I. МАТРИЦІ І ДЕТЕРМІНАНТИ

I.I. Матриці, дії над матрицями

Означення 1.1. Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

що містить m рядків та n стовпців.

Якщо $m=n$, то матриця називається квадратною, а число m, що дорівнює n, - її порядком. В загальному випадку матриця називається прямокутною (розмірів $m \times n$). Числа a_{ij}, що утворюють матрицю називаються її елементами.

В запису a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j - номер стовпця.

Поряд з позначенням (1.1) використовують ще й таке позначення матриці

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

або скорочено $\|a_{ij}\|$ ($i=1,2,...,m;$ $j=1,2,...,n$). Часто матрицю (1.1) позначають однією буквою A.

Матриця, що складається з одного стовпця

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

називається матрицею-стовпцем.

Матриця, що складається з одного рядка $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, називається матрицею-рядком.

Для квадратної матриці вводяться поняття головної та побічної діагоналей. Головною діагоналлю називається діагональ, яку утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, побічною - діагональ, яку утворюють елементи a_{n1}, $a_{(n-1)2}, ..., a_{1n}$.

Квадратна матриця, всі елементи якої, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, тобто матриця, що має вигляд

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

називається діагональною.

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається одиничною і позначається буквою *E*. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою і позначається буквою *O*.

Рівність матриць. Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їх відповідні елементи збігаються.

Додавання матриць. Сумою $A+B=C$ двох матриць *A* і *B*, однакових розмірів $m \times n$, називається матриця *C* тих же розмірів, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць *A* і *B,* тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1, 2,...,m; j=1, 2,..., n).$$

Операція знаходження суми матриць називається операцією додавання матриць.

Властивості операції додавання матриць:

1. $A + B = B + A$ *(комутативна властивість).*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(асоціативна властивість).*

Множення матриці на число. Добутком $\alpha A=C$ матриці $A=\|a_{ij}\|$ розмірів $m\times n$ на число α називається матриця $C=\|c_{ij}\|$ тих же розмірів, елементи якої одержуються із відповідних елементів матриці *A* множенням на число α, тобто

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \quad (i=1, 2, ..., m; j= 1, 2, ..., n).$$

Операція знаходження добутку матриці на число називається операцією множення матриці на число.

Властивості множення матриці на число:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(дистрибутивна властивість числового множника відносно суми матриць).*
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(дистрибутивна властивість матричного множника відносно суми чисел).*
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ *(асоціативна властивість).*

Різниця $A-B$ двох матриць однакових розмірів визначається рівністю $A-B = A+(-1)B$.

Множення матриць. Добутком $AB = C$ матриці A розмірів $m \times n$ і матриці B розмірів $n \times p$ називається матриця C розмірів $m \times p$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A і елементів j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., p).$$

Операція знаходження добутку матриць A і B називається операцією множення матриць A і B.

Зауваження 1.1. Операція множення двох матриць можлива лише в тому випадку, коли число стовпців в першому співмножнику дорівнює числу рядків в другому.

Властивості операції множення матриць:

1. $(AB)C = A(BC)$ (*асоціативна властивість*).
2. $A(B + C) = AB + AC$ (*дистрибутивна властивість першого множника*).
3. $(A + B)C = AC + BC$ (*дистрибутивна властивість другого множника*).

Множення матриць в загальному випадку не підлягає комутативній властивості.

Якщо $AB = BA$, то матриці називаються комутативними.

Транспонування. Нехай дана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

одержана із A заміною рядків на стовпці з збереженням порядку їх слідування, називається транспонованою до A .

Операція заміни матриці A на A^{T} називається транспонуванням матриці A.

Властивості транспонування матриці:
1. $(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$.
2. $(\alpha A)^{T}=\alpha A^{T}$.
3. $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$.
4. $(A^{T})^{T}=A$.

Якщо квадратна матриця S збігається зі своєю транспонованою матрицею S^{T}, тобто $S=S^{T}$, то така матриця називається симетричною. Якщо квадратна матриця K відрізняється знаком від своєї транспонованої матриці K^{T}, тобто $K=-K^{T}$, то така матриця називається кососиметричною.

Означення 1.2. Цілим додатним степенем A^{n} квадратної матриці A є добуток n матриць, рівних A .

Задача з розв'язком

Задача. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-x-1$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 1.2. Якщо в многочлені $f(x)$ аргумент x покладають рівним квадратній матриці A, то вільний член a цього многочлена замінюють на матрицю aE, де E - одинична матриця того ж порядку, що і A .

Розв'язок.

$$f(A)=A^2-A-E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 4+3+1 & 2+1-1 & 2+2+0 \\ 6+3+2 & 3+1-2 & 3+2+0 \\ 2-3+0 & 1-1+0 & 1-2+0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2+1 & 1 & 1 \\ 3 & 1+1 & 2 \\ 1 & -1 & 0+1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 1-6 обчислити $A+B$:

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&5\\3&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5&0\\2&-1&7\\4&3&2\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&5&2\\4&6&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&-3\\5&6&4\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\3&0&5\\1&-1&17\\0&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&4&1\\4&6&2\\2&5&6\end{pmatrix}$. 4. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&0\\3&4&3\\1&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&2\\4&-1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&4&-1&0&-3\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$.

В задачах №№ 7-10 знайти лінійні комбінації матриць:

7. $2A+5B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4\\3&6\\2&7\end{pmatrix}$.

8. $2A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&-3\end{pmatrix}$.

9. $A-\frac{1}{2}B$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2&5\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&6\\-12&3\end{pmatrix}$.

10. $-A+2B$, якщо $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&-3\end{pmatrix}$.

В задачах №№ 11, 12 знайти x_1 і x_2 із рівнянь:

11. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

В задачах №№ 13-21 транспонувати матриці:

13. $\begin{pmatrix}5&0&-7&6\\3&8&2&-1\end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix}1&3&4&-5\end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix}2&3&4&5\\6&7&8&9\\10&11&-1&3\end{pmatrix}$. 16. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&4&2\\2&5&3\end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix}3&0\\4&5\\7&8\end{pmatrix}$. 19. $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\0\end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix}2&3&4\\5&-1&0\\3&1&1\end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

В задачах №№ 22, 23 знайти добутки матриць *AB* і *BA:*

22. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. 23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 24, 25 обчислити *AB-BA:*

24. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 25. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 26-35 обчислити *AB:*

26. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 27. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 29. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 31. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

32. $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 33. $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

34. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. 35. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 36, 37 знайти добутки матриць:

36. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 38-44 обчислити вирази:

38. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. 39. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5$. 40. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$. 41. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$. 42. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

43. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$. 44. $\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}^k$.

45. Довести, що $T^2 = \begin{pmatrix} ch2\varphi & sh2\varphi \\ sh2\varphi & ch2\varphi \end{pmatrix}$, якщо $T = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$.

46. Знайти загальний вигляд матриці A, для якої $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A=O$.

47. Дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти добутки $AC, ACD, BD, BC, BCDA$.

В задачах №№ 48-51 знайти всі матриці, комутативні з кожною із таких матриць:

48. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. 49. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 50. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 51. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

52. Обчислити $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

В задачах №№ 53-56 знайти $f(A)$:

53. $f(x)=x^2-5x+3$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. 54.

$f(x)=2x^2+3x+5$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

55. $f(x)=x^2-2x+1,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

56. $f(x)=x^3-7x^2+13x-5,\ A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

57. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівнянню $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

58. Знайти всі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці.

59. Довести, що якщо для матриць A і B існують добутки AB і BA, причому $AB=BA$, то матриці A і B - квадратні і мають однаковий порядок.

60. Довести, що якщо A - діагональна матриця і всі елементи її головної діагоналі різні, то довільна матриця, комутативна з A, теж діагональна.

1.2. Детермінанти і їх властивості

Розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Означення 1.3. Детермінантом другого порядку, складеним з елементів цієї матриці A, називається число, що дорівнює $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, яке позначається

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

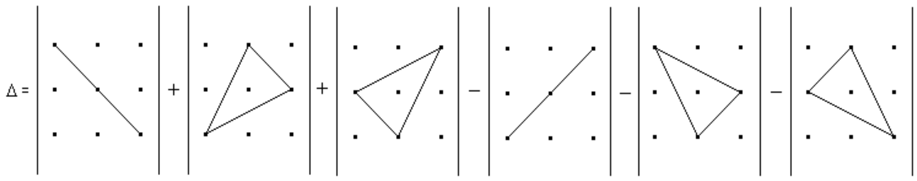
Означення 1.4. Детермінантом 3-го порядку, складеним із елементів цієї матриці A, називається число, що дорівнює

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \qquad (1.2)$$

яке позначається

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вираз (1.2) складений за таким правилом (правилом трикутника): добуток елементів, розміщених вздовж головної діагоналі і два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобедрених трикутників із основами паралельними головній діагоналі і з вершинами в протилежному куті, беруться із знаком плюс. Три добутки, що складені за тим же правилом, але відносно побічної діагоналі, беруться із знаком мінус:



Властивості детермінантів 2-го і 3-го порядку.

Властивість 1. Величина детермінанта не зміниться, якщо замінити кожний його рядок стовпцем із тим же номером, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 2. Перестановка двох рядків (стовпців) детермінанта рівносильна множенню його на (-1).

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Детермінант, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпця (рядка) детермінанта на довільне число k рівносильне множенню детермінанта на це число.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок 1. Якщо всі елементи якогось рядка (стовпця) рівні нулю, то і детермінант дорівнює нулю.

Наслідок 2. Детермінант, в якому відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо кожний елемент i-го рядка (i-го стовпця, де i=1,2,3) є сума двох доданків, то детермінант дорівнює сумі двох детермінантів, у першого з яких i-й рядок (i-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого - з других; інші елементи усіх трьох детермінантів однакові.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок. Величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Подальші властивості детермінантів зв'язані з поняттям мінора і алгебраїчного доповнення елементів детермінанта.

Означення 1.5. Мінором елемента a_{ij} називається детермінант, порядок якого на одиницю менший порядку даного детермінанта, утворений з даного детермінанта викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}. Мінор елемента a_{ij} позначається через Δ_{ij}.

Означення 1.6. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток мінора Δ_{ij} на величину $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Властивість 6. Детермінант дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Властивість 7. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Наприклад. В детермінанті 3-го порядку

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0.$$

Зауваження 1.3. Розглянемо n цілих чисел 1, 2 , 3, ..., n. Їх можна розмістити в різному порядку. Всілякі розміщення цих чисел називаються перестановками. Перестановка (1, 2, 3, ..., n), в якій числа розміщені в порядку зростання, називається натуральною.

Із n чисел 1, 2, ..., n можна скласти $n!$ перестановок.

Означення 1.7. Нехай є перестановка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ чисел 1, 2, 3, ..., n. Два числа, що входять в цю перестановку, утворюють інверсію, якщо більше із цієї пари передує меншому. Число пар, що утворюють інверсію, називається числом інверсій перестановки.

Означення 1.8. Перестановка називається парною, якщо вона має парне число інверсій, і непарною в протилежному випадку.

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.9. Детермінантом n-го порядку, складеним із елементів матриці A, називається алгебраїчна сума $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів a_{ik}, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця, при цьому член суми береться з знаком плюс, якщо другі індекси його елементів утворюють парну перестановку, і з знаком мінус, якщо ця перестановка непарна, тоді як перші індекси утворюють натуральну перестановку. Детермінант n-го порядку позначають

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для детермінантів n-го порядку залишаються в силі означення мінора і алгебраїчного доповнення елемента детермінанта. Детермінанти n-го порядку мають ті ж властивості, що і детермінанти другого і третього порядку. Зокрема, для детермінантів n-го порядку справедлива властивість 6, яку можна сформулювати так: детермінант n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення, тобто для будь-якого i=1, 2, 3, ..., n має місце рівність

$$|A|= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in},$$

яка називається розкладом детермінанта $|A|$ за елементами i-го рядка. Аналогічно для будь-якого k=1,2,3,..., n має місце розклад детермінанта $|A|$ за елементами k-го стовпця

$$|A|=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+...+a_{nk}A_{nk}.$$

Властивість 6 дозволяє звести обчислення детермінанта n-го порядку до обчислення n детермінантів $(n$-1)-го порядку. Для спрощення обчислень доцільно спочатку перетворити детермінант так, щоб в одному з його рядків (стовпців) всі елементи, крім одного, перетворилися в нуль. Тоді обчислення даного детермінанта зведеться до обчислення одного детермінанта нижчого порядку. Таке перетворення детермінанта можна виконати, спираючись на його властивості, зокрема на наслідок властивості 5.

Задачі з розв'язком

Задача 1. Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Розкладемо його за елементами другого рядка

$$\Delta = (-1)^{2+1} a \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} c \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+4} d \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9a + 12b - 9c + 3d.$$

Задача 2. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. В даному випадку для розкладу зручно вибрати третій стовпець, так як наявність нульових елементів дає можливість не обчислювати відповідних їм алгебраїчних доповнень (добуток нуля на відповідне число дорівнює нулю). Тобто

$$\Delta = 0A_{13} + 0A_{23} + 0A_{33} + 3A_{43} = 3A_{43} = -3\Delta_{43}$$

$$\Delta = -3 \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} = 3x^3 + 9x.$$

Задача 3. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. За наслідком властивості 5 величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Помножимо елементи першого рядка на (-1) і додамо їх до відповідних елементів другого і четвертого рядків.

Одержимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

В одержаному детермінанті елементи першого рядка помножимо на (-2) і додамо їх до відповідних елементів третього рядка.

Одержимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей детермінант за елементами першого стовпця.

Одержимо

$$\Delta = 1A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Перетворимо останній детермінант, додаючи до елементів другого рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на (-1) і до елементів третього рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на (-2).

Одержимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -(-48) = 48.$$

Задачі для розв'язування

61. Визначити з яким знаком входить в детермінант 7-го порядку добуток $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

62. Підібрати значення i і j так, щоб добуток $a_{47}a_{63}a_{1j}a_{55}a_{7i}a_{24}a_{31}$ був членом детермінанта (якого порядку?) і входив до нього зі знаком плюс.

В задачах №№ 63-65 використовуючи властивості детермінантів, показати що такі детермінанти рівні нулю:

63. $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$. 64. $\begin{vmatrix} sin^2\alpha & 1 & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & 1 & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & 1 & cos^2\gamma \end{vmatrix}$. 65. $\begin{vmatrix} sin\,\alpha & cos\,\alpha & sin(\alpha+\delta) \\ sin\,\beta & cos\,\beta & sin(\beta+\delta) \\ sin\,\gamma & cos\,\gamma & sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

В задачах №№ 66-112 обчислити детермінанти:

66. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. 67. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. 68. $\begin{vmatrix} sin\,\alpha & cos\,\alpha \\ -cos\,\alpha & sin\,\alpha \end{vmatrix}$. 69. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. 70. $\begin{vmatrix} sin\,\alpha & cos\,\alpha \\ sin\,\beta & cos\,\beta \end{vmatrix}$.

71. $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$. 72. $\begin{vmatrix} tg\alpha & sin\,\alpha \\ cos\,\alpha & cos^2\alpha \end{vmatrix}$. 73. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$. 74. $\begin{vmatrix} 1 & log_b\,a \\ log_a\,b & 1 \end{vmatrix}$.

75. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$. 76. $\begin{vmatrix} 2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi & 2\,sin^2\varphi-1 \\ 2\,cos^2\varphi-1 & 2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi \end{vmatrix}$. 77. $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

78. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$. 79. $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, де $\varepsilon = cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}$. 80. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

81. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. 82. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}$. 83. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}$. 84. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

85. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 86. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$. 87. $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 88. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. 89. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

90. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. 91. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. 92. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. 93. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$. 94. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

95. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. 96. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. 97. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. 98. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

99. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. 100. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$. 101. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$. 103. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. 104. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

105. $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}$. 106. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. 107. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

108. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -d & c \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & e & -f & 0 \end{vmatrix}$. 109. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. 110. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$.

111. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$. 112. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

В задачах №№ 113-122 довести тотожності:

113. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 114. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

115. $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\alpha}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)).$$

116. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$. 117. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

118. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$

119. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta + \sin(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma + \sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$

120. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

121. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d.$

122. При якій умові справедлива рівність:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

1.3. Обернена матриця. Розв’язування матричних рівнянь

Нехай A - квадратна матриця порядку n.

Означення 1.10. Квадратна матриця C порядку n називається оберненою до матриці A, якщо $AC = CA = E$, де E - одинична матриця порядку n.

Матриця, обернена до матриці A, позначається через A^{-1}.

Означення 1.11. Квадратна матриця A порядку n називається особливою, якщо її детермінант дорівнює нулю. Якщо $|A| \neq 0$, то A називається неособливою.

Теорема 1.1. Особливі матриці обернених матриць не мають. Кожна неособлива матриця має єдину обернену матрицю.

Якщо $|A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} (i=1, 2, ..., n; j=1, 2, ..., n) - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix},$$

то в матричній формі система має вигляд

$$AX=B.$$

Якщо детермінант матриці A не дорівнює нулю, то розв'язок системи має вигляд

$$X=A^{-1}B.$$

Задача з розв'язком

Задача. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислимо детермінант матриці

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$|A|=\Delta=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3.$$

Отже, матриця A неособлива.

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до A. Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3, \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=6, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=-1,$$

A_{13}=$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}9 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-6$, A_{23}=$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3$, A_{33}=$(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}7 & 2\\ 9 & 3\end{vmatrix}=3$.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -7 & 6 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи запишеться так:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=X=A^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -7 & 6 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\ 15\\ 14\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\ -15\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}.$$

Звідки x_1=2, x_2=-5, x_3=3.

Задачі для розв’язування

В задачах №№ 123-132 знайти матрицю, обернену до кожної з матриць:

123. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$. 124. $\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 6\end{pmatrix}$. 125. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 126. $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

127. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 128. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$. 129. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 130. $\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

131. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. 132. $\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

В задачах №№ 133-136 знайти добуток матриць:

133. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. 134. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$. 135. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$.

136. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 4 & 3\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

В задачах №№ 137-147 знайти невідому матрицю X із рівнянь:

137. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

138. $X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

139. $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

140. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

141. $X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

142. $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

143. $X \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

144. $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

145. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

146. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

147. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 148-152 обчислити $f(A)$, якщо ділення матриці на матрицю рівносильне множенню чисельника на матрицю, обернену до знаменника:

148. $f(x)=\dfrac{2+x}{1+x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

149. $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

150. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

151. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x+1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

152. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2-x}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 153-161 розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

153. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$ 154. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$ 155. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ -5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

156. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$ 157. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$ 158. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

159. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ 160. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$ 161. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$