + 4y = e^{-2x};\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$.
4. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x};\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$.
5. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3$.
6. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$.
7. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$.
8. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 3$.
9. $y'' - 2y' + y = 16e^{x};\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2$.
10. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x};\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 2$.

Задача 6.6. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння і записати дану систему та її розв'язок в матричній формі.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

§7. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Числові ряди

Література [4] – с. 254-259; [1] – с. 493-497; [5] – с. 249-256.

Нехай задано нескінченну послідовність чисел

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots.$$

Вираз $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) називається *числовим рядом*.

Розглянемо послідовність частинних сум

$S_1 = u_1,$

$S_2 = u_1 + u_2,$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$

...

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$

...

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається *сумою ряду* (1), а ряд називається *збіжним.*

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд називається *розбіжним.*

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Достатні умови збіжності ряду:

Література [4] – с. 295-261; [1] – с. 498-499; [5] – с. 257-259.

I. Ознаки порівняння.

1. *Перша ознака порівняння*. Нехай задано два знакододатні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ \text{ і } u_n \le v_n,\ n = 1,2,\ldots.$$

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2. *Друга ознака порівняння*. Якщо задано два знакододатні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} v_n ,$$

причому існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n}$ і ця границя не дорівнює 0, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

Розглянемо збіжність деяких знакододатніх рядів.

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називається гармонічним. Покажемо, що він розбіжний.

Відомо, що $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,\ n \in N$, звідси

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \ \Rightarrow \frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n} \ \Rightarrow \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n, \text{ тобто}$$

$$1 > \ln 2 - \ln 1;$$

$$\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2;$$

$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3;$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Додаючи ліві і праві частини нерівностей, дістанемо

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1), \ \Rightarrow S_n > \ln(n+1).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Отже гармонічний ряд розбіжний.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},\ a \neq 0$ – це ряд складений з членів геометричної прогресії з першим членом a і знаменником q.

Маємо $S_n = a + aq + \cdots + aq^n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$.

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, тобто ряд збіжний.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, тобто ряд розбіжний.

Якщо $q = -1$, то матимемо ряд $a - a + a - \cdots$, в якому

$$S_n = \begin{cases} a, \text{ якщо } n - \text{непарне}, \\ 0, \text{ якщо } n - \text{парне}, \end{cases}$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, тому ряд розбіжний.

Отже, ряд складений з членів геометричної прогресії збіжний при $|q|<1$ і розбіжний при $|q|\geq 1$.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ називається узагальненим гармонічним рядом. Можна довести, що він збіжний, якщо $\alpha > 1$, і розбіжний, якщо $\alpha \leq 1$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$.

Розв'язання.

Застосуємо ознаку порівняння. Порівнюємо з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, який збіжний, так як його члени утворюють геометричну прогресію із знаменником $q = \frac{1}{5} < 1$, а оскільки $\frac{1}{n \cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n}$, $n = 1,2,...$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$ – теж збіжний.

Література [4] – с. 261-265; [1] – с. 501-502; [5] – с. 260-261.

II. Ознака Д'Аламбера.

Якщо для знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $(u_n > 0,\ n = 1,2,\ldots)$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha,$$

то

1) цей ряд збіжний при $\alpha < 1$;
2) цей ряд розбіжний при $\alpha > 1$.

Зауваження.

1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, то існує номер N_1 такий, що $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ або $u_{n+1} > u_n$ при $n > N_1$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – розбіжний.

2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то ознака Д'Аламбера відповіді не дає, слід застосувати іншу ознаку.

П р и к л а д 2. (Задача 7.1(а)) Застосовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+1}\cdot\frac{1}{4^n}$.

Розв'язання.

$$u_n=\frac{n!}{2n+1}\cdot\frac{1}{4^n};\; u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2n+3}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{2n+3}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n(2n+1)}{n!}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}=\infty.$$

Заданий ряд розбіжний.

П р и к л а д 3. Застосовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{6^n}.$$

Розв'язання.

$$u_n=\frac{(n+1)^2}{6^n};\; u_{n+1}=\frac{(n+2)^2}{6^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{6^{n+1}}\cdot\frac{6^n}{(n+1)^2}=\frac{1}{6}<1.$$

Заданий ряд збіжний.

Література [4] – с. 265-266; [1] – с. 502-503; [5] – с. 262-263.

III. Радикальна ознака Коші.

Якщо для знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\alpha$, то

1) ряд збіжний при $\alpha<1$;
2) ряд розбіжний при $\alpha>1$.

Зауваження.

1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$, то існує номер N_1 такий, що $\sqrt[n]{u_n}>1$ або $u_n>1$ при $n>N_1$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ розбіжний.

2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то ознака Коші відповіді не дає, слід застосувати іншу ознаку.

П р и к л а д 4. (Задача 7.1(б)) Застосовуючи радикальну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

Розв'язання.

$$u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{4}e<1.$$

Даний ряд збіжний.

Література [4] – с. 266-268; [1] – с. 509-505; [5] – с. 263-267.

<u>IV. Інтегральна ознака Коші.</u>

Нехай функція $f(x)$, визначена на проміжку $[1;+\infty]$ є додатною та незростаючою на цьому проміжку. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний (розбіжний) одночасно із знакододатнім числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots.$$

П р и к л а д 5. Застосовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(n+1)}$.

Розв'язання.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$. Розглядаємо функцію $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ на проміжку $[1;+\infty)$. Функція визначена та додатна на цьому проміжку. Покажемо, що на проміжку $[1;+\infty)$ вона незростаюча.

$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Так як на проміжку $[1;+\infty)$, $f'(x)<0$, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку. Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{2}(\lim_{x\to\infty}\left|x^2+1\right|-\ln 2)=\infty.$$

Інтеграл розбіжний, отже і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ – розбіжний.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln^2(n+1)}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння. Для порівняння оберемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ і дослідимо його на збіжність. Для дослідження збіжності цього ряду використаємо інтегральну ознаку Коші. Розглядаємо функцію $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ на проміжку $[1;+\infty)$. Функція визначена і додатна на цьому проміжку. Покажемо, що вона не зростає на цьому проміжку.

$$f'(x)=-\frac{\ln^2(x+1)+2\ln(x+1)}{(x+1)^2\ln^4(x+1)}.$$

На проміжку $[1;+\infty)$ $f'(x)<0$, тобто функція $f(x)$ спадає.

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^{\infty} =$$

$$= -\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Інтеграл збіжний, а отже збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

До рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln^2(n+1)}$ застосуємо граничну ознаку порівняння. В даній задачі

$$u_n = \frac{1}{(3n+1)\ln^2(n+1)},\ v_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)},$$

а отже

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)\ln^2(n+1)}{(n+1)\ln^2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)}{(n+1)} = 3.$$

Так як існує скінченна границя відмінна від нуля, то ряди одночасно збіжні. Отже досліджуваний ряд також збіжний.

Знакозмінні ряди

Література [4] – с. 272-273; [1] – с. 505-509; [5] – с. 268-274.

Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними, так і від’ємними називається *знакозмінним*.

До знакозмінних рядів належать і ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...,\ u_n > 0,\ n = 1,2,...,$$

знаки в яких строго чергуються (їх називають також <u>*знакопочережними*</u>).

Теорема Лейбніца. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ збіжний, якщо

1) $u_{n+1} < u_n,\ n = 1, 2, \ldots;$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

При цьому сума додатна і не перевищує першого його члена.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Розв'язання.

Це знакозмінний ряд. Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > ...,$ тобто $u_{n+1} > u_n,\ n = 1,2,...;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0.$

Умови теореми виконуються, отже ряд збіжний.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається <u>*абсолютно збіжним*</u>, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, складений з модулів його членів, є збіжним.

Наприклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ є абсолютно збіжним, так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, складений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, складений з модулів його членів, розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називають <u>*умовно збіжним*</u>.

Наприклад, знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ умовно збіжний.

Степеневі ряди

Література [4] – с. 275-284; [1] – с. 512-523; [5] – с. 281-299.

Ряд $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, членами якого є функції, визначені на деякій множині E, називається <u>*функціональним рядом.*</u>

Функціональний ряд виду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні числа, називають степеневим рядом.

Інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ називають такий інтервал $(-R; R)$, що для кожної точки x, яка лежить в середині цього інтервалу, ряд збіжний, і причому абсолютно, а для точок x, які знаходяться зовні цього інтервалу, ряд розбіжний. Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду.

Питання про збіжність ряду при $x=\pm R$ (на кінцях інтервалу) розв'язується для кожного ряду окремо.

Для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду можна застосувати одну з формул:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ або } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

П р и к л а д 7. (Задача 7.2) Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n, \text{ якщо } a_n=\frac{2^n}{3n+1}.$$

Розв'язання.

Скористаємося формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(3n+4)}{(3n+1)2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$. Отже, інтервал збіжності степеневого ряду $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=\frac{1}{2}$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots$.

Порівняємо його з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним.

За граничною ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}=3$ ряди поводять себе однаково, отже числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$ теж розбіжний.

При $x=-\dfrac{1}{2}$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. Ряд знакозмінний. Дослідимо збіжність цього ряду за ознакою Лейбніца. Всі умови ознаки Лейбніца для даного ряду виконуються :

1) $u_{n+1}=\dfrac{1}{3n+4}$, $u_n=\dfrac{1}{3n+1}\Rightarrow\dfrac{1}{3n+4}<\dfrac{1}{3n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n+1}=0$.

Отже, ряд збіжний.

Область збіжності даного степеневого ряду $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів

Література [4] – с. 292-297; [1] – с. 524-527; [5] – с. 307-313.

При наближених обчисленнях потрібно вміти розкладати функції в степеневий ряд.

Для розв'язування задач використовують такі розклади основних елементарних функцій в степеневі ряди Маклорена:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R;$

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in R;$

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in R;$

4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots,\ |x|<1;$

5) $arctg\ x=x-\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ |x|<1;$

6) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ |x|<1.$

П р и к л а д 8. Розкласти по степенях x функції:

а) $f(x)=\ln(1+3x)$; б) $f(x)=\sqrt[3]{8+7x}$.

Розв'язання.

а) $f(x)=\ln(1+3x)$. Нехай $t=3x$. Використаємо формулу 4.

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}+\ldots,\ |t|<1.$$

Підставимо $t=3x$. Отже,

$$\ln(1+3x)=3x-\frac{(3x)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(3x)^n}{n}+\ldots=$$

$$=3x-\frac{3^2x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3^nx^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^nx^n}{n}.$$

Ряд збіжний, якщо $|3x|<1\Leftrightarrow -1<3x<1\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$, тобто $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

б) $f(x)=\sqrt[3]{8+7x}$. Запишемо: $f(x)=2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{7}{8}x}=2\left(1+\frac{7}{8}x\right)^{\frac{1}{3}}$.

Так як $(1+t)^m=1+mt+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n+\ldots,\ |t|<1$,

то підставивши $m=\frac{1}{3},\ t=\frac{7}{8}x$ отримаємо:

$$\left(1+\frac{7}{8}x\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{8}\right)^2x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{7}{8}\right)^3x^3+$$

$$+\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{7}{8}\right)^nx^n+\ldots=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{7}{8}\right)^2x^2+$$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}\left(\frac{7}{8}\right)^3x^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{7}{8}\right)^nx^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{7}{24}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)\cdot 7^n}{3^n\cdot n!\cdot 8^n}x^n.$$

$$\left|\frac{7}{8}x\right|<1\Rightarrow -\frac{8}{7}<x<\frac{8}{7},\ \text{тобто}\ x\in\left(-\frac{8}{7};\frac{8}{7}\right).$$

Тому розклад заданої функції в степеневий ряд має вид:

$$\sqrt[3]{8+7x}=2+\frac{7}{12}x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)\cdot 7^n}{3^n\cdot n!\cdot 8^n}x^n,\ x\in\left(-\frac{8}{7};\frac{8}{7}\right).$$

Інтегрування функцій за допомогою степеневих рядів.

Література [4] – с. 299-301; [1] – с. 527-531; [5] – с. 313-323.

Наближене обчислення визначених інтегралів виконується у такому порядку:

1) підінтегральна функція розкладається в степеневий ряд;
2) отриманий степеневий ряд почленно інтегрується;
3) наближено обчислюється сума степеневого ряду.

При цьому необхідно щоб межі інтегрування знаходились в області збіжності степеневого ряду.

Приклад 9. (Задача 7.3) Обчислити

$$\int_0^1 \cos x^2 dx$$

з точністю 0,001.

Розв'язання.

Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд. Для цього скористаємося розкладом функції $\cos x$ в степеневий ряд:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Отримаємо

$$\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots .$$

Почленно інтегруємо даний ряд:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot \left. \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4n+1} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 5} + \frac{1}{4! \cdot 9} - \frac{1}{6! \cdot 13} + \cdots .$$

Отриманий ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца. Тому для забезпечення точності обчислення беремо всі ті члени, абсолютна величина яких перевищує задану точність:

$$u_1 = 1, \ u_2 = \frac{1}{2! \cdot 5} = 0.1, \ u_3 = \frac{1}{4! \cdot 9} \approx 0{,}00463, \ u_4 = \frac{1}{6! \cdot 13} \approx 0{,}00011 < 0{,}001.$$

Для знаходження інтеграла з точністю до 0,001 візьмемо перші три члени:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 1 - 0{,}1 + 0{,}0046 \approx 0{,}9046 .$$

Розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Література [4] – с. 301-304; [1] – с. 527-531; [5] – с. 313-323.

Розглянемо задачу Коші для рівняння $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Наближений розв'язок диференціального рівняння записуємо у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

В цьому розкладі перші n коефіцієнтів відомі з початкових умов, наступні коефіцієнти, починаючи з $y^{(n)}(x_0)$ знаходяться послідовним диференціюванням заданого рівняння, або методом порівняння коефіцієнтів.

П р и к л а д 10. (Задача 7.4) Знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = 2\cos x - xy^2,$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$.

Розв'язання.

Розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді ряду Маклорена, взявши з нього три перші члени:

$$y(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Якщо хоча б один із коефіцієнтів рівний нулю, то будемо шукати наступні члени.

Коефіцієнт $f(0) = y(0) = 1$ заданий в умові задачі.

$f'(0) = y'(0) = 2\cos 0 - 0 \cdot 1^2 = 2$.

Далі будемо диференціювати рівняння $y' = 2\cos x - xy^2$:

$y'' = -2\sin x - y^2 - 2xyy' \Rightarrow f''(0) = y''(0) = -2\sin 0 - 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = -1.$

Підставивши коефіцієнти в рівність

$$y(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2,$$

остаточно дістанемо

$$y(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{(-1)}{2!}x^2 \Rightarrow y(x) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2!}.$$

Ряди Фур'є

Література [4] – с. 328-343; [1] – с. 538-551; [5] – с. 329-343.

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π, що визначена на сегменті $[-\pi;\pi]$, називається ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{1}$$

де $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ (n=1,2,\ldots)$.

Якщо ряд (1) збіжний, то його сума $S(x)$ – періодична функція з періодом 2π, тобто $S(x+2\pi)=S(x)$.

Теорема. (достатня умова подання функції через її ряд Фур'є).

Нехай $f(x)$ – 2π періодична і кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi;\pi]$ функція. Тоді ряд Фур'є цієї функції збіжний на відрізку $[-\pi;\pi]$ до функції $S(x)$, при цьому

1) $S(x)=f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$;

2) якщо x_0 – точка розриву першого роду функції $f(x)$, то

$$S(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)}{2};$$

3) $$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi+0}f(x)}{2}.$$

Нехай кусково-диференційовна функція $f(x)$ парна на відрізку $[-\pi;\pi]$, тоді

$$b_n=0,\ a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n=1,2,\ldots.$$

Отже, ряд Фур'є матиме вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ n=1,2,\ldots.$$

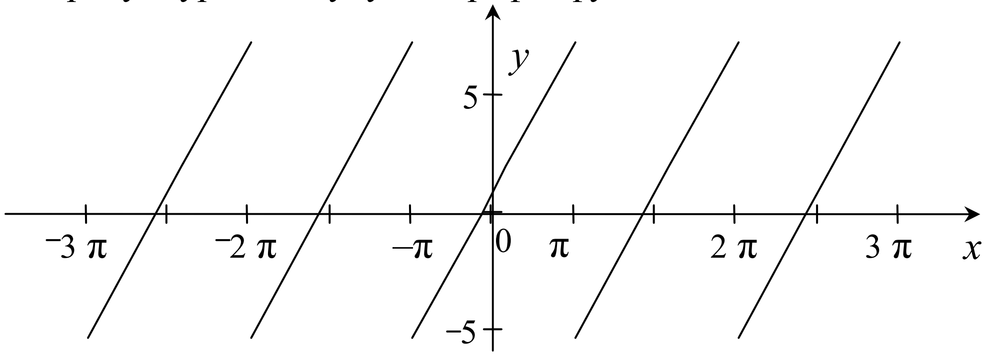
Аналогічно, для непарної кусково-диференційовної на інтервалі $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ ряд Фур'є запишеться у вигляді

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\ldots.$$

П р и к л а д 1 1 . (Задача 7.5) Розкласти задану функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi;\pi)$, якщо в цьому інтервалі $f(x)=2x+1$ і функція періодична з періодом 2π.

Розв'язання.

Функція кусково-диференційована на інтервалі $(-\pi;\pi)$, тому її можна подати через ряд Фур'є. При цьому задача зводиться до знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є. Побудуємо графік функції



Визначимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)dx=\frac{1}{\pi}(x^2+x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi^2+\pi-\pi^2+\pi)=2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos nxdx=\left|\begin{matrix}u=2x+1 & du=2dx\\ dv=\cos nxdx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(2x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(2\pi+1)\sin\pi n-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}(-2\pi+1)\sin(-\pi n)+\frac{2}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\cos\pi n-\frac{2}{n^2}\cos(-\pi n)\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\sin nxdx=\left|\begin{matrix}u=2x+1 & du=2dx\\ dv=\sin nxdx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(2x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(2\pi+1)\cos\pi n+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}(-2\pi+1)\cos(-\pi n)+\frac{2}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(-1)^n(-2\pi-1-2\pi+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n^2}(\sin\pi n-\sin\pi n)\right)=\frac{(-1)^n}{\pi n}(-4\pi)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, розклад функції $f(x)=2x+1$ в ряд Фур'є має вигляд

$$2x+1=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=1+4\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right),$$

$-\pi<x<\pi.$

Зауваження. При обчисленні коефіцієнтів ми використали, що $\sin \pi n=0,\ \cos \pi n=(-1)^n$.

Задачі контрольної роботи №7

Задача 7.1. Дослідити на збіжність ряд.

а) Застосовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2n!}{(2n)!}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(5/n)}{n!}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\mathrm{tg}\frac{1}{5^n}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

б) Застосовуючи радикальну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+3}\right)^{n^2}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{arctg}\frac{\pi}{4n})^n$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

в) Застосовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$. 2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$. 8. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

Задача 7.2. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$.

1. $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$. 2. $a_n=\dfrac{2^n}{n(n+1)}$. 3. $a_n=\dfrac{(2n)!}{n^n}$. 4. $a_n=\dfrac{3^n n!}{(n+1)^n}$.

5. $a_n=\dfrac{n}{3^n(n+1)}$. 6. $a_n=\dfrac{n+1}{3^n(n+2)}$. 7. $a_n=\dfrac{5^n}{\sqrt[n]{n}}$. 8. $a_n=\dfrac{n+2}{n(n+1)}$.

9. $a_n=\dfrac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$. 10. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Задача 7.3. Обрахувати визначений інтеграл $\int\limits_0^b f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд і проінтегрувавши його почленно.

1. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{3}}$, $b=1$. 2. $f(x)=x\,\mathrm{arctg}x$, $b=0{,}5$.

3. $f(x)=\cos\sqrt{x}$, $b=1$. 4. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$, $b=0{,}5$.

5. $f(x)=x\ln(1+x^2)$, $b=0{,}5$. 6. $f(x)=xe^{-x}$, $b=0{,}5$.

7. $f(x)=\mathrm{arctg}x^2$, $b=0{,}5$. 8. $f(x)=\sin x^2$, $b=1$.

9. $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}$, $b=0{,}5$. 10. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $b=0{,}5$.

Задача 7.4. Знайти три перших, відмінних від нуля членів розкладу в степеневий ряд розв’язку $y=y(x)$ диференціального рівняння $y'=f(x,\,y)$, що задовольняє початковій умові $y(0)=y_0$.

1. $y'=\cos x+y^2$; $y(0)=1$. 2. $y'=e^x+y$; $y(0)=4$.

3. $y'=e^x+y^2$; $y(0)=0$. 4. $y'=x^2+y^2$; $y(0)=2$.

5. $y'=y+y^2$; $y(0)=3$. 6. $y'=\sin x+\dfrac{y^2}{2}$; $y(0)=1$.

7. $y'=2e^y-xy$; $y(0)=0$. 8. $y'=2e^y+xy$; $y(0)=0$.

9. $y'=\sin x+y^2$; $y(0)=1$. 10. $y'=x+x^2+y^2$; $y(0)=5$.

Задача 7.5. Розкласти задану функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi;\pi)$.

1. $f(x)=x+1$. 2. $f(x)=x^2+1$. 3. $f(x)=x^2$.

4. $f(x)=|x|$. 5. $f(x)=1+|x|$. 6. $f(x)=|1-x|$. 7. $f(x)=x-1$.

8. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ x, 0\le x<\pi.\end{cases}$ 9. $f(x)=\begin{cases}2, -\pi<x<0,\\ 1, 0\le x<\pi.\end{cases}$ 10. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$.

§8. КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Подвійний інтеграл

Література [4] – с. 160-188; [1] – с. 564-581; [5] – с. 224-246.

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D\subset R_2$. Розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i=1,2,...,n$. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i, \tag{1}$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $z=f(x,y)$ по області D. Нехай $\lambda=\max\limits_{i=1,2,..,n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda\to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS, \text{ або } \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Основні властивості подвійного інтеграла.

1. (*Лінійність* подвійного інтеграла.) Якщо C_1 і C_2 сталі дійсні числа, то
$$\iint\limits_D (C_1 f(x,y)\pm C_2 g(x,y))\,dxdy = C_1\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \pm C_2\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$
2. (*Адитивність* подвійного інтеграла.) Якщо область інтегрування D функції $f(x,y)$ розбити на області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Обчислення подвійного інтеграла.

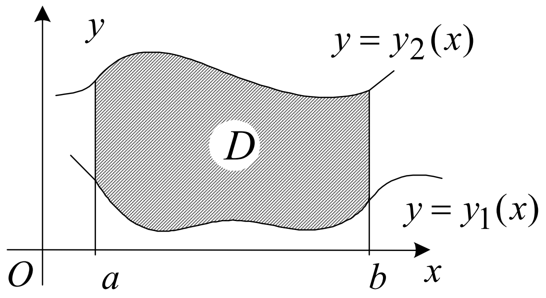


Рис. 1

Якщо в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ область інтегрування D обмежена знизу і зверху двома неперервними кривими

$$y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ y_1(x) \le y_2(x),$$

а зліва і справа двома прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 1), то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx .$$

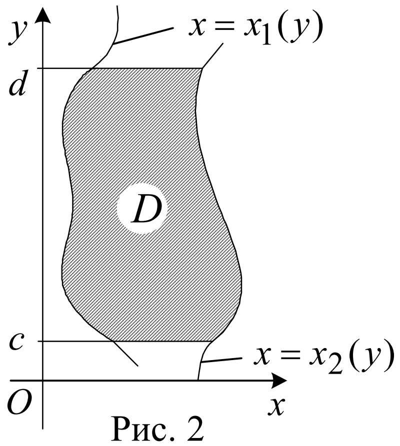


Рис. 2

У повторному інтегралі, що стоїть в цій формулі справа, спочатку обчислюють внутрішній інтеграл по змінній y, вважаючи x величиною сталою. Потім від одержаного результату беруть зовнішній інтеграл по x на проміжку $[a, b]$. Повторний інтеграл записують у вигляді:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

<u>Зауваження 1.</u> Область D, що задовольняє переліченим умовам, називається <u>*правильною в напрямі осі*</u> Oy.

Якщо ж область D обмежена неперервними кривими

$$x = x_1(y),\ x = x_2(y),\ x_1(y) \le x_2(y),$$

і прямими $y = c,\ y = d$, де $c \le y \le d$ (область <u>*правильна в напрямі осі*</u> Ox) (рис. 2), то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$$

<u>Зауваження 2.</u> Якщо область D не являється правильною ні в напрямі осі Ox, ні в напрямі осі Oy (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю в напрямі осі Ox чи Oy. Нехай D розбиваємо на області D_1, D_2, D_3,тоді використовуючи властивість адитивності подвійного інтеграла, матимемо:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x, y)dxdy .$$

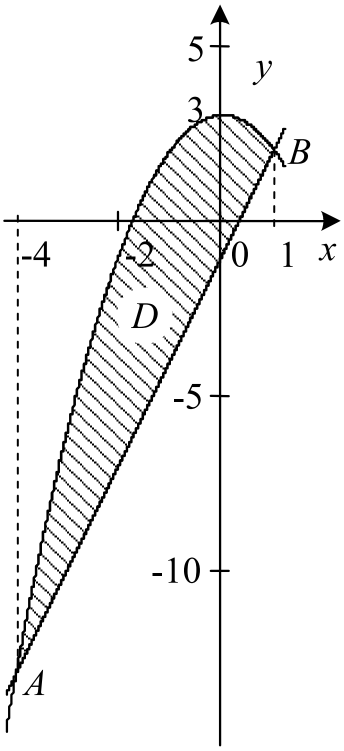
П р и к л а д 1. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+y)dxdy,$$

якщо область D обмежена лініями $y=3-x^2$ і $y=3x-1$.

Розв'язання.

Побудуємо область D. Лінія $y=3-x^2$ – парабола з вершиною в точці $(0;3)$, симетрична відносно осі Oy і обмежує область D зверху. Лінія $y=3x-1$ – пряма, яка обмежує область знизу.



Знайдемо координати точок перетину цих ліній:

$$\begin{cases} y=3-x^2, \\ y=3x-1; \end{cases} \Rightarrow A(-4;-13),\ B(1;2).$$

Так як область D правильна в напрямі осі Oy, то

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_{-4}^{1} dx \int_{3x-1}^{3-x^2} (x+y)dy = \int_{-4}^{1} \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{3x-1}^{3-x^2} \right) dx =$$

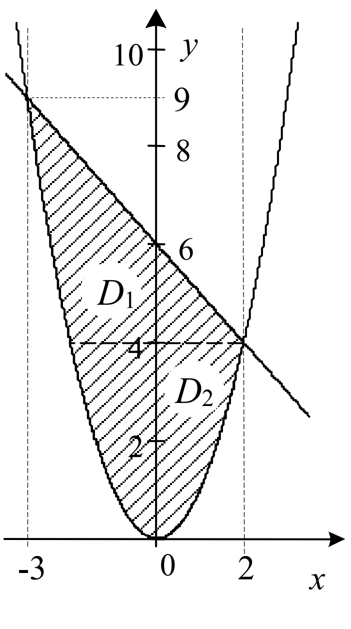
$$= \int_{-4}^{1} \left(x(3-x^2) + \frac{(3-x^2)^2}{2} - x(3x-1) - \frac{(3x-1)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} \left(3x - x^3 + \frac{9}{2} - 3x^2 + \frac{x^4}{2} - 3x^2 + x - \frac{(3x-1)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{9}{2}x + \frac{x^5}{10} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{(3x-1)^3}{18} \right) \Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{2} + \frac{1}{10} - 2 + \frac{1}{2} - \frac{4}{9} - 24 + 64 + 18 + \frac{512}{5} - 128 - 8 - \frac{2197}{18} = -93{,}75.$$

П р и к л а д 2. (Задача 8.1) Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $\int_{-3}^{2} dx \int_{x^2}^{6-x} f(x,y)dy$.



Розв'язання.

Побудуємо область D, яка обмежена зліва і справа прямими $x=-3, x=2$, знизу параболою $y=x^2$, зверху прямою $y=6-x$ (рис. 2). Область правильна в напрямі осі Oy. Тобто

$$-3 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 6 - x.$$

Спроектуємо область D на вісь Oy. Проекцією буде відрізок $[0; 9]$.

Оскільки лінія, на якій містяться точки виходу з області (під час руху зліва направо), задана двома різними рівняннями, то дану область потрібно розбити на дві частини D_1 і D_2. Маємо:

$$D_1 = \left\{ 0 \le y \le 4; -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \right\};$$

$$D_2 = \left\{ 4 \le y \le 9; -\sqrt{y} \le x \le 6 - y \right\}.$$

Тому $$\int_{-3}^{2} dx \int_{x^2}^{6-x} f(x, y)dy = \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx + \int_{4}^{9} dy \int_{-\sqrt{y}}^{6-y} f(x, y)dx.$$

Потрійний інтеграл

Література [4] – с. 198-205; [1] – с. 585-592; [5] – с. 255-267.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в замкненій обмеженій області $G \subset R_3$. Розіб’ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об’єми яких дорівнюють ΔV_i, $i = 1,2,...,n$. У кожній області G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i, \qquad (2)$$

яку назвемо *__інтегральною сумою__* для функції $f(x, y, z)$ по області G. Нехай $\lambda = \max\limits_{i=1,2,..,n} d(G_i)$ – найбільший з діаметрів областей G_i.

Якщо інтегральна сума (2) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частинні області G_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *__потрійним інтегралом__* і позначається одним із таких символів:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV, \text{ або } \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz.$$

<u>Основні властивості потрійного інтеграла.</u>

1. (*__Лінійність__* потрійного інтеграла.) Якщо C_1 і C_2 сталі дійсні числа, то
$$\iiint\limits_G (C_1 f(x, y, z) \pm C_2\varphi(x, y, z))dV = C_1 \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV \pm C_2 \iiint\limits_G \varphi(x, y, z)\, dV.$$
2. (*__Адитивність__* потрійного інтеграла.) Якщо область інтегрування G функції $f(x, y, z)$ розбити на частини G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то
$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{G_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint\limits_{G_2} f(x, y, z)\, dV.$$

Обчислення потрійного інтеграла.

Нехай D – проекція області інтегрування G на площину Oxy. І нехай область D, правильна в напрямі осі Oy, а всяка пряма, що проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oz перетинає границю області G рівно в двох точках, які лежать на поверхнях $z = z_1(x, y),\ z = z_2(x, y)$ (рис. 3), тоді

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \quad (3)$$

В цій формулі спочатку обчислюємо інтеграл по змінній z при умові, що x, y – сталі величини, потім повторний інтеграл по змінних y і x.

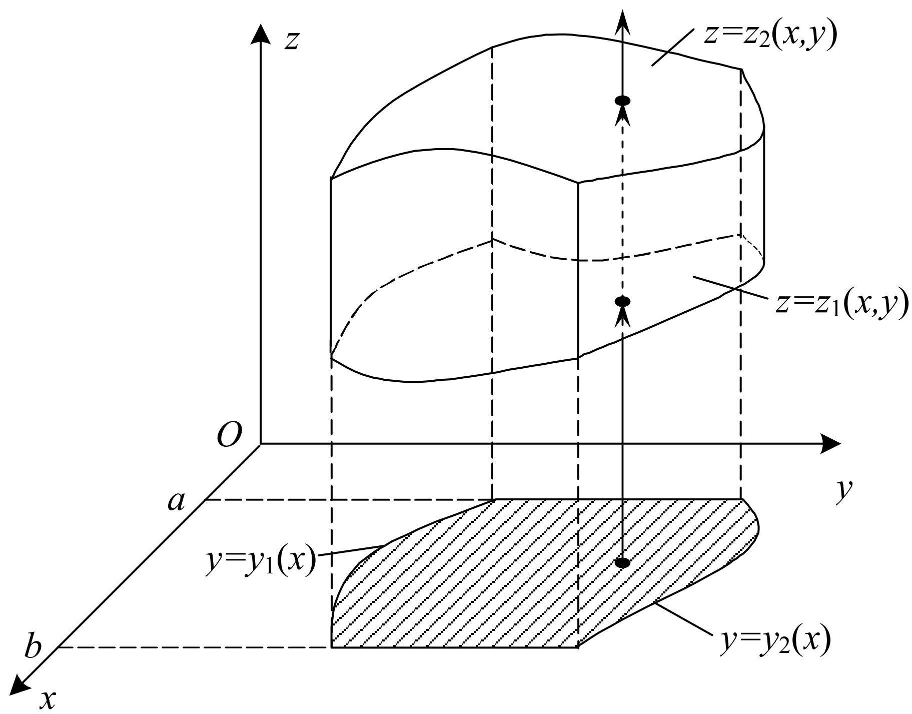
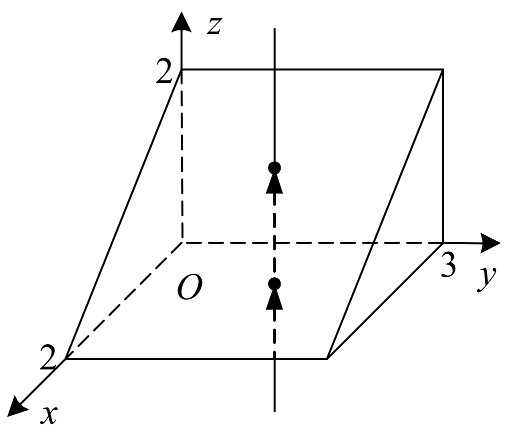


Рис. 3

П р и к л а д 3. Обчислити $\iiint\limits_G xdxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x = 0, y = 0, z = 0, y = 3, x + z = 2$.

Розв'язання.



Область G проектується на площину Oxy у прямокутник $D = \{0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 3\}$. Оскільки $z_1 = 0$ (вхідна область), $z_2 = 2 - x$ (вихідна область), то за формулою (3) маємо

$$\int_0^2 dx\int_0^3 dy\int_0^{2-x} xdz=\int_0^2 xdx\int_0^3\left(z\,\Big|_0^{2-x}\right)dy=$$

$$=\int_0^2 xdx\int_0^3 (2-x)dy=$$

$$=\int_0^2\left(x\cdot(2-x)\cdot y\,\Big|_0^3\right)dx=3\int_0^2(2x-x^2)dx=3\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=3\left(4-\frac{8}{3}\right)=4.$$

Заміна змінної в потрійному інтегралі

Література [4] – с. 205-208; [1] – с. 589-592; [5] – с. 263-266.

Розглянемо потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, де функція $f(x,y,z)$ неперервна в області G простору R_3. Нехай область G простору $Oxyz$ пов'язана взаємно однозначною відповідністю з областю G' простору $O'uvw$ за допомогою формул

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w),$$

де $x(u,v,w),\quad y(u,v,w),\ z(u,v,w)$ неперервні і мають частинні похідні 1-го порядку по змінних $u,\ v,\ w$ в області G'.

Визначник

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix}$$

називають <u>*якобіаном*</u> даного відображення.

Якщо $J(u,v,w)\neq 0$ в області G', то має місце <u>*формула заміни змінних у потрійному інтегралі*</u>:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G'} f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))\cdot\left|J(u,v,w)\right|dudvdw.$$

На практиці найчастіше використовуються циліндричні та сферичні координати.

1) <u>*Циліндричні координати*</u> $\rho,\ \varphi,\ z$, пов'язані з декартовими x,y,z співвідношеннями

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z,\ 0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<z<+\infty,$$

якобіан перетворення $J=-\rho$, тому потрійний інтеграл у циліндричних координатах

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

2) <u>*Сферичні координати*</u> $r,\ \varphi,\ \theta$, пов'язані з декартовими x, y, z співвідношеннями

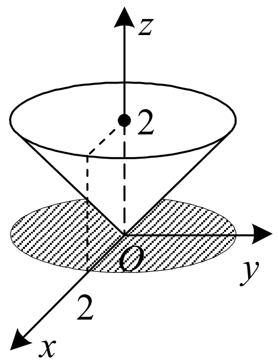
$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$$

якобіан перетворення $J = r^2\sin\theta$, тому потрійний інтеграл у сферичних координатах

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

П р и к л а д 4. Обчислити $\iiint\limits_{G} z dxdydz$, якщо область G обмежена конічною поверхнею $z^2 = x^2 + y^2$ і площиною $z = 2$.

Розв'язання.



Дане тіло, обмежене знизу конусом $z^2 = x^2 + y^2$, а зверху площиною $z = 2$. Його проекцією на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \le 4$. Використаємо циліндричні координати. Рівняння заданого конуса в циліндричних координатах набуде вигляду $z = \rho$, а рівняння кола, що обмежує проекцію, $\rho = 2$. Отже маємо:

$$\iiint\limits_{G} z dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_\rho^2 z dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(\rho \frac{z^2}{2}\Bigg|_\rho^2 \right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho(2 - \frac{\rho^2}{2}) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2\rho - \frac{\rho^3}{2} \right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{8} \right)\Bigg|_0^2 \right) d\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

Деякі застосування потрійного інтеграла

Література [4] – с. 208-210; [1] – с. 592-594; [5] – с. 268-281.

<u>Обчислення об'ємів.</u> Якщо деяке тіло G, яке є кубовною замкненою областю R_3, то його об'єм знаходиться за формулою

$$V = \iiint\limits_{G} dxdydz.$$

П р и к л а д 5. (Задача 8.2) Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 1 - 6(x^2 + y^2),\ z = 12x + 1$.

Розв'язання.

Визначимо проекцію заданого тіла на площину Oxy, для чого виключимо z із системи

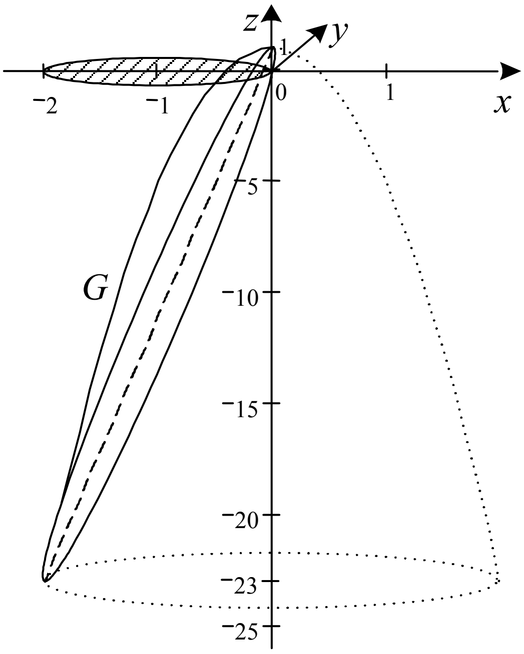
$$\begin{cases} z = 1 - 6(x^2 + y^2), \\ z = 12x + 1. \end{cases} \Rightarrow 1 - 6(x^2 + y^2) = 12x + 1 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Отже, проекцією тіла (області G) на площину Oxy є круг, обмежений колом $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Перейдемо до циліндричних координат. Тоді

$$V = \iiint\limits_{G'} \rho d\rho d\varphi dz.$$

Рівняння кола $x^2 + y^2 = -2x$, поверхні $z = 1 - 6(x^2 + y^2)$ та площини $z = 12x + 1$ в циліндричних координатах мають відповідно вигляд:

$$\rho = -2\cos\varphi, \ z = 1 - 6\rho^2, \ z = 12\rho\cos\varphi + 1,$$



тому

$$V = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_{12\rho\cos\varphi+1}^{1-6\rho^2} dz =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} (1 - 6\rho^2 - 12\rho\cos\varphi - 1)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-6\frac{\rho^4}{4} - 12\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi \right)\Bigg|_0^{-2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-24\cos^4\varphi + 32\cos^4\varphi) d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 8\cos^4\varphi \, d\varphi = 8 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi =$$

$$= 2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 2\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 3\pi \ \text{(куб. од.)}$$

Криволінійний інтеграл

Література [4] – с. 217-226; [1] – с. 595-610; [5] – с. 281-305.

Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB (рис. 4) і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x,y)$. Розіб'ємо криву AB точками

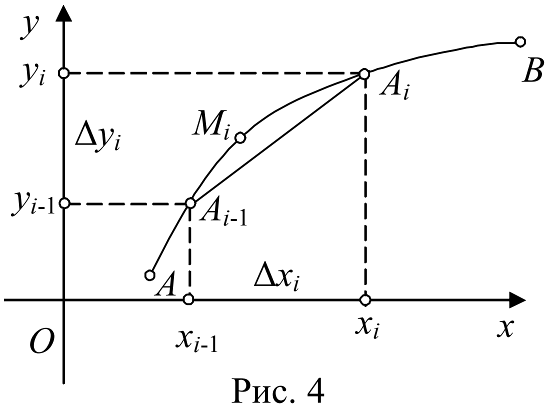


Рис. 4

$$A = A_0, A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_n = B$$

на n довільних частин, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$, $i = 1,2,...,n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i, \tag{4}$$

де Δx_i – проекція вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox.

Якщо при $\lambda = \max\limits_{i=1,2,...,n} \Delta x_i \to 0$ інтегральна сума (4) має скінченну границю, яка не залежить ні від розбиття кривої $\breve{AB}$, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають <u>*криволінійним інтегралом від функції*</u> $P(x,y)$ <u>*по координаті*</u> x вздовж кривої $\breve{AB}$ і позначають

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx\,.$$

Таким чином, $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i.$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x,y)$ по координаті y:

$$\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i,$$

де Δy_i – проекція вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на вісь Oy. Суму

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)\,dy$$

називають <u>*криволінійним інтегралом по координатах*</u> або <u>*криволінійним інтегралом другого роду від функцій*</u> P <u>*і*</u> Q <u>*по кривій*</u> AB і позначають символом $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$

<u>Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.</u>

Нехай крива $\breve{AB}$ задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

де функції $x(t)$ та $y(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому точці A кривої відповідає параметр α, а точці B – параметр β. І нехай функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні на кривій $\breve{AB}$, тоді має місце формула

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\,dt.$$

Зокрема, якщо крива $\breve{AB}$ задана рівнянням $y = y(x), a \le x \le b,$ де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a;b]$, то отримаємо

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)\big)\,dx.$$

Аналогічно, якщо крива $\breve{AB}$ задана рівнянням $x = x(y),\ c \le y \le d,$ причому функції $x(y)$ та $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c;d]$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{c}^{d} \big(P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\ \big)\,dy.$$

З цих формул слідує, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Зокрема:

1) При зміні напряму інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\breve{BA}} P\,dx + Q\,dy\,.$$

2) (*Адитивність* криволінійного інтеграла.) Якщо точка C розбиває дугу $\breve{AB}$ на дві частини, то

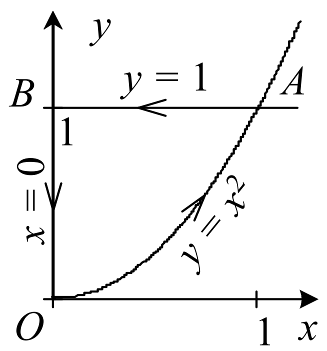
$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\breve{AC}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\breve{CB}} P\,dx + Q\,dy.$$

Криволінійний інтеграл по замкненій кривій L в додатному напрямку (проти годинникової стрілки) називають *криволінійним інтегралом по замкненому контуру* L і позначають $\oint\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,.$

З означенням, властивостями та правилами обчислення *криволінійних інтегралів першого роду* можна ознайомитися в [1] ст. 595-599.

Приклад 6. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{L} xydx + dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями $y = x^2,\ y = 1,\ x = 0.$

Розв'язання.



Застосовуючи властивість адитивності криволінійного інтеграла, маємо

$$\oint_L xydx + dy = \int_{\breve{OA}} xydx + dy + \int_{\breve{AB}} xydx + dy + \int_{\breve{BO}} xydx + dy.$$

З рівняння $y = x^2$ лінії $\breve{OA}$ дістаємо $dy = 2xdx$, тому

$$\int_{\breve{OA}} xydx + dy = \int_0^1 (x^3 dx + 2xdx) = \frac{5}{4};$$

з рівняння $y = 1$ лінії $\breve{AB}$ дістаємо $dy = 0$, тому $\displaystyle\int_{\breve{AB}} xydx + dy = \int_1^0 xdx = -\frac{1}{2};$

з рівняння $x = 0$ лінії $\breve{BO}$ дістаємо $dx = 0$, тому

$$\int_{\breve{BO}} xydx + dy = \int_1^0 dy = -1; \quad \text{отже} \quad \oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Формула Гріна

Література [4] – с. 226-228; [1] – с. 608-610; [5] – с. 301-305.

Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі цієї області.

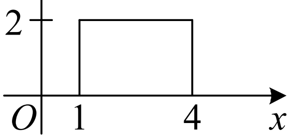
Теорема. Нехай D – деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді вірна <u>*формула Гріна*</u>

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy.$$

П р и к л а д 7. (Задача 8.3) Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Гріна.

$$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))dy, \; L: x = 1, x = 4, y = 0, y = 2.$$

Розв'язання.



В даному випадку

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \; Q(x, y) = y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + y \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

За формулою Гріна

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}dx + y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy =$$

$$=\iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy = \int_1^4 dx \int_0^2 y^2 dy = \int_1^4 \left(\frac{y^3}{3} \bigg|_0^2 \right) dx = \frac{8}{3}\int_1^4 dx = \frac{32}{3}.$$

Поверхневий інтеграл першого роду

Література [4] – с. 235-237; [1] – с. 618-626; [5] – с. 310-315.

Нехай в точках деякої кусково-гладкої поверхні σ визначена обмежена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок; нехай $\Delta\sigma_i$ – площа, а $d(\sigma_i)$ – діаметр частини поверхні σ_i, $i=1,2,...,n$. У кожній частині σ_i виберемо довільну точку $M(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ і складемо суму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i$.

Цю суму називають *інтегральною сумою для функції* $f(x,y,z)$ *по поверхні* σ.

Якщо при $\lambda = \max\limits_{i=1,2,...,n} d(\sigma_i) \to 0$ інтегральна сума має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i, цю границю називають *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f(x,y,z)$ по поверхні σ і позначають

$$\iint_\sigma f(x,y,z)d\sigma.$$

Таким чином, за означенням $\iint_\sigma f(x,y,z)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i$.

Обчислення поверхневих інтегралів першого роду.

Нехай гладка поверхня σ, задана рівнянням $z=z(x,y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Припустимо, що функція $f(x,y,z)$ неперервна на поверхні σ, а функції $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ неперервні в області D. Тоді має місце формула

$$\iint_\sigma f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

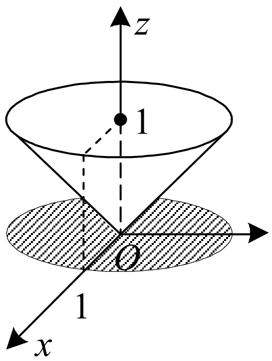
Аналогічно, якщо поверхня σ задається рівнянням $y=y(x,z)$ або $x=x(y,z)$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz,$$

або

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz,$$

де D_{xz} та D_{yz} – проекції поверхні σ на координатні площини Oxz та Oyz відповідно.



П р и к л а д 8. Обчислити $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, де σ – частина конічної поверхні $z^2 = x^2+y^2$ обмежена площинами $z=0$ та $z=1$.

Розв'язання.

Маємо $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$$

Тоді шуканий інтеграл перетворюється в подвійний інтеграл:

$$I = \iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma = \iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy.$$

Областю інтегрування D є круг $x^2+y^2 \le 1$, тому здійснимо перехід до полярної системи координат і отримаємо

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho = \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Поверхневий інтеграл другого роду

Література [4] – с. 233-237; [1] – с. 621-626; [5] – с. 316-319.

Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x,y)$ і $R(x,y,z)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ. Зорієнтуємо поверхню σ (виберемо на ній певну сторону). Розіб'ємо її довільно на n частин σ_i. Позначимо через D_i проекцію частини σ_i поверхні σ на площину Oxy, через ΔS_i – площу D_i, взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ, і зі знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ. Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i. \qquad (5)$$

Вираз (5) називається <u>*інтегральною сумою*</u>. Нехай $\lambda = \max\limits_{i=1,2,...,n} d(\sigma_i)$ – максимальний діаметр частин σ_i поверхні σ.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральна сума (5) має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають <u>*поверхневим інтегралом другого роду*</u> і позначають так:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy.$$

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i.

Поверхню σ можна також проектувати на координатні площини Oyz та Oxz. Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz, \quad \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\, dxdz,$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ – функції, визначені в точках поверхні σ.

На практиці найпоширенішими є поверхневі інтеграли, які об’єднують усі названі, тобто

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz + \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\, dxdz + \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy.$$

<u>Обчислення поверхневих інтегралів другого роду.</u>

Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні σ, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проекція поверхні σ на площину Oxy. Тоді маємо формулу

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\, dxdy.$$

У цій формулі подвійний інтеграл потрібно взяти із знаком “плюс”, якщо обрана верхня сторона поверхні (нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут) і із знаком “мінус”, якщо обрана нижня сторона поверхні (нормаль до поверхні утворює з віссю Oz тупий кут).

Аналогічно, якщо D_{yz}, D_{xz} – проекції поверхні σ на площини Oyz та Oxz відповідно, маємо

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\, dydz;$$

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)\,dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz.$$

Для обчислення загального інтеграла проектують поверхню σ на всі три координатні площини.

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

Якщо поверхня σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл – на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні σ.

Оскільки $dxdy = \cos\gamma\, d\sigma$, $dxdz = \cos\beta\, d\sigma$, $dydz = \cos\alpha\, d\sigma$, де $d\sigma$ – елемент площі поверхні σ; α, β, γ – кути між нормаллю до поверхні σ та осями Ox, Oy, Oz відповідно, то справедлива формула, що поєднує поверхневі інтеграли першого і другого роду

$$\iint_{\sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

<u>Зауваження.</u> Нехай відомо, що $\bar{n} = (n_x; n_y; n_z)$ – нормальний вектор поверхні σ, тоді $\cos\alpha = \dfrac{n_x}{|\bar{n}|}$, $\cos\beta = \dfrac{n_y}{|\bar{n}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{n_z}{|\bar{n}|}$, де $|\bar{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$.

П р и к л а д 9. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} x^2 y^2 z\,dxdy$ по верхній стороні верхньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розв'язання.

Проекцією сфери на площину xOy є круг D, обмежений колом $x^2 + y^2 = R^2$. Рівняння верхньої півсфери має вигляд $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; отже, $I = \iint_{\sigma} x^2 y^2 z\,dxdy = \iint_{D} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$. Здійснюючи перехід до полярних координат $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$ отримаємо

$$I = \iint_{D'} \rho^4 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\, d\rho d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\ d\varphi \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\rho.$$

Зробимо підстановку $\sqrt{R^2 - \rho^2} = t$, тоді $R^2 - \rho^2 = t^2$, $\rho\, d\rho = -tdt$, $\rho^4 = (R^2 - t^2)^2$, межі інтегрування $t_1 = R$, $t_2 = 0$. Отримаємо

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\int_0^R (R^2-t^2)^2t^2dt=\frac{2}{105}\pi R^7 .$$

Формула Стокса

Література [4] – с. 237-242; [1] – с. 628-631; [5] – с. 323-327.

Якщо L – орієнтований замкнений контур, який обмежує гладку орієнтовану поверхню σ (орієнтації σ і L узгоджені), і $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервно диференційовані на σ функції, то справедлива формула Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\sigma\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)d\sigma.$$

Умовно цю формулу можна записати так

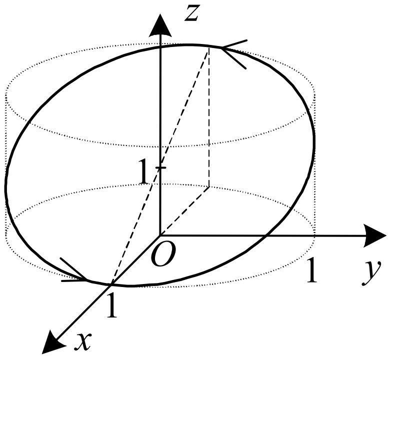
$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}d\sigma.$$

Використовуючи формулу зв'язку між поверхневими інтегралами першого і другого роду, отримаємо такий запис формули Стокса

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\sigma\begin{vmatrix}dydz & dxdz & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Приклад 10. Застосовуючи формулу Стокса, знайти інтеграл $\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, де L – крива $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+z=1;\end{cases}$ і обхід контуру L здійснюється проти ходу годинникової стрілки, якщо спостерігати з додатної сторони осі Oz.

Розв'язання.



Так як

$P(x,y)=y-z,\ Q(x,y)=z-x,\ R(x,y)=x-y;$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial P}{\partial z}=-1,\ \frac{\partial R}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\ \frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

то за формулою Стокса маємо:

$$I=\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=$$

$$= \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} d\sigma = \iint_{\sigma} (-2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma) d\sigma,$$

де σ частина площини $x+z=1$ обмежена еліпсом $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+z=1. \end{cases}$ Так як обхід здійснюється проти годинникової стрілки, то вибирається зовнішня сторона поверхні $x+z=1$ і $\cos\gamma$ повинен бути додатний. Нормальний вектор площини $x+z=1$ (коефіцієнти біля змінних) дорівнює $\bar{n}=(1,0,1)$, тому $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta = 0, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Отже напрямні косинуси відповідають вибраній стороні поверхні. Спроектуємо площину σ на координатну площину Oxy. Проекцією буде круг $x^2+y^2 \le 1$. Рівняння поверхні запишеться так: $z = 1-x$, тоді

$$d\sigma = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{1+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}.$$

Отже $I = -2 \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}dxdy = -4 \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = -4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = -4\pi.$

Формула Остроградського-Гаусса

Література [4] – с. 242-245; [1] – с. 626-628; [5] – с. 319-323.

Якщо функції $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ неперервні в замкнутій області G, обмеженій замкнутою гладкою поверхнею σ, то справедлива формула Остроградського-Гаусса

$$\oiint_{\sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma) d\sigma = \iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні σ.

З використанням поверхневого інтеграла другого роду цю формулу отримаємо у такому вигляді

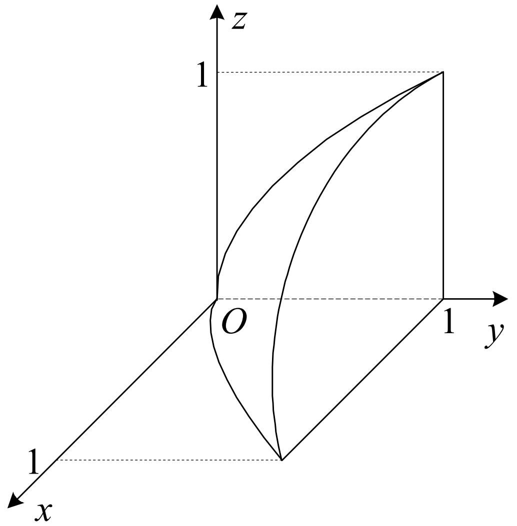
$$\oiint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

Приклад 11. За допомогою формули Остроградського-Гаусса обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S x^2dydz + xdxdz + xzdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні, розташованої в першому октанті і утвореної частинами параболоїда обертання $y = x^2 + z^2$ і площин: $y = 1,\ x = 0,\ z = 0$.

Розв'язання.

Оскільки

$P(x, y, z) = x^2,\ Q(x, y, z) = x,\ R(x, y, z) = xz$, то $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial R}{\partial z} = x.$



За формулою Остроградського-Гаусса

$$\iint\limits_S x^2dydz + xdxdz + xzdxdy = 3\iiint\limits_G xdxdydz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{y-x^2}} dz = 3\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y - x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int\limits_0^1 \left(\left. \frac{(y - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{\sqrt{y}} \right) dy = \int\limits_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{5}.$$

Елементи теорії поля

Література [5] – с. 327-348.

Нехай двостороння поверхня σ належить області G, в якій задано векторне поле $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$. Тоді потік векторного поля $\bar{a}$ через вибрану на поверхні σ сторону:

$$\Pi = \iint\limits_\sigma \langle \bar{a}, \bar{n}_0 \rangle d\sigma = \iint\limits_\sigma P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy,$$

де $\bar{n}_0$ – одиничний вектор нормалі до вибраної сторони поверхні σ.

Нехай замкнута крива L належить області G, в якій задане векторне поле $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$. Тоді циркуляція вздовж контуру L, на якому вибрано напрям,

$$\text{Ц} = \oint\limits_L \langle \bar{a}, d\bar{r} \rangle = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz, \text{ де } d\bar{r} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k}.$$

Приклад 12. (Задача 8.4) Дано векторне поле

$$\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$$

і площина $\alpha: x+y+z-1=0$; T – піраміда, утворена площиною α і координатними площинами; σ – основа піраміди, яка належить площині α; l – контур σ; $\overline{n}$ – зовнішня нормаль σ. Знайти:

1) потік векторного поля $\overline{a}$ через поверхню σ за напрямком $\overline{n}$;
2) циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ по замкненому додатно орієнтованому контуру l:
   а) безпосередньо;
   б) за допомогою формули Стокса;
3) потік векторного поля $\overline{\alpha}$ через зовнішню поверхню піраміди T:
   а) безпосередньо;
   б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Зробити рисунок.

Розв'язання.

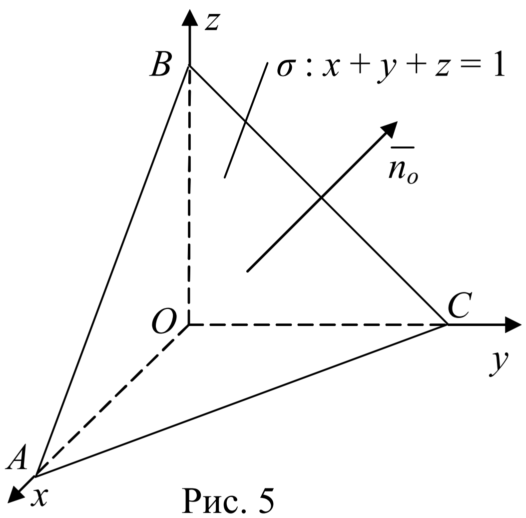


Рис. 5

1) Поверхня σ – це трикутник ABC. Трикутник ABC проектується взаємно однозначно на площину Oxy в область, яка являє собою ΔAOC. Рівняння поверхні $\alpha: x+y+z-1=0$, нормаль до якої $\vec{n}=(1;1;1)$. Одиничний нормальний вектор до поверхні σ:

$$\overline{n}_0=\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\pm\sqrt{1+1+1}}=\pm\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки $\overline{n}$ зовнішня нормаль (рис. 5), то вона утворює з віссю Oz гострий кут, тому $\overline{n}_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$ (тобто $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}>0$). Потік через поверхню σ знаходимо за формулою: $\Pi=\iint\limits_{\sigma}\langle\vec{a},\vec{n}_0\rangle d\sigma$.

Отже,

$$\Pi=\iint_{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2z)+\frac{1}{\sqrt{3}}(x+3y+z)+\frac{1}{\sqrt{3}}(5x+y)\right)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\sigma}(7x+4y-z)d\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(7x+4y-(1-x-y))\sqrt{1+1+1}dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}(8x+5y-1)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(8x+5y-1)dy=\int_0^1\left(\left(8xy+\frac{5}{2}y^2-y\right)\Bigg|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(8x(1-x)+\frac{5}{2}(1-x)^2-(1-x)\right)dx=\int_0^1\left(-\frac{11}{2}x^2+4x+\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{11}{6}x^3+2x^2+\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{11}{6}+2+\frac{3}{2}=\frac{5}{3}.$$

2а) Обчислимо циркуляцію безпосередньо

$$Ц=\oint_{ABCA}\langle\bar{a},d\bar{r}\rangle=\oint_{AC}\langle\bar{a},d\bar{r}\rangle+\oint_{CB}\langle\bar{a},d\bar{r}\rangle+\oint_{BA}\langle\bar{a},d\bar{r}\rangle.$$

$AC:\begin{cases}z=0,\\x+y=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dz=0,\\y=1-x;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dz=0,\\dy=-dx.\end{cases}$ Так як $d\bar{r}=dx\,\bar{i}+dy\,\bar{j}+dz\,\bar{k}$, то

$$\int_{AC}(x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz=\int_1^0(x+(x+3(1-x))(-1))dx=$$

$$=\int_1^0(3x-3)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)\Bigg|_1^0=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}.$$

$CB:\begin{cases}x=0,\\y+z=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=0,\\z=1-y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=0,\\dz=-dy.\end{cases}$

$$\int_{CB}(3y+z)dy+ydz=\int_1^0(y+1)dy=\left(\frac{1}{2}y^2+y\right)\Bigg|_1^0=-\frac{3}{2}.$$

$BA:\begin{cases}y=0,\\z=1-x;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dy=0,\\z=1-x;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dy=0,\\dz=-dx.\end{cases}$

$$\int_{BA}(x-2z)dx+5xdz=\int_0^1(-2-2x)dx=\left(-2x-x^2\right)\Big|_0^1=-3.$$

$$Ц=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-3=-3.$$

2б) Використовуємо формулу Стокса:

$$Ц=\oint\limits_{ACBA}\langle\vec{a},d\vec{r}\rangle=\iint\limits_{\sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-2z & x+3y+z & 5x+y\end{vmatrix}d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\sigma}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}(5x+y)-\frac{\partial}{\partial z}(x+3y+z)\right)\cos\alpha-\left(\frac{\partial}{\partial x}(5x+y)-\frac{\partial}{\partial z}(x-2z)\right)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+3y+z)-\frac{\partial}{\partial y}(x-2z)\right)\cos\gamma\right)d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\left((1-1)\cos\alpha-(5+2)\cos\beta+\right.$$

$$\left.++(1-0)\cos\gamma\right)d\sigma=\iint\limits_{\sigma}(-7\cos\beta+\cos\gamma)d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\frac{7}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}dxdy=$$

$$=-6\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy=-6\int_0^1(1-x)dx=-6\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-6\left(1-\frac{1}{2}\right)=-3.$$

3) Потік через зовнішню сторону поверхні піраміди T рівний сумі потоків через кожну з граней піраміди.

а) Обчислюємо потік безпосередньо:

$$П=П_1+П_2+П_3+П_4,$$

де $П_1$ – потік через поверхню ΔABC; $П_2$ – через поверхню ΔAOC; $П_3$ – через поверхню ΔOBC; $П_4$ – через поверхню ΔAOB.

$П_1=\dfrac{5}{3}$ (результат знайдений в пункті 1).

$П_2$: ΔAOC: $z=0$ рівняння поверхні (σ_1). Нормаль до поверхні $\bar{n}=(0;0;-1)$.

Отже,

$$П_2=-\iint\limits_{\sigma_1}(5x+y)d\sigma=-\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(5x+y)dx=-\int_0^1\left(\left(\frac{5}{2}x^2+xy\right)\Bigg|_0^{1-y}\right)dy=$$

$$=-\int_0^1\left(\frac{5}{2}(1-y)^2+(1-y)y\right)dy=\frac{5}{6}(1-y)^3\Bigg|_0^1-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1+\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=-1.$$

$П_3$: ΔOBC: $x=0$ рівняння поверхні (σ_2). Нормаль до поверхні $\bar{n}=(-1;0;0)$.

$$П_3=-\iint\limits_{\sigma_2}(x-2z)d\sigma=-\int_0^1 dz\int_0^{1-z}(-2z)dy=2\int_0^1 z(1-z)dz=2\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1-\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^1\right)=\frac{1}{3}.$$

Π_4: ΔAOB: $y=0$ рівняння поверхні (σ_3). Нормаль до поверхні $\bar{n}=(0;-1;0)$.

$$\Pi_4=-\iint_{\sigma_3}(x+3y+z)d\sigma=-\int_0^1 dz\int_0^{1-z}(x+z)dx=-\int_0^1\left(\left(\frac{x^2}{2}+xz\right)\Bigg|_0^{1-z}\right)dz=$$

$$=-\int_0^1\frac{(1-z)^2}{2}dz-\int_0^1 z(1-z)dz=\left(\frac{(1-z)^3}{6}\Bigg|_0^1-\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1+\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^1\right)=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

$$\Pi=\frac{5}{3}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

б) Обчислюємо потік за допомогою формули Остроградського. Так як поверхня T замкнута, то для обчислення потоку векторного поля через цю поверхню можна застосувати формулу Остроградського-Гаусса.

В задачі $P(x,y,z)=x-2y,\ \ Q(x,y,z)=x+3y+z,\ R(x,y,z)=5x+y$.

Тоді $\dfrac{\partial P}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=3$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

За формулою Остроградського-Гаусса

$$\Pi=\iint_S(P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iiint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Отже

$$\Pi=\iiint_G(1+3+0)dxdydz=4\iiint_G dxdydz=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=$$

$$=4\int_0^1\left(\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}\right)dx=4\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=4\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=4\left(1-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}.$$

Задачі контрольної роботи № 8

Задача 8.1. Змінити порядок інтегрування у повторних інтегралах.

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$.

2. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy$.

3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

4. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f dy$.

5. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

6. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

7. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx$.

8. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f dy$.

9. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx$.

10. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f dy$.

Задача 8.2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями.

1. $z = 2 - 12(x^2 + y^2)$, $z = 24x + 2$.
2. $z = 10((x-1)^2 + y^2) + 1$, $z = 21 - 20x$.
3. $z = 8(x^2 + y^2) + 3$, $z = 16x + 3$.
4. $z = 2 - 20((x+1)^2 + y^2)$, $z = -40x - 38$.
5. $z = 4 - 14(x^2 + y^2)$, $z = 4 - 28x$.
6. $z = 28((x+1)^2 + y^2) + 3$, $z = 56x + 59$.
7. $z = 32(x^2 + y^2) + 3$, $z = 3 - 64x$.
8. $z = 4 - 6((x-1)^2 + y^2)$, $z = 12x - 8$.
9. $z = 2 - 4(x^2 + y^2)$, $z = 8x + 2$.
10. $z = 22((x-1)^2 + y^2) + 3$, $z = 47 - 44x$.

Задача 8.3. Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Гріна.

1. $\oint\limits_{l} (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy$, $l: x + y = 2,\ x = 0,\ y = 0$.

2. $\oint\limits_{l} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, $l: y = x,\ y = x^2$.

3. $\oint\limits_{l} \sqrt{1-y^2}\,dx + \left(\frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} - x^2 y\right)dy$, $l: x + y = 1,\ x - y = 1,\ x = 0$.

4. $\oint\limits_l (e^x\cos y + y^2)dx - (e^x \sin y - x)dy$, $l: y = x,\ y = 2x,\ x = 1$.

5. $\oint\limits_l \arcsin y dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + 3xy\right)dy$, $l: y = \frac{1}{3}x,\ y = x,\ x = \frac{1}{2}$.

6. $\oint\limits_l \mathrm{tg} y dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} - \sin x\right)dy$, $l: y = x,\ y = 2x,\ x = \frac{\pi}{2}$.

7. $\oint\limits_l (3x^3 y + y)dx + (x^3 - xy)dy$, $l: y = \frac{1}{2}(3 - x),\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$.

8. $\oint\limits_l (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - \sin y)dy$, $l: x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 1$.

9. $\oint\limits_l (xy + x^2 + y)dx + (xy + x - y^3)dy$, $l: y = x,\ y = \sqrt{x}$.

10. $\oint\limits_l (2 - y)^2 dx - (4x - \cos y - 2xy + x^2)dy$, $l: x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ x + y = 2$.

Задача 8.4. Дано векторне поле $\overline{a} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ і площина $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$; T – піраміда, утворена площиною α і координатними площинами; σ – основа піраміди, яка належить площині α; l – контур σ; $\overline{n}$ – зовнішня нормаль σ. Знайти:

1) потік векторного поля $\overline{a}$ через поверхню σ за напрямком $\overline{n}$;

2) циркуляцію векторного поля $\overline{a}$ по замкненому додатно орієнтованому контуру l:

   а) безпосередньо;

   б) за допомогою формули Стокса;

3) потік векторного поля $\overline{\alpha}$ через зовнішню поверхню піраміди T:

   а) безпосередньо;

   б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Зробити рисунок.

1. $\overline{a} = (2z - x)\overline{i} + (x - y)\overline{j} + (3x + z)\overline{k}$; $\alpha: x + y + z - 2 = 0$.
2. $\overline{a} = 4z\overline{i} + (x - y - z)\overline{j} + (3y + z)\overline{k}$; $\alpha: 2x - y + 2z - 2 = 0$.
3. $\overline{a} = (y - z)\overline{i} + (2x + y)\overline{j} + (x + y + z)\overline{k}$; $\alpha: 2x + y + z - 2 = 0$.
4. $\overline{a} = (x - 2z)\overline{i} + (y - 2z)\overline{j} + (2x - y + 2z)\overline{k}$; $\alpha: -x + 2y + 2z - 2 = 0$.
5. $\overline{a} = (2x - z)\overline{i} + (x + y)\overline{j} + (x + 2z)\overline{k}$; $\alpha: x - y + z - 2 = 0$.
6. $\overline{a} = (2z + x)\overline{i} + (x - 3z)\overline{j} + (y + z)\overline{k}$; $\alpha: -3x + 2y + 4z - 6 = 0$.
7. $\overline{a} = (x + y)\overline{i} + (y + z)\overline{j} + (2x + 2z)\overline{k}$; $\alpha: 3x - 2y + 2z - 6 = 0$.
8. $\overline{a} = (x + y + z)\overline{i} + (x + 2z)\overline{j} + (y - 7z)\overline{k}$; $\alpha: 2x + 3y + z - 6 = 0$.
9. $\overline{a} = 4z\overline{i} + (x - y - z)\overline{j} + (3y + 2z)\overline{k}$; $\alpha: x + y + 3z - 3 = 0$.
10. $\overline{a} = (2z - x)\overline{i} + (x + 2z)\overline{j} + 3z\overline{k}$; $\alpha: x + 4y + z - 4 = 0$.

§9. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Класичне означення ймовірності. Геометрична ймовірність. Елементи комбінаторики

Література: [6] – с. 17-24, с. 27-31; [7] – с. 7-21; [2] – с. 176-179.

Основними поняттями в теорії ймовірностей є поняття події і ймовірності події.

Подія – це такий результат експерименту чи спостереження, який за реалізації даного комплексу умов, може відбутися чи не відбутися.

Події будемо позначати буквами A, B, C, ... Подія U називається *вірогідною*, якщо вона напевне відбувається за реалізації даного комплексу умов. Подія V називається *неможливою*, якщо вона не може відбутися в результаті експерименту (випробування).

Якщо подія A за реалізації комплексу умов може відбутися, а може і не відбутися, то вона називається *випадковою*.

Сумою подій A і B називається подія $A + B$, що полягає в появі хоча б однієї з подій A або B.

Добутком подій A і B називається подія $A{\cdot}B$, що відбувається за одночасної появи подій A і B.

Події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в результаті випробування, тобто їх добуток $A{\cdot}B = V$ є подія неможлива.

Дві події називаються *протилежними*, якщо їх сума є подія вірогідна (U), а їх добуток – неможлива (V).

Подію протилежну до події A будемо позначати $\overline{A}$, тоді маємо

$$\begin{cases} A + \overline{A} = U, \\ A \cdot \overline{A} = V. \end{cases}$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо

1) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$;

2) $A_i \cdot A_j = V$ $(i \neq j)$.

Розглянемо деякий експеримент, всі мислимі прості результати якого описуються скінченним числом різних наслідків $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, які будемо називати *елементарними подіями*.

Слід зауважити, що при проведенні експерименту, завжди відбувається одна і тільки одна елементарна подія.

Тоді довільна *подія* A, пов’язана з цим експериментом, є деякою підмножиною множини всіх елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ (*простору елементарних подій*).

Наприклад**.** Нехай проводиться експеримент, що полягає в однократному підкиданні грального кубика. Оскільки кубик має 6 пронумерованих граней, то простір елементарних подій при даному експерименті можна записати так $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Тоді подія A – „випала грань з непарним числом очок” запишеться $A = \{1,3,5\}$.

Про елементарні результати, при яких настає (з яких складається) подія A, кажуть що вони *сприяють* цій *події*.

В термінах простору елементарних подій маємо, що вірогідна подія $U = \Omega$, а неможлива – $V = \varnothing$ (де символ $\varnothing$ означає порожню множину).

Класичне означення ймовірності. За класичним означенням *ймовірністю події* A називають відношення числа m елементарних подій, що сприяють події A, до загальної кількості n всіх рівноможливих елементарних подій. Отже

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

П р и к л а д 1. Знайти ймовірність випадання грані з непарним числом очок при одному киданні грального кубика.

Розв’язання.

Оскільки $A = \{1,3,5\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, то

$$m = 3,\ \ n = 6,\ \ P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Властивості ймовірності події:

1) Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(V) = 0$;
2) Ймовірність вірогідної події $P(U) = 1$;
3) Яка б не була випадкова подія A, $0 \le P(A) \le 1$.

Геометричне означення ймовірності. Нехай відрізок l складає частину відрізка L. На відрізок L навмання поставлена точка. Це означає, що поставлена точка може опинитися в будь-якій точці відрізка L, причому ймовірність попадання точки на відрізок l пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розташування відносно відрізка L. За цих умов ймовірність попадання точки на відрізок l визначається рівністю

Р = Довжина l / Довжина L.

Позначимо mes G міру (довжину, площу, об’єм) області G. Тоді наведене вище означення можна узагальнити.

Нехай область g є частиною області G. Ймовірність попадання в область g точки, кинутої навмання (у вказаному розумінні) в область G, дорівнює

$$P = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}.$$

Елементи комбінаторики.

Література: [6] – с. 22-23.

Розміщеннями називаються комбінації, складені із n різних елементів по m елементів, які відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Число всіх можливих розміщень

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Приклад 2. Скільки можна скласти сигналів із 6 прапорців різного кольору, взятих по 2?

Розв'язання.

$$A_6^2 = 6\cdot 5 = 30.$$

Перестановками із n елементів називаються розміщення із n елементів по n. Число всіх можливих перестановок

$$P_n = A_n^n = n!,$$

де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ \ 0! = 1.$

Приклад 3. Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, якщо кожна цифра входить в зображення числа тільки один раз?

Розв'язання.

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Сполученнями називаються комбінації, складені із n різних елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом (порядок розташування не має значення). Число сполучень:

$$C_n^m = \frac{A_m^n}{n!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Приклад 4. Скількома способами можна вибрати дві деталі із ящика, що містить 10 деталей.

Розв'язання.

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45.$$

Приклади обчислення ймовірностей.

Приклад 5. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

Розв'язання.

Позначимо через A подію – „набрані дві потрібні цифри”. Всього можна набрати стільки різних пар цифр, скільки може бути складено розміщень із десяти цифр по дві $A_{10}^2 = 10\cdot 9 = 90$. Сприяє події A тільки один результат. Тому ймовірність події *A* дорівнює $P(A)=\frac{1}{90}$.

П р и к л а д 6. В партії із 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 6 навмання взятих деталей 4 стандартні.

Розв'язання.

Загальне число можливих результатів дорівнює числу способів, якими можна взяти 6 деталей із 10, тобто числу сполучень із 10 елементів по 6 – $n=C_{10}^{6}$. Визначимо число результатів, що сприяють події *A* (серед 6 взятих деталей 4 стандартні). Чотири стандартні деталі можна взяти із 7 стандартних $m_1=C_7^4$ способами; інші 6 – 4 = 2 деталі повинні бути нестандартними; взяти 2 нестандартні деталі із 10 – 7 = 3 нестандартних можна $m_2=C_3^2$ способами. Оскільки на кожен можливий набір відібраних стандартних деталей (яких m_1) припадає m_2 наборів нестандартних деталей, то число сприятливих результатів дорівнює $m=m_1\cdot m_2=C_7^4\cdot C_3^2$. Тому

$$P(A)=\frac{C_7^4\cdot C_3^2}{C_{10}^{6}}=\frac{1}{2}.$$

Теореми множення і додавання ймовірностей

Література: [6] – с. 37-44; [7] – с. 21-35; [8] – с. 37-53.

Умовною ймовірністю $P(A/B)$ події *A* відносно події *B* називається ймовірність появи події *A* при умові, що подія *B* уже відбулася.

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність одночасної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B).$$

Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої події.

Якщо *A* і *B* – події незалежні, то

$$P(A/B) = P(A),\ P(B/A) = P(B).$$

Для незалежних подій:

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Теорема додавання ймовірностей.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB).$$

Для несумісних подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок. Якщо ймовірність події *A* дорівнює $P(A)=p$, то ймовірність протилежної події $P(\overline{A})=q=1-p$.

П р и к л а д 7. (Задача 9.1) Ймовірності появи кожної трьох із незалежних подій $A_1,\ A_2,\ A_3$ відповідно дорівнюють $p_1,\ p_2,\ p_3$. Знайти ймовірність появи тільки однієї з цих подій.

Розв'язання.

Введемо позначення:

A_1 – „з'явилась тільки одна з подій $A_1,\ A_2,\ A_3$";

B_1 – „з'явилась тільки подія A_1", тобто $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

B_2 – „з'явилась тільки подія A_2", тобто $B_2 = \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$;

B_3 – „з'явилась тільки подія A_3", тобто $B_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$.

Таким чином, щоб знайти ймовірність появи тільки однієї із подій $A_1,\ A_2,\ A_3$, будемо шукати ймовірність $P(B_1 + B_2 + B_3)$ появи однієї із подій $B_1,\ B_2,\ B_3$.

Оскільки події $B_1,\ B_2,\ B_3$ несумісні, то застосуємо теорему додавання

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3). \qquad (1)$$

Знайдемо ймовірності кожної із подій $B_1,\ B_2,\ B_3$.

Події $A_1,\ A_2,\ A_3$ незалежні, з цього слідує незалежність подій $A_1,\ \overline{A}_2,\ \overline{A}_3$, тому застосуємо до них теорему множення

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = p_1q_2q_3.$$

Аналогічно,

$$P(B_2) = P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = q_1p_2q_3,$$

$$P(B_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = q_1q_2p_3.$$

Підставивши ці ймовірності в (1), знайдемо ймовірність появи тільки однієї із подій A_1, A_2, A_3: $P(A) = P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$.

Ймовірність появи хоча б однієї події

Література: [6] – с. 44-47; [7] – с. 35-37.

Події $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ називають незалежними в сукупності, якщо попарно незалежні кожні дві з них і незалежними є кожна подія та всі можливі добутки інших.

Нехай події $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ незалежні в сукупності, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – відповідно ймовірності цих подій. Позначимо $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ймовірності протилежних подій $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ldots,\ \overline{A}_n$. Тоді

$$q_i = 1 - p_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

і має місце наступна теорема.

Теорема. Ймовірність події A, яка полягає в появі хоча б однієї із подій $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ldots,\ \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

П р и к л а д 8. (Задача 9.1) В цеху є 4 станка. Для кожного станка ймовірність того, що він працює в даний момент, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює хоча б один станок (подія A).

Розв'язання.

Події "станок працює" і "станок на працює" (в даний момент) – протилежні, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $p+q=1$. Звідси ймовірність того, що станок в даний момент не працює, дорівнює $q=1-p=1-0,9=0,1$. Отже, $P(A)=1-q^4=1-(0,1)^4=0,9999$.

Формула повної ймовірності та формула Байєса

Література: [6] – с. 50-53; [7] – с. 37-46; [2] – с. 186-188.

Нехай подія A може відбутися лише за умови появи однієї з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу і називаються гіпотезами. Відомі ймовірності гіпотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ і умовні ймовірності $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \ldots,$ $P(A/H_n)$ події A. Тоді ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на відповідні умовні ймовірності події A:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i).$$

Цю формулу називають ***формулою повної імовірності***.

<u>Зауваження.</u> Оскільки гіпотези утворюють повну групу, то $P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1$ і $P(H_i\cdot H_j)=0,\ i\neq j$.

Формула Байєса. Ця формула дає можливість переоцінити ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ після того, як стає відомо, що в результаті проведення досліду подія A настала:

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)},\ i=1,2,...,n.$$

П р и к л а д 9. (Задача 9.2) Є два набори деталей. Ймовірність того, що деталь першого набору стандартна, дорівнює 0,8, другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь (із навмання взятого набору) – стандартна.

Розв'язання.

Позначимо через A подію „вийнята деталь стандартна”.

Деталь можна рівноймовірно взяти або із першого набору (подія H_1), або із другого (подія H_2). Тому ймовірність того, що деталь дістали із першого набору $P(H_1)=0{,}5$; із другого набору $P(H_2)=0{,}5$.

Умовна ймовірність того, що із першого набору вийнята деталь буде стандартна, $P(A/H_1)=0.8$.

Умовна ймовірність того, що із другого набору вийнята деталь стандартна, $P(A/H_2)=0.9$.

Отже, ймовірність того, що вийнята навмання деталь – стандартна, по формулі повної ймовірності дорівнює

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}9=0{,}85.$$

Приклад 10. (Задача 9.2) До автоматичної системи керування виробництвом протягом однієї хвилини надходить сигнал від одного з трьох датчиків з імовірностями відповідно 0,7; 0,2; 0,1. Система приймає рішення про зупинку конвеєра при надходженні сигналу від першого датчика з імовірністю 0,3 та 0,4 і 0,5 при спрацюванні другого і третього датчика. Знайти ймовірність того, що спрацював перший датчик, якщо конвеєр зупинено.

Розв'язання.

Нехай подія A – „конвеєр зупинено". Гіпотези H_i – „спрацював *i*-й датчик", $i=1,2,3$. Ймовірності гіпотез дорівнюють: $P(H_1)$=0,7; $P(H_2)$=0,2; $P(H_3)$=0,1. Події A/H_i – „конвеєр зупинено в зв'язку з спрацюванням *i*-го датчика", $i=1,2,3$. Ймовірності цих подій дорівнюють: $P(A/H_1)$=0,3; $P(A/H_2)$=0,4; $P(A/H_3)$=0,5.

За формулою Байєса

$$P(H_2/A)=\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{0{,}7\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}1\cdot 0{,}5}=0{,}618.$$

Формула Бернуллі

Література: [6] – с. 55-56; [7] – с. 46-48; [2] – с. 183-185.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події однакова і дорівнює $p\ (0<p<1)$, подія відбудеться рівно k раз, дорівнює

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ q=1-p.$$

Ймовірність того, що подія відбудеться:

а) менше, ніж k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$;

б) більше, ніж k раз: $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$;

в) не менше, ніж k раз: $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$;

г) не більше, ніж k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$.

П р и к л а д 11. (Задача 9.3) Визначити ймовірність того, що в сім'ї, яка має п'ятеро дітей, буде три дівчинки і два хлопчики, якщо ймовірність народження дівчинки 0,51.

Розв'язання.

Ймовірність народження дівчинки $p=0{,}51$, тоді $q=1-p=0{,}49$ – ймовірність народження хлопчика. За умовою $n=5$, $k=3$. Отже,

$$P_5(3)=C_5^3 p^3 q^2=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(0{,}51)^3\cdot(0{,}49)^2=0{,}318.$$

Випадкова величина і закон її розподілу

Література: [7] – с. 65-72, с. 107-116; [2] – с. 188-192; [9] – с. 88-89.

Величина, яка в результаті експерименту набуває одного зі своїх можливих значень, називається *випадковою*.

Якщо значення, які може набувати дана випадкова величина X, утворюють дискретний (скінченний або нескінченний) ряд чисел x_1, x_2, ..., x_n, ..., то і сама випадкова величина X називається *дискретною*.

Якщо значення, які може набувати випадкова величина X, заповнюють скінченний або нескінченний проміжок, то випадкова величина називається *неперервною*.

Кожному значенню випадкової величини дискретного типу x_n відповідає певна ймовірність p_n. Кожному інтервалу $(a;b)$ із області значень неперервної випадкової величини X також відповідає певна ймовірність $P(a<X<b)$ того, що значення, набуте випадковою величиною, попаде в цей інтервал.

Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями встановлюється *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу неперервної випадкової величини зручно задавати за допомогою функції *щільності ймовірності* $f(x)$.

Ймовірність $P(a<X<b)$ того, що значення, набуте випадковою величиною X, попаде в інтервал $(a;b)$, визначається рівністю

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Функція щільності ймовірності $f(x)$ має такі властивості:

1. $f(x)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Розглянемо функцію $F(x) = P(X < x)$ – імовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування набуде значення, меншого за x. Ця функція називається *функцією розподілу ймовірності* випадкової величини X. Функція $F(x)$ існує як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин..

Якщо $f(x)$ – функція щільності ймовірності неперервної випадкової величини X, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Із останньої рівності випливає, що $f(x) = F'(x)$.

Властивості функції розподілу ймовірності:

1. $0 \le F(x) \le 1$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$;
2. $F(x)$ – неспадна функція;
4. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини

Література: [2] – с. 192-195; [7] – с. 76-100, с. 117-130.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Якщо випадкова величина X задана *рядом розподілу*

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

то математичне сподівання $M(X)$ визначається формулою:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots = \sum_i x_i p_i.$$

Нехай $f(x)$ – щільність ймовірності випадкової величини X. Тоді *математичне сподівання неперервної випадкової величини* X визначається рівністю

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Теорема. Має місце формула

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для дискретної випадкової величини X отримаємо:

$$D(X)=\sum_i (x_i - M(X))^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - [M(X)]^2.$$

Для неперервної випадкової величини X отримаємо:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \qquad (2)$$

__Середнім квадратичним відхиленням__ випадкової величини X називається величина $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$.

П р и к л а д 12. (Задача 9.4) Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$ випадкової величини X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ \sin 2x, \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, \ x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ 2\cos 2x, \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0, \ x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$M(X)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x 2\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x, \ du = dx, \\ dv = \cos 2x\,dx, \ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$=2\left(\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\right) = \left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}2854;$$

Знайдемо $M(X^2)$ – перший доданок формули (2):

$$M(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 2\cos 2x dx=\left|\begin{matrix} u=x^2,\ du=2xdx, \\ dv=\cos 2x dx,\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right|=2\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x,\ du=dx, \\ dv=\sin 2x dx,\ v=-\frac{1}{2}\cos x\end{matrix}\right|=2\left(\left(\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2x dx\right)=$$

$$=\left(x^2\sin 2x+x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\approx 0{,}1169.$$

Тоді за формулою (2) отримаємо

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi^2}{16}-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\approx 0{,}0354.$$

Нормальний закон. Функція Лапласа

Література: [2] – с. 202-205; [7] – с. 135-141.

Випадкова величини X розподілена за *нормальним законом*, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

де m – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення X.

Ймовірність того, що X набуде значення із інтервалу $(\alpha;\beta)$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

де $\Phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення значень випадкової величини X від її математичного сподівання m менша додатного числа δ,

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приклад 13. (Задача 9.5) Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють $m = 20$ і $\sigma = 5$. Знайти:

1) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $|X - m|$ буде менша ніж 10;
2) ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення, яке належить проміжку (15; 22).

Розв'язання.

1) $P(|X-20|<10)=2\Phi\left(\frac{10}{5}\right)=2\Phi(2)$. За таблицею додатку 2 в [1] знайдемо, що $\Phi(2)=0{,}4772$. Тому $P(|X-20|<10)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544$.

2) $P(15<X<22)=\Phi\left(\frac{22-20}{5}\right)-\Phi\left(\frac{15-20}{5}\right)=\Phi(0{,}4)-\Phi(-1)$.

Користуючись непарністю функції Лапласа, отримаємо

$$P(15<X<22)=\Phi(0{,}4)+\Phi(1).$$

З таблиці знайдемо $\Phi(0{,}4)=0{,}1554$; $\Phi(1)=0{,}3413$. Отже

$$P(15<X<22)=0{,}1554+0{,}3413=0{,}4967.$$

Задачі контрольної роботи № 9

Задача 9.1. Розв'язати задачі, використовуючи формули додавання та множення ймовірностей.

1. Три стрільці стріляють в ціль. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що: 1) всі три стрільці влучать в ціль; 2) всі троє промахнуться; 3) тільки один стрілець влучить в ціль; 4) хоча б один стрілець влучить в ціль.
2. Ймовірність влучення стрільцем у "десятку" дорівнює 0,7, а у "дев'ятку" – 0,3. Визначити ймовірність того, що даний стрілець при трьох пострілах набере не менше 29 очок.
3. З партії, у якій 20 деталей без дефектів і 5 з дефектами, навмання відбирають 3 деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) всі три деталі без дефектів; 2) хоча б одна з деталей без дефектів.
4. Студент підготував до іспиту 40 питань з 50. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання обраних питань він знає не менше двох.
5. У двох пачках зошитів знаходяться чисті і використані: в першій пачці – 10 зошитів, серед них 3 використаних; в другій пачці – 15, серед них 6 використаних. З кожної пачки навмання виймають один зошит. Знайти ймовірність того, що обидва зошити використані.

6. В урні містяться 12 білих і 8 червоних куль. Навмання виймають 8 куль. Яка ймовірність того, що: 1) три з них червоні; 2) червоних куль вийнято не більше трьох.
7. У ящику містяться 10 деталей, серед яких 3 стандартні. Знайти ймовірність того, що з п'яти навмання відібраних деталей стандартних буде не більше однієї.
8. У двох урнах містяться кулі, що відрізняються лише кольором, причому в першій урні – 5 білих куль, 11 чорних і 8 червоних, а в другій, відповідно, – 10, 8 і 6 куль. З обох урн навмання виймається по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі одного кольору?
9. Для повідомлення про пожежу у готелі встановлено 2 незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при пожежі спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,95, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при пожежі надійде сигнал: 1) хоча б від одного сигналізатора; 2) тільки від одного сигналізатора.
10. Екзаменаційний білет містить 3 питання. Ймовірність того, що студент дасть відповідь на перше і друге питання, однакові та дорівнюють 0,8; на третє – 0,9. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти: 1) на всі питання; 2) принаймні на 2 питання.

Задача 9.2. Розв'язати задачі, використовуючи формулу повної ймовірності або формулу Байєса.

1. У першому ящику 6 білих і 4 чорних кулі, у другому – 7 білих і 3 чорних. З кожного ящика навмання виймають по одній кулі, а потім з цих куль навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що взято білу кулю.
2. На двох верстатах виготовляють однакові деталі. Ймовірність того, що деталь стандартна, для першого верстата дорівнює 0,8, для другого – 0,9. Продуктивність другого верстата втричі більша, ніж першого. Знайти ймовірність того, що відібрана навмання деталь буде стандартною.
3. З коробки, що містить 10 білих і 5 чорних куль, загублено 2 кулі. Знайти ймовірність того, що навмання взята куля буде білого кольору.
4. На конференції по черзі проходять реєстрацію представники двох країн: України та Польщі. Відомо, що приїхало 10 делегатів з Польщі та 20 з України. З якою ймовірністю друга зареєстрована особа буде з Польщі.
5. З 18 стрільців 5 влучать у мішень з ймовірністю 0,8; 7 стрільців – з ймовірністю 0,7; 4 стрільці – з ймовірністю 0,6 і 2 стрільці – з ймовірністю 0,5. Навмання вибраний стрілець здійснив постріл, але у мішень не влучив. З якою ймовірністю він належить до останньої групи?
6. У групі 30 студентів, з яких 15 можуть відповісти на всі 50 питань екзаменаційних білетів, 10 можуть відповісти на 40 питань, 5 на 30 питань. Знайдіть ймовірність того, що викликаний навмання студент знає відповідь на екзаменаційний білет, що складається з 2 питань.

7. У місті є 20 готелів, з яких 10 готелів "п’ятизіркові", 6 – "чотиризіркові", 4 – "тризіркові". Ймовірність того, що турист буде задоволений обслуговуванням у цих готелях, відповідно, дорівнює 0,9, 0,8, 0,7. Приїхавши до міста, турист обрав для зупинки перший готель, який йому трапився. З якою ймовірністю він зупинився у "п’ятизірковому" готелі, якщо відомо, що він зостався задоволений обслуговуванням?
8. Серед 30 екзаменаційних білетів – 20 "щасливих". Студенти підходять за білетами один за одним. У кого з студентів більша ймовірність взяти "щасливий" білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?
9. Для участі в студентських відбіркових спортивних змаганнях сформовано 3 групи з 4, 6 і 5 студентів відповідно. Ймовірності того, що студент I, II, III групи попаде в збірну університету, відповідно дорівнюють 0,9; 0,7; 0,8. Навмання обраний студент в результаті змагань був обраний у збірну. До якої з 3-х груп ймовірніше всього належав цей студент?
10. Прилад може працювати в двох режимах: 1) нормальному і 2) особливому. Нормальний режим спостерігається у 80% всього часу роботи приладу, особливий – у 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t в нормальному режимі дорівнює 0,1, в особливому режимі – 0,7. Знайти повну ймовірність виходу приладу з ладу за час t.

Задача 9.3. **Розв’язати задачі, використовуючи формулу Бернуллі.**

1. Ймовірність появи події A при одному випробуванні дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що при трьох незалежних випробуваннях подія A з’явиться: 1) не менше двох разів; 2) хоча б один раз.
2. Гральну кістку підкидають п’ять разів. Знайти ймовірність того, що двічі з’явиться число очок, кратне трьом.
3. Подія B відбувається у тому випадку, якщо подія A з’явиться не менше, ніж 4 рази. Знайти ймовірність появи події B, якщо буде зроблено п’ять незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює 0,5.
4. Випадково зустрінута особа може бути з ймовірністю 0,2 брюнетом, з ймовірністю 0,3 блондином, з ймовірністю 0,4 шатеном, з ймовірністю 0,1 рудим. Яка ймовірність того, що серед трьох випадково зустрінутих осіб: 1) не менше двох брюнетів; 2) один блондин і два шатена; 3) хоча б один рудий.
5. Ймовірність хоча б одного влучення при двох пострілах дорівнює 0,99. Знайти ймовірність трьох влучень при чотирьох пострілах.
6. В квартирі чотири електролампочки. Для кожної електролампочки ймовірність того, що вона "перегорить" протягом року, дорівнює $\frac{5}{6}$. Яка ймовірність того, що протягом року потрібно буде замінити не менше половини лампочок?

7. У ящику міститься по однаковій кількості деталей, виготовлених заводами № 1 і № 2. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання відібраних деталей, заводом № 1 виготовлено: 1) дві деталі; 2) менше двох деталей; 3) більше двох деталей.
8. Нехай ймовірність того, що телевізор потребує ремонту протягом гарантійного строку, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного строку з трьох телевізорів: 1) не більше одного потребує ремонту; 2) хоча б один не потребує ремонту.
9. У ящику міститься кілька тисяч однакових запобіжників. Половина з них виготовлена 1-м заводом, решта – 2-м заводом. Навмання вийняли п'ять запобіжників. Чому дорівнює ймовірність того, що 1-м заводом з них виготовлені: 1) два запобіжники; 2) менше двох запобіжників; 3) більше двох запобіжників?
10. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб не стандартний, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що: 1) з трьох перевірених виробів тільки один нестандартний; 2) нестандартним буде тільки третій по порядку перевірений виріб.

Задача 9.4. Випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)$ (інтегральна функція). Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ (диференціальну функцію), математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

1. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ x^2, \ 0<x\le 1;\\ 1, \ x>1.\end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1;\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), 1<x\le 2;\\ 1, \ x>2.\end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ x^3, \ 0<x\le 1;\\ 1, \ x>1.\end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ 3x^2+2x, \ 0<x\le \dfrac{1}{3};\\ 1, \ x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 2;\\ \dfrac{1}{2}x-1, \ 0<x\le 4;\\ 1, \ x>4.\end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ \dfrac{1}{9}x^2, \ 0<x\le 3;\\ 1, \ x>3.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ \dfrac{1}{4}x^2, \ 0<x\le 2;\\ 1, \ x>2.\end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le -\dfrac{\pi}{2};\\ \cos x, \ -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, \ x>0.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ 2\sin x, \ 0<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ 1, \ x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le \dfrac{3\pi}{4};\\ \cos 2x, \ \dfrac{3\pi}{4}<x\le \pi;\\ 1, \ x>\pi.\end{cases}$

Задача 9.5. Задані математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти:

1) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $|X-m|$ буде менша, ніж δ;
2) ймовірність того, що X набуде значення, яке належить проміжку $(\alpha;\ \beta)$.

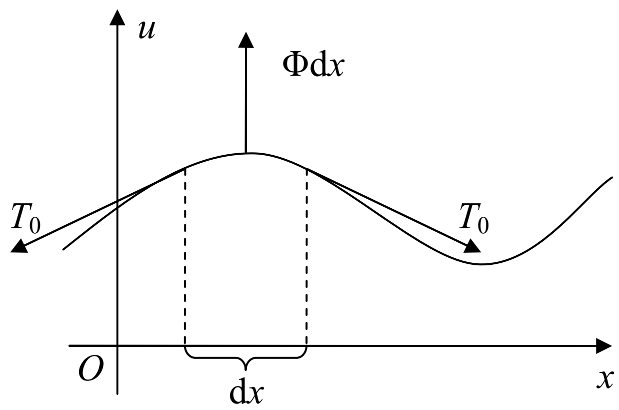
1.	$m=15$,	$\sigma=2$,	$\alpha=16$,	$\beta=25$,	$\delta=4$.
2.	$m=14$,	$\sigma=4$,	$\alpha=18$,	$\beta=34$,	$\delta=8$.
3.	$m=13$,	$\sigma=4$,	$\alpha=15$,	$\beta=17$,	$\delta=6$.
4.	$m=12$,	$\sigma=5$,	$\alpha=17$,	$\beta=22$,	$\delta=15$.
5.	$m=11$,	$\sigma=3$,	$\alpha=17$,	$\beta=26$,	$\delta=12$.
6.	$m=10$,	$\sigma=2$,	$\alpha=11$,	$\beta=13$,	$\delta=5$.
7.	$m=9$,	$\sigma=4$,	$\alpha=15$,	$\beta=19$,	$\delta=18$.
8.	$m=8$,	$\sigma=2$,	$\alpha=6$,	$\beta=15$,	$\delta=8$.
9.	$m=7$,	$\sigma=5$,	$\alpha=2$,	$\beta=22$,	$\delta=20$.
10.	$m=6$,	$\sigma=3$,	$\alpha=0$,	$\beta=9$,	$\delta=9$.

§10. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Розв'язування рівняння коливання струни методом характеристик (методом Д'Аламбера)

Література: [2] – с. 265-267; [3] – с. 347-348.

Струною називають тонку нитку, яка може вільно згинатися. Нехай струна знаходиться під дією сильного початкового натягу T_0. Якщо вивести струну з положення рівноваги та піддати дії якої-небудь сили, то струна розпочне коливатися.



Обмежимось розглядом малих, поперечних і плоских коливань струни, при яких відхилення точок струни від положення спокою малі, в будь-який момент часу всі точки струни знаходяться в одній і тій же площині і кожна точка струни коливається, залишаючись на одному й тому ж перпендикулярі до прямої, що відповідає стану спокою струни.

Приймаючи цю пряму за вісь Ox, позначимо через $u=(x,t)$ відхилення точок струни від положення рівноваги в момент часу t. При кожному фіксованому значенні t графік функції $u=(x,t)$ на площині xOu дає форму струни в момент часу t.

Функція $u=u(x,t)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varphi,$$

де $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $\varphi=\dfrac{\Phi}{\rho}$, ρ – маса одиниці довжини (лінійна густина струни), Φ – сила, що діє на струну перпендикулярно осі абсцис і розрахована на одиницю довжини.

Якщо зовнішня сила відсутня, тобто $\varphi=0$, то отримаємо *рівняння вільних коливань струни*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Для повного визначення руху струни потрібно задати в початковий момент форму і швидкість струни, тобто положення її точок і їх швидкість у вигляді функцій абсцис x цих точок. Нехай $u\big|_{t_0=0} = f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t_0=0} = F(x)$. Ці умови називаються <u>*початковими умовами задачі*</u>.

Загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань має вигляд $y = \Theta_1(x-at) + \Theta_2(x+at)$, де Θ_1 і Θ_2 – довільні функції.

Підібравши функції Θ_1 і Θ_2 так, щоб функція $u = u(x,t)$ задовольняла наведеним початковим умовам, отримаємо розв'язок початкового диференціального рівняння у вигляді

$$u = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz. \tag{1}$$

П р и к л а д 1. (Задача 10.1) Знайти рівняння $u = u(x,t)$ форми однорідної нескінченної струни, яка визначається хвильовим рівнянням $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо в початковий момент $t_0 = 0$ форма струни та швидкість точки струни з абсцисою x визначаються відповідно функціями

$$u\big|_{t_0=0} = \sin x,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t_0=0} = ax^2.$$

Знайти форму струни в момент часу $t = \frac{\pi}{a}$.

Розв'язання.

За методом Д'Аламбера маємо $f(x) = \sin x$, $F(x) = ax^2$. Отже, за формулою (1):

$$u = \frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} az^2 dz = \sin x\cos at + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{z^3}{3}\right|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \sin x\cos at + \frac{1}{6}\left((x+at)^3 - (x-at)^3\right) = \sin x\cos at + ax^2 t + \frac{1}{3}a^3 t^3.$$

Якщо покладемо $t = \frac{\pi}{a}$, то отримаємо

$$u = \sin x\cos\pi + ax^2\frac{\pi}{a} + \frac{1}{3}a^3\left(\frac{\pi}{a}\right)^3 = -\sin x + \pi x^2 + \frac{\pi^3}{3}.$$

Функції комплексної змінної.
Диференціювання функції комплексної змінної

Література: [2] – с. 282-287; [3] – с. 367-381; [10] – с. 3-21; [12] – с. 12-38.

Комплексним числом називається вираз виду $x+yi$, де x і y – дійсні числа, а i – деякий символ, „квадрат якого дорівнює -1”. Арифметичні операції з комплексними числами здійснюються за правилами арифметичних операцій з многочленами з урахуванням того, що $i^2=-1$. Наприклад

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i,$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1iy_2+iy_1x_2+iy_1iy_2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

Якщо кожному значенню комплексної змінної z з деякої множини D за певним правилом ставиться у відповідність одне або кілька значень іншої комплексної змінної w, то кажуть, що на множині D задано *функцію* w *комплексної змінної* z і пишуть $w=f(z)$. Множину D називають областю визначення функції $f(z)$. Функцію $f(z)$ можна записати у вигляді:

$$f(z)=u(z)+iv(z)=u(x;\,y)+iv(x;\,y),\ (x;\,y)\in D.$$

Дійсні функції $u(x;\,y)$ і $v(x;\,y)$ називаються відповідно дійсною та уявною частиною функції $w=f(z)$. Функція $w=f(z)$ називається *однозначною*, якщо кожному значенню z із множини D можна поставити у відповідність тільки одне значення w. Якщо ж існують значення z, кожному із яких можна поставити у відповідність декілька значень w, то функція $w=f(z)$ називається *багатозначною*.

Для функцій комплексної змінної справедливі наступні формули

$$e^z=e^{x+yi}=e^x(\cos y+i\sin y),$$

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \text{ (формула Ейлера)},$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Однозначна функція $w=f(z)$ при $z\to c$ має скінченну *границю* C (c і C – комплексні числа), якщо для всякого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що із нерівності $|z-c|<\delta$ слідує нерівність $|f(z)-C|<\varepsilon$. В цьому випадку пишуть $\lim\limits_{z\to c} f(z)=C$.

Функція $w=f(z)$ називається *неперервною* в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Функція, неперервна в кожній точці деякої області D, називається неперервною в цій області.

Похідною однозначної функції комплексної змінної $w = f(z)$ називається границя відношення $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, якщо Δz будь-яким способом прямує до нуля.

Таким чином, $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

Функція, що має похідну при даному значенні z, називається *диференційовною* при цьому значенні z. Якщо функція $w = f(z)$ однозначна і має скінчену похідну в кожній точці області D, то ця функція називається *аналітичною* в області D.

Якщо функція $w = f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$, то в цій точці існують частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, причому ці похідні пов'язані *умовами Коші - Рімана* (Д'Аламбера-Ейлера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

або в тригонометричній формі

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi}; \ \frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi}.$$

Умови Коші-Рімана є *необхідними умовами диференційовності* функції $w = f(z)$ в точці $z = x + iy$.

Навпаки, якщо частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ неперервні в точці $z = x + iy$ і умови Коші-Рімана виконані, то функція $w = f(z)$ диференційовна в точці $z = x + iy$.

Похідну функції $f(z)$ можна обчислити за формулами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

або в тригонометричній формі

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Зокрема для елементарних функцій отримаємо

$$\begin{aligned}
&(z^{\alpha})' = \alpha z^{\alpha-1}, && (\arcsin z)' = 1/\sqrt{1-z^2},\\
&(e^z)' = e^z, && (\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2},\\
&(\cos z)' = -\sin z, && (\operatorname{arctg} z)' = 1/(1+z^2),\\
&(\sin z)' = \cos z, && (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,\\
&(\ln z)' = 1/z, && (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.
\end{aligned}$$

Для диференційовних функцій справедливі формули похідної суми, добутку і частки, та правило обчислення похідної складеної функції аналогічні до функції дійсної змінної (Частина 1, §3).

Приклад 2. (Задача 10.2) Подати задану функцію $w = z^3$, де $z = x + iy$, у вигляді $w = u(x; y) + iv(x; y)$; перевірити, чи є вона аналітичною. Якщо так, то знайти значення її похідної в заданій точці $z_0 = 1 + i$.

Розв'язання.

Маємо $w = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$;

тобто $u(x; y) = x^3 - 3xy^2$; $v(x; y) = 3x^2 y - y^3$.

Тому $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy$.

Умови Коші-Рімана виконуються, функція $w = z^3$ – аналітична; тому

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3z^2$$

або інакше $f'(z) = \left(z^3\right)' = 3z^2$, тоді $f'(z_0) = f'(1 + i) = 3 - 3 + i6 = 6i$.

Приклад 3. (Задача 10.2) Знайти похідну функції $w = e^{2z}$ в точці $z_0 = 1 + i\pi$.

Розв'язання.

Маємо $e^{2z} = e^{2(x+iy)} = e^{2x} \cdot e^{2yi} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y)$;

тобто $u(x; y) = e^{2x} \cos 2y$; $v(x; y) = e^{2x} \sin 2y$.

Тому $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y$.

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, то функція $w = e^{2z}$ – аналітична. Отже,

$f'(z) = (e^{2z})' = e^{2z}(2z)' = 2e^{2z}$; $f'(z_0) = 2e^{2(1+i\pi)} = 2e^2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2e^2$.

Ряди в комплексній області. Ряд Лорана

Література: [2] – с. 295-300; [3] – с. 400-409; [10] – с. 35-44; [12] – с. 56-75.

Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \tag{2}$$

називається *рядом Тейлора*.

Для будь-якого ряду (2) існує дійсне невід'ємне число R таке, що ряд збігається при $|z - z_0| < R$ і розбігається при $|z - z_0| > R$.

Число R (скінченне чи нескінченне) називається *<u>радіусом збіжності</u>*, а множина точок z таких, що $|z-z_0|<R$ – *<u>кругом збіжності</u>* степеневого ряду.

Для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду (2) можна скористатися формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right|,$$

якщо ця границя існує.

В крузі збіжності $|z-z_0|<R$ сума степеневого ряду $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ є аналітичною функцією.

Навпаки, якщо функція $w(z)$ є аналітичною в крузі $|z-z_0|<R$, то вона єдиним чином розкладається в середині вказаного круга в степеневий ряд

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n \text{, де } \alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(z)}{(z-z_0)^n}dz=\frac{w^{(n)}(z)}{n!}.$$

Тут контур C є будь-який замкнений контур, розміщений в середині кола збіжності і такий, що охоплює точку z_0.

Таким чином, отримуємо розклад в степеневий ряд аналітичної функції $w(z)$

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{(n)}(z)}{n!}(z-z_0)^n.$$

При розкладі функції в ряд Тейлора можна використати відомі <u>розклади елементарних функцій</u>:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, |z|<\infty;$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots, |z|<\infty;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, |z|<\infty;$$

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots, |z|<1;$$

$$\ln(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots, |z|<1;$$

$$\ln(1-z)=-\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots-\frac{z^n}{n}-\ldots, |z|<1.$$

Ряд, що містить крім додатних степенів $(z-z_0)$ також і від'ємні степені $(z-z_0)$, називається <u>*рядом Лорана*</u>.

Ряд Лорана має вигляд

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

Областю збіжності ряду Лорана є кільце $R_1<|z-z_0|<R_2$, $R_1<R_2$, в якому сума ряду $w(z)$ є аналітичною функцією $w(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Навпаки, будь-яка аналітична функція $w(z)$ в середині кільця $R_1<|z-z_0|<R_2$ розкладається в середині цього кільця в ряд Лорана єдиним чином.

Коефіцієнти ряду Лорана обчислюються за допомогою формули

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(z)}{(z-z_0)^n}dz,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

де C – будь-який замкнений контур, розміщений в середині кільця збіжності навколо точки z_0.

Ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ складається із двох рядів:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha_n(z-z_0)^n \tag{3}$$

і

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n . \tag{4}$$

Ряд (3) називається головною частиною ряду Лорана, а ряд (4) – правильною частиною ряду Лорана. Ряд (4) збіжний всередині кола $|z-z_0|=R_2$, тобто при $|z-z_0|<R_2$, і є в ньому деякою аналітичною функцією $w_1(z)$. Ряд (3) збігається зовні кола $|z-z_0|=R_1$, тобто при $|z-z_0|>R_1$, і є в цій області деякою іншою аналітичною функцією $w_2(z)$.

Якщо деяку функцію $w(z)$, аналітичну в кільці $R_1<|z-z_0|<R_2$, потрібно розкласти в ряд Лорана, то її намагаються подати як суму функцій $w_1(z)+w_2(z)$ і розкладають одну з них по додатніх степенях $(z-z_0)$, а іншу – по від'ємних степенях $(z-z_0)$.

П р и к л а д 4. (Задача 10.3) Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{2z-5}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0=0$ і визначити область збіжності цього ряду.

Розв'язання.

Подамо дану функцію у вигляді

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{2z}{5}}.$$

В околі точки $z_0=0$ виконується нерівність $\left|\frac{2z}{5}\right|<1$, тому дріб $\dfrac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{2z}{5}}$ можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $a=-\frac{1}{5}$ і знаменником $q=\frac{2z}{5}$. Звідси отримаємо

$$f(z)=-\frac{1}{5}-\frac{2z}{5^2}-\frac{2^2z^2}{5^3}-\frac{2^3z^3}{5^4}-\ldots,$$

або $f(z)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}z^{n-1}}{5^n}$. Цей розклад містить тільки правильну частину.

Із нерівності $\left|\frac{2z}{5}\right|<1$ робимо висновок, що областю збіжності ряду є коло

$$|z|<\frac{5}{2}.$$

П р и к л а д 5. (Задача 10.3) Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0=i$ і визначити область збіжності цього ряду.

Розв'язання.

Маємо $f(z)=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$. Найбільше коло із центром в точці i, в середині якого функція $f(z)$ аналітична, має радіус, рівний відстані від точки i до її найближчої особливої точки $z=2$.

Тому

$$R=|2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

Позначимо через σ відкритий круг (без межі) із центром в точці i радіуса $R=\sqrt{5}$.

В середині круга σ функція $f(z)$ аналітична, а всяке концентричне коло більшого радіуса містить всередині особливу точку $z = 2$, в якій аналітичність порушується.

Для першого доданку $\dfrac{1}{z-3}$ маємо

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-i)+(i-3)} = \frac{1}{\dfrac{z-i}{i-3}+1} \cdot \frac{1}{i-3} = \frac{1}{i-3}\left(1 - \frac{z-i}{i-3} + \left(\frac{z-i}{i-3}\right)^2 - \ldots\right),$$

а для другого $\dfrac{1}{z-2}$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-i)+(i-2)} = \frac{1}{\dfrac{z-i}{i-2}+1} \cdot \frac{1}{i-2} = \frac{1}{i-2}\left(1 - \frac{z-i}{i-2} + \left(\frac{z-i}{i-2}\right)^2 - \ldots\right).$$

Дані ряди збіжні в крузі $|z-i| < \sqrt{5}$. Різниця цих рядів і є розклад в ряд Лорана за степенями $z-i$ функції $f(z)$. Радіус збіжності цього ряду $R = \sqrt{5}$.

П р и к л а д 6. Задану функцію $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-2}$ розкласти в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 2$.

Розв'язання.

Скористаємося розкладом в ряд Тейлора для функції $\cos z$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \ldots.$$

Отримаємо

$$f(z) = z\cos\frac{1}{z-2} = (z-2+2)\cos\frac{1}{z-2} = (z-2)\cos\frac{1}{z-2} + 2\cos\frac{1}{z-2} =$$

$$= (z-2)\cdot\left(1 - \frac{1}{2(z-2)^2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4(z-2)^4} - \ldots\right) +$$

$$+2\left(1 - \frac{1}{2(z-2)^2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4(z-2)^4} - \ldots\right) =$$

$$= (z-2) + 2 - \frac{1}{2(z-2)} - \frac{2}{2(z-2)^2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4(z-2)^3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4(z-2)^4} -$$

$$- \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(z-2)^5} - \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(z-2)^6} + \ldots.$$

Елементи операційного числення.
Знаходження зображень функцій

Література: [2] – с. 305-307; [12] – с. 211-227.

Нехай функція $f(t)$ має такі властивості:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2) $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ при $t > 0$, де $M > 0$ і s_0 – деякі дійсні сталі.

3) На будь-якому скінченному відрізку $[a;b]$ додатної півосі Ot функція задовольняє умовам Діріхле, тобто:

   а) вона обмежена;

   б) неперервна або має скінченне число точок розриву I роду;

   в) має скінченне число екстремумів.

Такі функції в операційному численні називають <u>*зображуваними по Лапласу*</u>, <u>*або оригіналами*</u>.

Нехай $p = \alpha + \beta i$ – комплексний параметр, причому $\operatorname{Re} p = \alpha \ge s_1 > s_0$.

За цих умов інтеграл $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ збіжний і є функцією від p:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \bar{f}(p).$$

Цей інтеграл називають інтегралом Лапласа, а функцію комплексного аргументу p, яку він визначає, називають <u>*перетворенням Лапласа від функції*</u> $f(t)$, або <u>*Лапласовим зображенням*</u> $f(t)$, чи просто <u>*зображенням*</u> $f(t)$.

Те, що функція $\bar{f}(p)$ є зображенням оригінала $f(t)$, позначають такими символами:

$$\bar{f}(p) = L\{f(t)\}, \text{ або } \bar{f}(p) \doteqdot f(t).$$

За значення оригінала $f(t)$ у будь-якій його точці розриву I-го роду t_0 приймають півсуму його граничних значень зліва і справа від цієї точки:

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\big(f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)\big) \text{ при } t_0 \ne 0; \; f(0) = f(+0) \text{ при } t_0 = 0.$$

При дотриманні цієї умови відповідність між оригіналами і зображеннями має такі <u>властивості</u>:

1) Ця відповідність ***взаємно однозначна*** (тобто всякому оригіналу відповідає єдине зображення і навпаки).
2) ***Лінійність.*** Будь-якій лінійній комбінації скінченної множини оригіналів в якості зображення відповідає лінійна комбінація їх зображень. Таким чином, якщо $\bar{f}_k(p) \doteqdot f_k(t)$ $(k = 1,2,...,n)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{f}_k(p) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t).$$

3) ***Диференціювання оригінала.*** Якщо $f(t)$ – оригінал, $\bar{f}(p) \dashrightarrow f(t)$ і існують похідні $f'(t)$, $f''(t)$, ... $f^{(n)}(t)$, які в свою чергу є оригіналами, то

$f'(t) \leftarrow p \cdot \bar{f}(p) - f(0);$

$f''(t) \leftarrow p^2 \cdot \bar{f}(p) - p \cdot f(0) - f'(0);$

$f'''(t) \leftarrow p^3 \cdot \bar{f}(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0);$

......

$f'''(t) \leftarrow p^n \cdot \bar{f}(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$

4) ***Інтегрування оригінала.*** Якщо $f(t)$ – оригінал і $\bar{f}(p) \dashrightarrow f(t)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftarrow \frac{\bar{f}(p)}{p}.$$

<u>*Згорткою*</u> двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція

$$F(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Теорема множення зображень (згортання оригіналів). Якщо $f_1(t)$ і $f_2(t)$ оригінали, причому $\bar{f}_1(p) \dashrightarrow f_1(t)$ і $\bar{f}_2(p) \dashrightarrow f_2(t)$, то

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \leftarrow \bar{f}_1(p) \cdot \bar{f}_2(p).$$

Таблиця зображень основних елементарних функцій

№	$f(t)$ при $t>0$	$\bar{f}(p)$	№	$f(t)$ при $t>0$	$\bar{f}(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	6	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	7	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	8	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
4	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	9	$t\cdot\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$

5	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	10	$t\cdot\sin\beta t$	$\dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

Знаходження оригінала по зображенню

Література: [2] – с. 307-310; [12] – с. 227-240.

Для відшукання оригінала по зображенню в найпростіших випадках використовують таблицю зображень основних елементарних функцій і теореми розкладання.

Перша теорема розкладання. Якщо зображення функції можна розкласти в степеневий ряд за степенями $\dfrac{1}{p}$, тобто

$$\bar{f}(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

(причому цей ряд збігається до $\bar{f}(p)$ при $|p|>R$, де $R=\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|\neq\infty$), то оригінал $f(t)$ знаходиться за формулою

$$f(t)=a_0+a_1\cdot\frac{t}{1!}+a_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots,$$

причому цей ряд збігається для всіх значень t.

Нехай зображення є <u>*правильною дробово-раціональною функцією*</u> від p, тобто

$$\bar{f}(p)=\frac{U(p)}{V(p)},$$

де $U(p)$ і $V(p)$ – многочлени від p відповідно степеня m і n, причому $m<n$.

Якщо розклад $V(p)$ на найпростіші множники має вигляд

$$V(p)=(p-p_1)^{k_1}(p-p_2)^{k_2}\ldots(p-p_r)^{k_r},\ k_1+k_2+\ldots+k_r=n,$$

то, як відомо з курсу алгебри, функцію $\bar{f}(p)$ можна розкласти на суму елементарних дробів:

$$\bar{f}(p)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j}\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \qquad (5)$$

Всі коефіцієнти цього розкладу можна визначити за формулою

$$A_{j,s}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left(\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left((p-p_j)^{k_j}\cdot\bar{f}(p)\right)\right),\ j=\overline{1,r},\ s=\overline{1,k_j}.$$

Якщо всі корені $V(p)$ прості, тобто

$$V(p)=(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n),\ \ p_j \neq p_k \text{ при } j\neq k,$$

то розклад спрощується

$$\bar{f}(p)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{p-p_j},\ \text{де } A_j=\frac{U(P)}{V'(P)},\ \ j=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Друга теорема розкладання. Нехай $\bar{f}(p)=\dfrac{U(p)}{V(p)}$ – правильна дробово-раціональна функція, подана у вигляді (5). Тоді оригінал $f(t)$, що відповідає зображенню $\bar{f}(p)$ має вигляд

$$f(t)=\sum_{j=1}^{r}\ \sum_{s=1}^{k_j}A_{j,s}\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}\cdot e^{p_j t}. \tag{7}$$

У випадку простих коренів знаменника $V(p)$ ($\bar{f}(p)$ подано за формулою (6)):

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{U(p_j)}{V'(p_j)}e^{p_j t}. \tag{8}$$

Для визначення коефіцієнтів $A_{j,s}$ формули (5) можна скористатися елементарними методами, що застосовуються в інтегральному численні при інтегруванні раціональних дробів (Частина 1, §4). Зокрема, це доцільно робити в тих випадках, коли всі комплексні корені знаменника $V(p)$ прості і попарно спряжені. Користуючись даними таблиці зображень основних функцій

$$\frac{A}{p-a}\to Ae^{at},\ \ \frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2}\to Ae^{at}\cos bt+\frac{B+Aa}{b}e^{at}\sin bt,$$

співвідношеннями

$$\frac{A}{(p-a)^k}=\frac{A}{(p-a)^{k-1}}\cdot\frac{1}{p-a},\ \ \frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^k}=\frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^{k-1}}\cdot\frac{1}{(p-a)^2+b^2}$$

та теоремою про множення зображень, можна знайти оригінал дробово-раціональної функції.

Застосування операційного числення до розв'язування деяких диференціальних рівнянь

Література: [2] – с. 312-315; [12] – с. 240-249.

З властивостей перетворення Лапласа видно, що зображення похідної і інтеграла отримуються із зображення функції $f(t)$ за допомогою виконання над $\bar{f}(p)$ алгебраїчних операцій. Слід також відмітити, що зображення значної частини функцій (див. таблицю зображень) є алгебраїчними функціями від p.

Це дає можливість деякі операції математичного аналізу (розв’язування диференціальних та інтегральних рівнянь і т.д.) звести до виконання алгебраїчних дій над зображеннями шуканих функцій.

Якщо дано лінійне диференціальне рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(t),$$

права частина якого $f(t)$ є оригіналом, то і розв’язок цього рівняння, що задовольняє довільні початкові умови виду

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

(тобто розв’язок задачі Коші з початковими умовами при $t = 0$), є оригіналом. Позначивши зображення цього рівняння $\bar{y}(p)$, знаходимо зображення лівої частини початкового диференціального рівняння і, прирівнюючи його до зображення функції $f(t)$, отримаємо так зване зображуюче рівняння, яке завжди є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно $\bar{y}(p)$. Визначивши з цього рівняння $\bar{y}(p)$, знаходимо оригінал $y(t)$.

П р и к л а д 7. (Задача 10.4) Методом операційного числення знайти частинний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 2y = e^t,$$

що задовольняє початкові умови $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

Розв’язання.

Використовуючи властивість 3 (диференціювання оригінала) та таблицю зображень пункт 3, переходимо до зображень:

$$\left(p^2 \cdot \bar{y} - p \cdot y(0) - y'(0)\right) + \left(p \cdot \bar{y} - y(0)\right) - 2\bar{y} = \frac{1}{p-1}.$$

Підставимо початкові умови

$$p^2 \cdot \bar{y} + p + p \cdot \bar{y} + 1 - 2\bar{y} = \frac{1}{p-1}.$$

Визначимо $\bar{y}$

$$(p^2 + p - 2)\bar{y} = \frac{1}{p-1} - 1 - p;\ (p^2 + p - 2)\bar{y} = \frac{-p^2 + 2}{p-1};$$

$$\bar{y} = \frac{-p^2 + 2}{(p-1)(p^2 + p - 2)} = \frac{-p^2 + 2}{(p-1)^2 (p+2)}.$$

Розкладемо цей раціональний дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{-p^2 + 2}{(p-1)^2 (p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+2},$$

Звідки

$$-p^2+2=A(p-1)(p+2)+B(p+2)+C(p-1)^2.$$

Підставимо $p=1$, отримаємо $1=3B$, $B=\dfrac{1}{3}$;

$$p=-2 \Rightarrow -2=9C,\ C=-\frac{2}{9};$$

$$p=0 \Rightarrow 2=-2A+2B+C,\ 2=-2A+\frac{2}{3}-\frac{2}{9},\ A=-\frac{7}{9}.$$

Отже,

$$\bar{y}=\frac{-p^2+2}{(p-1)^2(p+2)}=-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+2}.$$

Використовуючи другу теорему розкладання (формула (7)) знайдемо оригінал

$$y=-\frac{7}{9}e^t+\frac{1}{3}te^t-\frac{2}{9}e^{-2t}.$$

Приклад 8. (Задача 10.5) Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=2x+y+1, \end{cases}$$

що задовольняє початкові умови $x(0)=0,\ y(0)=5$.

Розв'язання.

Перейдемо до зображень. Враховуючи початкові умови,

$$\begin{cases} p\cdot\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p), \\ p\cdot\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+1/p. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно $\bar{x}$ та $\bar{y}$, отримаємо

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\ \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Використаємо другу теорему розкладання (формула (8)):

$$U(p)=10p+2, V(p)=p(p+1)(p-3)=p^3-2p^2-3p, V'(p)=3p^2-4p-3,$$

$$\frac{U(p_1)}{V'(p_1)}=\frac{U(0)}{V'(0)}=-\frac{2}{3},\frac{U(p_2)}{V'(p_2)}=\frac{U(-1)}{V'(-1)}=\frac{-8}{4}=-2,\frac{U(p_3)}{V'(p_3)}=\frac{U(3)}{V'(3)}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}.$$

Таким чином, $x=-\dfrac{2}{3}-2e^{-t}+\dfrac{8}{3}e^{3t}$.

Аналогічно знаходимо $y=\dfrac{1}{3}+2e^{-t}+\dfrac{8}{3}e^{3t}$.

Задачі контрольної роботи № 10

Задача 10.1. Методом Даламбера знайти рівняння $u = u(x;t)$ форми однорідної нескінченої струни, яка визначається хвильовим рівнянням $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо в початковий момент $t_0 = 0$ форма струни і швидкість точки струни з абсцисою x визначаються відповідно заданими функціями $u\big|_{t_0=0} = f(x)$ і $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t_0=0} = F(x)$.

1. $f(x) = x(2-x)$, $F(x) = e^{-x}$.
2. $f(x) = x^2$, $F(x) = \sin x$.
3. $f(x) = e^x$, $F(x) = \omega x$.
4. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \omega x$.
5. $f(x) = \sin x$, $F(x) = v_0$.
6. $f(x) = x$, $F(x) = \cos x$.
7. $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$.
8. $f(x) = x(2-x)$, $F(x) = e^x$.
9. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.
10. $f(x) = e^{-x}$, $F(x) = v_0$.

Задача 10.2. Представити задану функцію $\omega = f(z)$, де $z = x + iy$, у вигляді $\omega = u(x;y) + iv(x;y)$; перевірити, чи є вона аналітичною. Якщо так, то знайти значення її похідної в заданій точці z_0.

1. $\omega = (iz)^3$, $z_0 = -1 + i$.
2. $\omega = e^{-z^2}$, $z_0 = i$.
3. $\omega = i(1 - z^2) - 2z$, $z_0 = 1$.
4. $\omega = e^{1-2z}$, $z_0 = \frac{\pi i}{3}$.
5. $\omega = z^3 + 3z - i$, $z_0 = -i$.
6. $\omega = e^{1-2iz}$, $z_0 = \frac{\pi}{6}$.
7. $\omega = 2z^2 - iz$, $z_0 = 1 - i$.
8. $\omega = e^{iz^2}$, $z_0 = \frac{\sqrt{\pi} i}{2}$.
9. $\omega = z^3 + z^2 + i$, $z_0 = \frac{2i}{3}$.
10. $\omega = ze^z$, $z_0 = -1 + i\pi$.

Задача 10.3. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і визначити область збіжності цього ряду.

1. $f(z) = \frac{1}{3z-5}$, $z_0 = \frac{5}{3}$.
2. $f(z) = \sin\frac{z}{1-z}$, $z_0 = 1$.

3. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

4. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$.

5. $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=1$.

6. $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

7. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=0$.

8. $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0=1$.

9. $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0=i$.

10. $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$, $z_0=3$.

Задача 10.4. Методом операційного числення знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам.

1. $x'''+x''=\sin t;$ $x(0)=1,$ $x'(0)=1,$ $x''(0)=0$.
2. $x''+x'=t\cdot e^t;$ $x(0)=0,$ $x'(0)=0$.
3. $x'''-2x''+x'=4;$ $x(0)=1,$ $x'(0)=2,$ $x''(0)=-2$.
4. $x''-9x=e^{-2t};$ $x(0)=0,$ $x'(0)=0$.
5. $x''+x'=t^2+2t;$ $x(0)=4,$ $x'(0)=-2$.
6. $x''+9x=\cos 3t;$ $x(0)=1,$ $x'(0)=0$.
7. $x'''+x=1;$ $x(0)=0,$ $x'(0)=0,$ $x''(0)=0$.
8. $x''-4x=t-1;$ $x(0)=0,$ $x'(0)=0$.
9. $x''+2x'+x=\cos t;$ $x(0)=0,$ $x'(0)=0$.
10. $x''+3x'+2x=1+t+t^2;$ $x(0)=0,$ $x'(0)=1$.

Задача 10.5. Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задовольняє заданим початковим умовам.

1. $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=x+y; \end{cases}$ $x(0)=1;$ $y(0)=0$.

2. $\begin{cases} x'=-2x-2y-4z, \\ y'=-2x+y-2z, \\ z'=5x+2y+7z; \end{cases}$ $x(0)=1,$ $y(0)=1,$ $z(0)=1$.

3. $\begin{cases} x'+4x-y=0, \\ y'+2x+y=0; \end{cases}$ $x(0)=2;$ $y(0)=3$.

4. $\begin{cases} x' + 2y - z = 0, \\ y' - z = 0, \\ x + z - z' = 0; \end{cases}$ $x(0) = 2,$ $y(0) = \dfrac{1}{2},$ $z(0) = \dfrac{5}{2}.$

5. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1;$ $y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z; \end{cases}$ $x(0) = 2,$ $y(0) = 2,$ $z(0) = -1.$

7. $\begin{cases} x' - x + 2y = 3, \\ 3x' + y' - 4x + 2y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 0;$ $y(0) = 0.$

8. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1,$ $y(0) = 2,$ $z(0) = 3.$

9. $\begin{cases} x' + y' = 0, \\ x' - 2y' + x = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1;$ $y(0) = -1.$

10. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1;$ $y(0) = 1.$

Література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. II. – М.: Высш. шк., 1986. – 415 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. – М.: Наука, 1925. – 464 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ч.2.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Ч.2, Ч3.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1997. – 479 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1997. – 479 с.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
9. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 364 с.
10. Ангилейко И.М., Козлова Р.В. Задачи по теории функции комплексной переменной. – Минск: Вышейшая школа, 1976. – 127 с.
11. Сборник задач по математике / Ефимов А.В., Демидович Б.Ф. – М.: Наука, 1986. – 366 с.
12. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функции комплексной переменной. – М.: Наука, 1967. – 304 с.

ЗМІСТ