2. ЛІНІЙНИЙ ПРОСТІР

2.1. Вектори в звичайному просторі

2.1.1. Лінійні операції над векторами

Означення 2.1. Вектором називається напрямлений відрізок.

Довжина цього відрізка називається довжиною або модулем вектора.

Вектор називається нульовим, якщо його початок і кінець збігаються.

Довжина нульового вектора дорівнює нулю, за напрям нульового вектора можна взяти довільний наперед заданий напрямок.

Вектор називається одиничним, якщо його довжина дорівнює одиниці.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини і однакові напрями.

Два вектори називаються протилежними, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені і мають рівні модулі.

Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині, або на паралельних площинах.

Ортом даного ненульового вектора називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора.

Зауваження 2.1. З означення рівності двох векторів випливає, що поняття вектора рівносильне поняттю паралельного перенесення.

Позначення. Вектори позначаються малими латинськими буквами з стрілкою зверху.

Наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Якщо відомі початок вектора $\vec{a}$ - точка *A*, кінець вектора $\vec{a}$ - точка *B*, то пишуть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Довжина (модуль) вектора $\vec{a}$ позначається через $|\vec{a}|$.

Вектор, протилежний до $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$, орт вектора $\vec{a}$ позначається через $\vec{a}_0$, нульовий вектор позначається через $\vec{0}$.

Зауваження 2.2. З означення нульового вектора випливає, що $|\vec{0}| = 0$. Із означення орта вектора $\vec{a}$ випливає, що $|\vec{a}_0| = 1$.

Під лінійними операціями над векторами розуміють операцію додавання векторів і операцію множення вектора на дійсне число.

Додавання векторів. Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який іде з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, при умові, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис.2.1.).

Поряд із «правилом трикутника», яке сформульоване вище, часто користуються рівносильним йому «правилом паралелограма». Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ приведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить із спільного початку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.2.2.).

Властивості операції додавання векторів:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*комутативна властивість*).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*асоціативна властивість*).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.
4. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$ такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

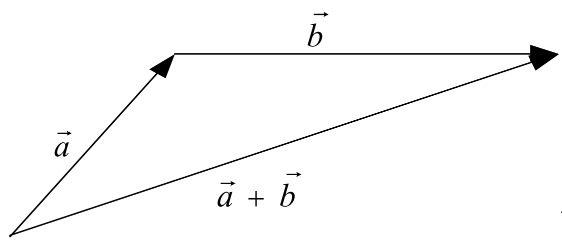

Рис.2.1

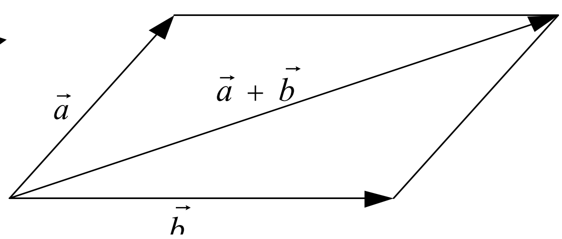

Рис.2.2.

Зауваження 2.3. Сума кількох векторів може бути знайдена за «правилом многокутника». Сумою кількох векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого доданка, а кінець з кінцем останнього, при умові, що початок кожного наступного доданка збігається з кінцем попереднього (рис.2.3).

Означення 2.2. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, із яких перший називається зменшуваним, а другий від'ємником, називається сума зменшуваного вектора і вектора, протилежного від'ємнику, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис.2.4).

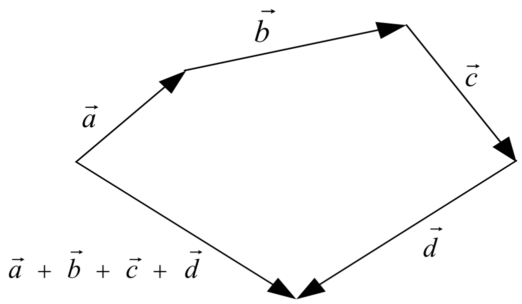

Рис.2.3.

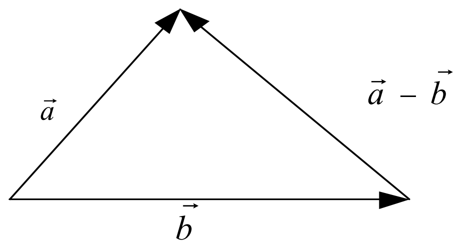

Рис.2.4.

Множення вектора на число. Добутком $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, який має:

1) модуль, рівний добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α, тобто $|\vec{a}\alpha|=|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$,

2) напрям, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний напряму вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha<0$.

Властивості операції множення вектора на число:

1. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми векторів*).
2. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (*дистрибутивна властивість векторного множника відносно суми чисел*).
3. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (*асоціативна властивість*).

Означення 2.3. Лінійною комбінацією *n* векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, тобто вираз, що має вигляд

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n.$$

Теорема 2.1. Якщо вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$ і $|\vec{a}|\neq 0$, то існує дійсне число α таке, що $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

Задача з розв'язком

Задача. Вектори $\vec{AC}=\vec{a}$ і $\vec{BD}=\vec{b}$ є діагоналями паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\vec{AB},\vec{BC}$, $\vec{CD}$ і $\vec{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язок. Нехай O - точка перетину діагоналей (рис.2.5).

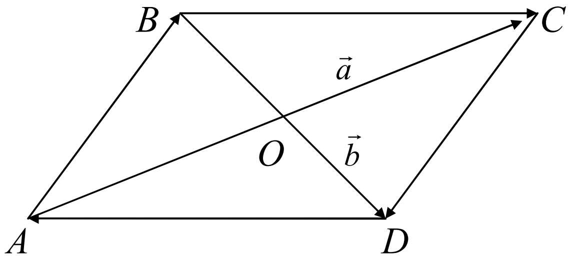

Рис.2.5.

Так як $\left|\vec{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{BD}\right|$ і вектори $\vec{OB}$ і $\vec{BD}$ мають протилежні напрями, то $\vec{OB}=-\frac{1}{2}\vec{b}$. Аналогічно, $\vec{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}$. Так як $\left|\vec{OC}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{AC}\right|$ і вектори $\vec{OC}$ і $\vec{AC}$ мають однакові напрями, то $\vec{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}$. Аналогічно, $\vec{OD}=\frac{1}{2}\vec{b}$. Із рівності $\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}$ випливає, що $\vec{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Аналогічно,

$$\vec{BC}=\vec{BO}+\vec{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{CD}=\vec{CO}+\vec{OD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\vec{DA}=\vec{DO}+\vec{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$$

Задачі для розв'язування

162. У паралелограмі $ABCD$ O - точка перетину діагоналей, а точки M, N, P і Q -відповідно середини сторін AB, BC, CD і DA. Побудувати на рисунку такі вектори:

 1) $\vec{OM}-\vec{OA}$; 2) $\vec{OC}-\vec{OP}$; 3) $\vec{OQ}-\vec{OB}$; 4) $\vec{AC}-\vec{PD}$; 5) $\vec{AM}+\vec{MQ}$; 6) $\vec{OA}-\vec{NP}$; 7) $\vec{AB}-\vec{OC}$.

163. Дано паралелограм $ABCD$ і довільна точка O простору. Довести, що $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$. Довести обернене твердження: якщо для деякого чотирикутника $ABCD$ і деякої точки O в просторі має місце співвідношення $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$, то $ABCD$ - паралелограм.

164. Дано паралелограм $ABCD$. Точка M лежить на стороні CD. Знайти суму векторів:

 1) $\vec{AB}+\vec{AD}$; 2) $(-\vec{AM})+\vec{DM}$; 3) $\vec{AB}+\vec{CD}$; 4) $\vec{DA}+\vec{BM}$.

165. У трикутнику ABC проведені медіани $AD,\ BE$ і CP. Записати вектори $\vec{AD},\ \vec{BE}$ і $\vec{CP}$ в вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$.

166. Нехай ABC - довільний трикутник, а E і F - середини сторін AB і BC. Виразити вектори $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ і $\vec{AC}$ через $\vec{a} = \vec{AE}$ і $\vec{b} = \vec{AF}$.

167. Точки E і F є серединами сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$ (на площині або в просторі). Довести, що $\vec{EF} = \dfrac{\vec{BC} + \vec{AD}}{2}$. Користуючись доведеним, довести теорему про середню лінію трапеції.

168. Дано трикутник ABC. На стороні BC розташована точка M так, що $\dfrac{|BM|}{|MC|} = \lambda$. Знайти $\vec{AM}$, якщо $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{c}$.

169. Довести, що точка M належить прямій AB тоді і тільки тоді, коли при довільному виборі точки O справедлива рівність $\vec{OM} = \alpha\,\vec{OA} + (1-\alpha)\vec{OB}$, де α - деяке число. Яким має бути α, щоб точка M була: 1) серединою відрізка B, 2) внутрішньою точкою відрізка AB, 3) зовнішньою точкою відрізка AB.

170. На стороні AD паралелограма $ABCD$ відкладений відрізок $\vec{AK} = \dfrac{1}{5}\vec{AD}$, а на діагоналі $\vec{AC}$ - відрізок $\vec{AM} = \dfrac{1}{6}\vec{AC}$. Довести, що вектори $\vec{KM}$ і $\vec{MB}$ - колінеарні і знайти відношення $\dfrac{|KM|}{|MB|}$.

171. На площині трикутника ABC знайти таку точку, щоб сума векторів, які ідуть із цієї точки до вершин трикутника, була рівна нулю.

172. У трикутнику ABC пряма AM є бісектрисою кута BAC, причому точка M лежить на стороні BC. Знайти AM, якщо $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$.

173. Довести, що сума векторів, які ідуть із центра правильного многокутника до його вершин дорівнює $\vec{0}$.

174. Дано тетраедр $OABC$. Виразити через вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ вектор $\vec{EF}$, початком якого є точка E - середина ребра OA, а кінцем точка F - середина ребра BC.

175. Дано: $|\vec{a}|$=13, $|\vec{b}|$=19, $|\vec{a}+\vec{b}|$=24. Обчислити $|\vec{a}-\vec{b}|$.

176. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\vec{a}|$=3 і $|\vec{b}|$=5.

Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

177. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб мали місце такі співвідношення:

1) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$.

178. Три сили $\vec{M}$, $\vec{N}$ і $\vec{P}$, прикладені до однієї точки, мають взаємно перпендикулярні напрямки. Знайти величину їх рівнодіючої $\vec{R}$, якщо відомо, що $|\vec{M}|$=2 кг, $|\vec{N}|$=10 кг, $|\vec{P}|$=11 кг.

2.1.2. Лінійна залежність векторів

Означення 2.4. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, з яких хоч би одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Означення 2.5. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації з числами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ можлива лише в випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Теорема 2.2. Якщо хоч би один із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ нульовий, то ці вектори є лінійно залежними.

Теорема 2.3. Якщо серед n векторів які-небудь n-1 вектори - лінійно залежні, то і всі n векторів лінійно залежні.

Теорема 2.4. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.

Теорема 2.5. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.

Теорема 2.6. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів і не може бути ні одного нульового вектора.

Теорема 2.7. Будь-які чотири вектори в звичайному просторі лінійно залежні.

Задача з розв'язком

Задача. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α вектори $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ будуть лінійно залежні.

Розв'язок. За теоремою 2.5 необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Так як $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$, то з колінеарності векторів $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ випливає, що $\alpha\vec{a}+2\vec{b}=\beta(\vec{a}-\vec{b})$, або $\alpha\vec{a}+2\vec{b}-\beta(\vec{a}-\vec{b})=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha-\beta)\vec{a}+(2+\beta)\vec{b}=\vec{0}$. За умовою задачі вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні. Тому з рівності

$$(\alpha-\beta)\vec{a}+(2+\beta)\vec{b}=\vec{0}$$

випливає, що

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0,\\ 2+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta,\\ \beta=-2\end{cases} \Rightarrow \alpha=-2.$$

Задачі для розв'язування

179. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α такі пари векторів лінійно залежні:

 1) $(\alpha+1)\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}$; 2) $\alpha\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

180. Знайти α і β, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні і

 1) $3\vec{a}+5\vec{b}=\alpha\vec{a}+(2\beta+1)\vec{b}$; 2) $(2\alpha-\beta-1)\vec{a}-(3\alpha-\beta+10)\vec{b}=\vec{0}$.

181. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - лінійно незалежні.

 1) При якому значенні α вектори $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{y}=\alpha\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ лінійно залежні?

 2) При якому значенні α вектори $\vec{x}=\alpha\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=\vec{a}+\alpha\vec{b}-\vec{c}$ лінійно залежні?

182. Довести, що для довільних векторів $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ вектори $\vec{a}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$, $\vec{b}=\vec{p}_1$-2$\vec{p}_2$ і $\vec{c}$=-$\vec{p}_1$-4$\vec{p}_2$ лінійно залежні. Знайти коефіцієнти лінійної залежності.

183. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - некомпланарні вектори. Визначити, чи колінеарні такі пари векторів:

 1) $\vec{p}_1=\vec{a}-2\sqrt{3}\vec{b}$ і $\vec{p}_2=\sqrt{3}\vec{a}-6\vec{b}$; 2) $\vec{p}_1=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{p}_2=\vec{a}+2\vec{b}$;

 3) $\vec{p}_1=7\vec{a}$ і $\vec{p}_2=3\sqrt{5}\vec{a}$; 4) $\vec{p}_1=\vec{a}-2\sqrt{2}\vec{b}+\sqrt{6}\vec{c}$ і $\vec{p}_2=\sqrt{2}\vec{a}-4\vec{b}+2\sqrt{3}\vec{c}$.

184. Довести, що якщо вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ - лінійно незалежні, то і вектори $\vec{a}_1+\vec{a}_2$, $\vec{a}_2+\vec{a}_3$, $\vec{a}_3+\vec{a}_1$ лінійно незалежні.

185. Довести, що для будь-яких заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ і $\vec{c}-\vec{a}$ компланарні.

186. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Довести, що вектори $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $-\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$ компланарні.

187. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. При яких значеннях λ і μ вектори $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ колінеарні.

2.1.3. Поняття базису. Афінна система координат

Означення 2.6. Два лінійно незалежні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать на площині, утворюють базис в цій площині, якщо довільний вектор $\vec{c}$ цієї площини може бути представлений у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Три лінійно незалежних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють в просторі базис, якщо будь-який вектор $\vec{d}$ може бути представлений у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Справедливі такі твердження:

1) будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать в даній площині, утворюють базис в цій площині;

2) будь-яка трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює базис в просторі.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - довільний базис в просторі, тобто довільна трійка некомпланарних векторів. Тоді (за означенням базису) для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, що буде справедлива рівність

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \qquad (2.1)$$

Рівність (2.1) називається розкладом вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа α, β, γ координатами вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звичайно пишуть так $\vec{d}$=(α, β, γ).

Теорема 2.8. Вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладеним за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тобто координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ визначаються однозначно.

Теорема 2.9. При додаванні двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати помножаться на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Афінна система координат в просторі визначається заданням базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і деякої точки *O*, яка називається початком координат.

Афінними координатами будь-якої точки *M* називаються координати вектора $\vec{OM}$ (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), тобто числа α, β, γ такі, що $\vec{OM} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Запис M(α, β, γ) означає, що числа α, β, γ є координатами точки *M*. Вектор $\vec{OM}$ називається радіус-вектором точки *M*.

Якщо дано точки $M_1(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ і $M_2(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$, то вектор $\vec{M_1M_2} = (\alpha_2 - \alpha_1;\beta_2 - \beta_1;\gamma_2 - \gamma_1)$.

Аналогічно визначається афінна система координат на площині.

Задача з розв'язком

Задача. В трапеції $ABCD$ відношення основи $\vec{BC}$ до основи $\vec{AD}$ дорівнює λ. Приймаючи за базис вектори $\vec{AD}$ і $\vec{AB}$, знайти координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AC}$

Зауваження. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - два колінеарні вектори і $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то число λ називається відношенням вектора $\vec{b}$ до вектора $\vec{a}$.

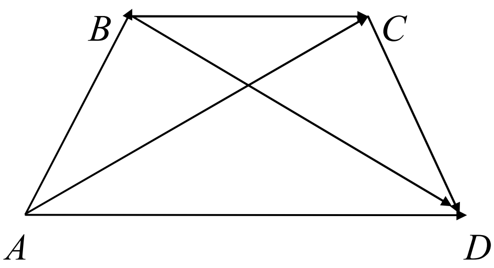

Рис.2.6

Розв'язок. За умовою задачі $\vec{BC} = \lambda\vec{AD}$ (рис.2.6).

Визначаємо координати векторів:

1) $\vec{AB} = 0\vec{AD} + 1\vec{AB} = (0;1);$

2) $\vec{AD} = 1\vec{AD} + 0\vec{AB} = (1;0);$ $\vec{DA}$=(-1;0);

3) $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = (1;0) - (0;1) = (1;-1);$

4) $\vec{BC} = \lambda\vec{AD} + 0\vec{AB} = (\lambda;0);$

5) $\vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BD} = -\vec{BC} + \vec{BD} = (-\lambda;0) + (1;-1) = (1-\lambda;-1);$

6) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (0;1) + (\lambda;0) = (\lambda;1).$

Задачі для розв'язування

188. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Приймаючи за базисні вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$, $\vec{FA}$.

189. Дано паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$. Приймаючи за базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектори $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA'}$ знайти в цьому базисі координати векторів, які збігаються з ребрами, діагоналлю паралелепіпеда і діагоналями його граней, для яких вершина A' є початком.

190. Дано рівнобічну трапецію $ABCD$, в якій нижня основа $\vec{AB} = \vec{a}$, бічна сторона $\vec{AD} = \vec{b}$ і кут між ними $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Розкласти за $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD}$.

191. У ромбі $ABCD$ вектори $\vec{AC} = \vec{e}_1$ і $\vec{BD} = \vec{e}_2$ прийняті за базисні. Знайти координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ і $\vec{DA}$ у цьому базисі.

192. У трикутнику ABC проведена медіана BK і середня лінія MN паралельна AC. Прямі BK і MN перетинаються в точці O. Знайти:

а) координати векторів $\vec{CM}$, $\vec{OB}$, $\vec{KM}$, $\vec{CB}$, $\vec{NC}$, $\vec{AN}$, приймаючи вектори $\vec{OC}$ і $\vec{OM}$ за базисні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$;

б) координати тих же векторів $\vec{CM}$, $\vec{OB}$, $\vec{KM}$, $\vec{CB}$, $\vec{NC}$, $\vec{AN}$, приймаючи вектори $\vec{KC}$ і $\vec{KN}$ за базисні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$.

193. В трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $AD:DB = 2:7$. Знайти координати вектора $\vec{CD}$, приймаючи за базисні вектори $\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{CB} = \vec{a}$.

194. В трикутнику ABC проведена бісектриса AD. Знайти координати вектора $\vec{AD}$, приймаючи за базис вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$.

195. В трапеції $ABCD$ довжини основ AD і BC відносяться як 3:2. Приймаючи за базисні вектори $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$.

196. В трапеції $ABCD$ відношення довжин основ AD і BC дорівнює 4. Приймаючи вершину A за початок координат, а вектори $\vec{AD}$ і $\vec{AB}$ за базисні, знайти координати вершин трапеції, точки M - перетину її діагоналей і точки S - перетину бічних сторін.

2.2. Лінійний простір

2.2.1. Означення і властивості лінійного простору

Означення 2.7. Множина L елементів $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ довільної природи називається дійсним лінійним простором, якщо справджуються такі три умови:

I) Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ множини L ставиться у відповідність третій елемент $\vec{z}$ цієї множини, що називається сумою елементів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ і позначається символом $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

II) Існує правило, за допомогою якого будь-якому елементу $\vec{x}$ множини L і будь-якому дійсному числу λ ставиться у відповідність елемент $\vec{u}$ цієї множини, що називається добутком елемента $\vec{x}$ на число λ і позначається символом $\vec{u} = \lambda\vec{x}$ або $\vec{u} = \vec{x}\lambda$.

III) Указані два правила підпорядковані таким восьми аксіомам:

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (*комутативна властивість суми*).
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (*асоціативна властивість суми*).
3. Існує нульовий елемент $\vec{0}$ такий, що $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x}$ (*особлива роль нульового елемента*).
4. Для кожного елемента $\vec{x}$ існує протилежний елемент $\vec{x}'$ такий, що $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$.
5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x}$ (*особлива роль числового множника 1*).
6. $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$ (*асоціативна властивість відносно числового*

співмножника).

7. $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$ (*дистрибутивна властивість множника-елемента відносно суми чисел*).

8. $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми елементів*).

Зауваження 2.4. Елементи лінійного простору часто називають векторами і позначають так, як і вектори звичайного простору.

Приклад 1. Розглянемо множину впорядкованих наборів із n дійсних чисел. Цю множину називають n-вимірним числовим простором A_n, елемент цієї множини - впорядкований набір (a_1, a_2, ..., a_n) називають точкою A_n, а числа a_1, a_2, ..., a_n - її координатами. Точка O(0, 0, ..., 0) називається початком координат в A_n . Кожній парі точок A(a_1, a_2, ..., a_n) і B(b_1, b_2, ..., b_n) поставимо у відповідність вектор $\vec{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,\dots,b_n-a_n)$. Числа $b_1-a_1,b_2-a_2,\dots,b_n-a_n$ назвемо координатами вектора $\vec{AB}$. При цьому два вектори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати. Вектор $\vec{OM}$ називається радіус-вектором точки M. Його координати збігаються з координатами точки M. Таким чином, вектори теж є впорядкованими наборами n чисел-матрицями-рядками довжини n.

Введемо лінійні операції над векторами за правилами: якщо дано вектори $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, то $\vec{x}+\vec{y}$ має координати $(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$, $\lambda\vec{x}$ має координати $(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$.

Можна показати, що множина векторів числового простору A_n з лінійними операціями, введеними вище, є лінійним простором, який позначається через L_n. В просторі L_n роль нульового вектора відіграє вектор $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$, а протилежним вектору $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ є вектор $\vec{x}'=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$.

Зауваження 2.5. Якщо точками дійсного числового простору є матриці-стовпці $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ висоти n, то, міркуючи аналогічно, прийдемо до лінійного простору L^n, в якому лінійні операції збігаються з операціями над матрицями-стовпцями висоти n - векторами L^n.

Зауваження 2.6. Надалі через L_n (L^n) будемо позначати і лінійний простір матриць-рядків (матриць-стовпців) довжини n (висоти n) з дійсними елементами і з лінійними операціями над ними, що співпадають з лінійними операціями над матрицями.

Приклад 2. Множина $C[a,b]$ усіх функцій $x=x(t)$, означених і неперервних на відрізку $a \le t \le b$, з звичайними операціями додавання двох функцій і множення функції на дійсне число, утворює лінійний простір.

Дійсно, можна переконатись в справедливості аксіом 1-8 для множини $C[a,b]$. Це дозволяє зробити висновок, що множина $C[a,b]$ є лінійним простором.

Властивості лінійного простору

Теорема 2.10. В довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент і для кожного елемента $\vec{x}$ існує єдиний протилежний елемент.

Теорема 2.11. В довільному лінійному просторі:

1) добуток довільного елемента $\vec{x}$ на дійсне число 0 дорівнює нульовому елементу $\vec{0}$,

2) для кожного елемента $\vec{x}$ протилежний елемент дорівнює добутку цього елемента $\vec{x}$ на дійсне число -1.

Задача з розв'язком

Задача. Нехай L_2 - множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел $\vec{x}=(x_1,x_2)$ з операціями:

1) Якщо $\vec{x}=(x_1,x_2)$ і $\vec{y}=(y_1,y_2)$, то $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$;

2) Для будь якого дійсного λ покладемо $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2)$. Переконатися, що L_2 є лінійним простором.

Розв'язок. Перевіримо виконання аксіом 1-8.

1. $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\vec{y}+\vec{x}=(y_1+x_1,y_2+x_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, тобто $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.

2. $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\vec{y}+\vec{z}=(y_1+z_1,y_2+z_2)$,
$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$, $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$.
Таким чином, $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.

3. Нульовим вектором є $\vec{0}=(0,0)$. Дійсно, $\vec{x}+\vec{0}=(x_1+0,x_2+0)=(x_1,x_2)=\vec{x}$.

4. Вектор $(-x_1,-x_2)$ є протилежним вектору (x_1,x_2), так як $(x_1,x_2)+(-x_1,-x_2)$=(0,0).

5. $1\cdot\vec{x}=(1\cdot x_1,1\cdot x_2)=\vec{x}$.

6. $\lambda(\mu\vec{x})=\lambda(\mu x_1,\mu x_2)=(\lambda\mu x_1,\lambda\mu x_2)=(\lambda\mu)\vec{x}$.

7. $(\lambda+\mu)\vec{x}=((\lambda+\mu)x_1,(\lambda+\mu)x_2)=(\lambda x_1+\mu x_1,\lambda x_2+\mu x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)+(\mu x_1,\mu x_2)=$
$=\lambda(x_1,x_2)+\mu(x_1,x_2)=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$.

8. $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda(x_1+y_1,x_2+y_2)=(\lambda(x_1+y_1),\lambda(x_2+y_2))=(\lambda x_1,\lambda x_2)+(\lambda y_1,\lambda y_2)=$
$=\lambda(x_1,x_2)+\lambda(y_1,y_2)=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$.

Отже, множина L_2 є лінійним простором.

Задачі для розв'язування

197. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини:

1. Множина матриць-рядків довжини *n*, з операціями додавання і множення на число для матриць.
2. Множина квадратичних матриць *n*-го порядку з дійсними елементами, якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.
3. Множина всіх многочленів степеня $\le n$ з звичайними діями додавання многочленів і множення многочлена на число.
4. Множина всіх многочленів степеня рівного n з звичайними діями додавання многочленів і множення многочлена на число.
5. Множина V_0, яка складається з одного елемента θ. Операції в V_0 означені таким чином: $\theta + \theta = \theta,\ \lambda\theta = \theta$.
6. Множина R^+ додатних дійсних чисел, в якій операції додавання і множення на дійсне число означені так:

   а) сума двох елементів $\vec{x} = x$ і $\vec{y} = y$ цієї множини дорівнює добутку цих дійсних чисел xy;

   б) добуток елемента $\vec{x}$ на дійсне число λ визначимо як піднесення дійсного додатного числа x до степеня λ.

198. Визначити, чи є такі множини векторів на звичайній площині лінійними просторами відносно звичайних операцій додавання векторів і множення вектора на число (припускається, що початок кожного вектора знаходиться в початку координат).

1) Всі вектори, кінці яких лежать на даній прямій.
2) Всі вектори, кінці яких лежать:
   а) в першій чверті системи координат;
   б) в першій або в третій;
   в) в першій або в другій.
3) Всі вектори, координати яких задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 = 0$.
4) Всі вектори, координати яких задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 = 1$.

199. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини :

1) Множина $C[a,b]$ всіх функцій $f(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ з природно введеними операціями додавання функцій і множення їх на число.
2) Множина всіх збіжних послідовностей, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.
3) Множина всіх розбіжних послідовностей відносно звичайних

операцій додавання і множення на число.

4) Множина всіх функцій інтегрованих на відрізку $[a,b]$, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

5) Множина тригонометричних многочленів порядку $\le n$, тобто множина функцій, що мають вигляд:

$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$ відносно звичайних операцій додавання і множення на число;

6) Множина функцій виду

$f(t) = e^{\alpha t}(a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt)$,

де α - фіксоване дійсне число, з природно введеними операціями додавання функцій і множення їх на число.

200. Чи може лінійний простір складатись:

1) з одного вектора; 2) з двох різних векторів?

201. З лінійного простору виключено вектор $\vec{x}$. Чи може одержана після цього виключення множина векторів залишатись лінійним простором?

202. З лінійного простору виключено нескінченну множину векторів. Чи може одержана після цього виключення множина векторів залишатись лінійним простором?

2.2.2. Розмірність лінійного простору. Базис, координати вектора. Ізоморфізм лінійних просторів

Означення 2.8. Вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ лінійного простору називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, з яких хоч би одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація векторів $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто $\lambda_1\vec{p}_1 + \lambda_2\vec{p}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{p}_n = \vec{0}$.

Означення 2.9. Вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність $\lambda_1\vec{p}_1 + \lambda_2\vec{p}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{p}_n = \vec{0}$ можлива лише у випадку, коли усі $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Означення 2.10. Лінійний простір L називається n-вимірним, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які n+1 векторів є лінійно залежними.

Число n називається розмірністю простору. Це записується так: $d(L) = n$.

Означення 2.11. Лінійний простір L називається нескінченно вимірним, якщо в ньому існує довільне число лінійно незалежних векторів.

Означення 2.12. Сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ простору L називається базисом цього простору, якщо для кожного вектора $\vec{x}$ простору L можна знайти такі дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що справедлива рівність

$$\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \ldots + x_n\vec{p}_n \tag{2.2}$$

Рівність (2.2) називається розкладом вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються координатами вектора $\vec{x}$ (відносно базису $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$).

Теорема 2.12. Якщо L - лінійний простір розмірності n, то будь-які n лінійно незалежних векторів цього простору утворюють його базис.

Теорема 2.13. Якщо лінійний простір L має базис, що складається з n векторів, то розмірність L дорівнює n.

Приклад 1. Розглянемо простір L^n. Покажемо, що n векторів цього простору

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

утворюють базис цього простору.

Для цього покажемо, що вектори (2.3) лінійно незалежні і довільний вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ простору L^n є лінійною комбінацією векторів (2.3).

Розглянемо лінійну комбінацію векторів в (2.3) з числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ є нульовим лише при умові $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, а це і означає лінійну незалежність векторів (2.3).

Покажемо тепер, що довільний вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ простору L^n є лінійною комбінацією векторів в (2.3).

Дійсно, справедлива рівність

$$\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, в просторі L^n сукупність векторів (2.3) утворює базис цього простору. Розмірність цього простору згідно з теоремою 2.13 дорівнює n. Аналогічно можна показати, що розмірність простору L_n дорівнює n.

Приклад 2. Лінійний простір $C[a,b]$ усіх функцій $x = x(t)$ визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$ є нескінченно вимірним.

Дійсно, для будь-якого невід'ємного цілого числа n вектори цього простору $1,\ t,\ t^2,\ ...,\ t^n$ лінійно незалежні, так як в протилежному випадку деякий многочлен $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^n$, коефіцієнти якого $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ не всі рівні нулю, виявився б тотожно рівним нулю на відрізку $[a,b]$.

Теорема 2.14. При додаванні двох будь-яких векторів лінійного простору L їх координати (відносно довільного базису простору L) додаються, при множенні довільного вектора на будь-яке число λ всі координати цього вектора множаться на λ.

Означення 2.13. Два довільних дійсних лінійних простори L і L' називаються ізоморфними, якщо між векторами цих просторів можна встановити взаємно однозначну відповідність так, що якщо векторам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ простору L відповідають вектори $\vec{x}'$ і $\vec{y}'$ простору L', то вектору $\vec{x} + \vec{y}$

відповідає вектор $\vec{x}' + \vec{y}'$, а вектору $\lambda\vec{x}$ відповідає вектор $\lambda\vec{x}'$, $\lambda \in \Re$.

Теорема 2.15. Будь-які два *n* вимірних дійсних лінійних простори L і L' ізоморфні.

Наслідок. Лінійні простори L_n і L^n ізоморфні.

Зауваження 2.7. Надалі усі означення і твердження, що мають місце в L_n (L^n), з точністю до ізоморфізму справедливі і в довільному *n*-вимірному лінійному просторі *L*.

Задача з розв'язком

Задача. Нехай L_2 - лінійний простір векторів $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Довести, що вектори $\vec{p}_1 = (1,2)$ і $\vec{p}_2 = (3,4)$ утворюють базис даного лінійного простору L_2. Знайти координати вектора $\vec{x} = (7,10)$ в цьому базисі.

Розв'язок. Покажемо, що вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ лінійно незалежні. Дійсно, рівність

$$\alpha\vec{p}_1 + \beta\vec{p}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(1,2) + \beta(3,4) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0, \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Розглянемо який-небудь вектор $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Покажемо, що для будь яких y_1, y_2 можна визначити числа λ і μ так, щоб виконувалась рівність $\vec{y} = \lambda\vec{p}_1 + \mu\vec{p}_2$ або $(y_1, y_2) = (\lambda + 3\mu, 2\lambda + 4\mu)$. Існує єдина пара значень (λ, μ), для яких виконується ця рівність. Це випливає з того, що система рівнянь

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = y_1, \\ 2\lambda + 4\mu = y_2 \end{cases}$$

має $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ і тому має єдиний розв'язок при будь-яких y_1 і y_2. Таким чином, вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ утворюють базис.

Визначимо координати вектора $\vec{x} = (7,10)$ в цьому базисі. Задача зводиться до визначення λ і μ із системи рівнянь

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $\lambda = 1$, $\mu = 2$, тобто

$$\vec{x} = \vec{p}_1 + 2\vec{p}_2.$$

Задачі для розв'язування

203. Нехай P_2 - лінійний простір многочленів степеня не вище другого. Довести, що вектори $\vec{p}_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $\vec{p}_2 = 2 + 3t + 4t^2$ і $\vec{p}_3 = 3 + 5t + 7t^2$ лінійно залежні.
204. Показати, що якщо серед векторів $\vec{x}, \vec{y}, ..., \vec{z}$ є нуль-вектор, то розглядувані вектори лінійно залежні.
205. Показати, що розмірність простору P_n всіх многочленів степеня $\le n$ однієї змінної дорівнює n+1.
206. Знайти розмірність і базис таких лінійних просторів:
   1) множина парних многочленів степеня $\le n$;
   2) множина тригонометричних многочленів порядку не вище n виду
   $$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt:$$
   3) множина парних тригонометричних многочленів порядку не вище n;
   4) множина непарних тригонометричних многочленів порядку не вище n.
207. Показати, що квадратні матриці порядку n, у яких який-небудь елемент дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, утворюють базис простору квадратних матриць порядку n. Знайти розмірність цього простору.
208. Довести, що многочлени $1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, ..., (t-\alpha)^n$ утворюють базис в просторі многочленів степеня $\le n$ і знайти координати довільного многочлена $P_n(t)$ степеня $\le n$ в цьому базисі.
209. Довести, що многочлени $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ утворюють базис в просторі непарних многочленів степеня $\le$ 5, знайти координати многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в цьому базисі.
210. Знайти координати многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в кожному із базисів:
   1) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5;$
   2) $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1;$
   3) $1+t^3, t+t^3, t^2+t^3, t^3, t^4+t^3, t^5+t^3.$
211. Знайти координати полінома $P(t) = 5 - 2(t+1) + 3(t+1)^2 + (t+1)^3$ в базисі $1, t, t^2, t^3$.
212. Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис L_3 і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.
   1) $\vec{e}_1 = (1,1,1)$, $\vec{e}_2 = (1,2,1)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, $\vec{x} = (1,0,4)$;
   2) $\vec{e}_1 = (1,0,1)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (2,3,4)$, $\vec{x} = (1,-3,-3)$;
   3) $\vec{e}_1 = (3,1,-3)$, $\vec{e}_2 = (-5,2,1)$, $\vec{e}_3 = (7,3,4)$, $\vec{x} = (11,10,-1)$;
   4) $\vec{e}_1 = (1,2,1)$, $\vec{e}_2 = (2,3,3)$, $\vec{e}_3 = (3,1,7)$, $\vec{x} = (3,3,5)$.

213. Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі:

1) $\vec{e}_1 = (1,1,1,1),\ \ \vec{e}_2 = (1,1,-1,-1),\ \ \vec{e}_3 = (1,-1,1,-1),\ \ \vec{e}_4 = (1,-1,-1,1),\ \ \vec{x} = (1,2,1,1);$

2) $\vec{e}_1 = (1,1,0,1),\ \ \vec{e}_2 = (2,1,3,1),\ \ \vec{e}_3 = (1,1,0,0),\ \ \vec{e}_4 = (0,1,-1,-1),\ \ \vec{x} = (0,0,0,1).$

214. Довести, що вектори

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ \ \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

простору квадратних матриць другого порядку утворюють базис. Знайти координати векторів

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ і } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -1 & -29 \end{pmatrix}$$

в цьому базисі.

215. Нехай L і L' - ізоморфні лінійні простори. Між елементами цих просторів встановлено взаємно однозначну відповідність $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$, $\vec{y} \leftrightarrow \vec{y}'$, $\vec{z} \leftrightarrow \vec{z}'$. Довести, що $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} \leftrightarrow \alpha\vec{x}' + \beta\vec{y}' + \gamma\vec{z}'$ при будь-яких α, β, γ.

216. Нехай L і L' - ізоморфні лінійні простори, причому $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$. Довести, що $(-\vec{x}) \leftrightarrow (-\vec{x}')$.

217. Чи будуть ізоморфними лінійні простори L і L', якщо елементами L є вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots,$ а елементами L' - вектори $2\vec{x}, 2\vec{y}, 2\vec{z}, \ldots?$ Показати, що простори L і L' складаються з одних і тих же елементів.

218. Дано довільні пари дійсних чисел (α, β). Побудовано два лінійних простори: простір L_2 і простір L', складений з векторів $\vec{x}' = \left(e^{-\alpha}, e^{-\beta}\right)$, в якому існуючі дії визначені рівностями

$$\vec{x}_1' + \vec{x}_2' = \left(e^{-\alpha_1-\alpha_2}, e^{-\beta_1-\beta_2}\right), \lambda\vec{x}' = \left(e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\beta}\right).$$

Довести, що простори ізоморфні.

2.2.3. Перетворення координат вектора при переході до нового базису

Нехай $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ і $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$ - два довільних базиси n- вимірного лінійного простору L^n і нехай $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$ виражаються через $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ за допомогою формул

$$\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n1}\vec{e}_n = \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n2}\vec{e}_n = \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n2} \end{pmatrix},$$

. . . .

$$\vec{e}_n' = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + c_{nn}\vec{e}_n = \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця, складена з коефіцієнтів цих формул

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$. За допомогою матриці C перехід від базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$ запишеться у вигляді

$$(\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n')=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)C.$$

Нехай в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ вектор $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + \vec{x}_n\vec{e}_n$, а в базисі $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$ $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \ldots + \vec{x}_n'\vec{e}_n'$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix},$$

або

$$X = CX', \text{ де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Дано вектор $\vec{x} = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \in L^3$. Розкласти цей вектор за новим базисом, зв'язаним з старим базисом за допомогою рівностей

$$\vec{e}_1' = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Розв'язок. Так як

$$\vec{e}_1' = (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2' = (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_3' = (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то матриця переходу від старого базису до нового буде мати вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\vec{x}$ в новому базисі виражаються формулою

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши це матричне рівняння, одержимо $x_1' = 1$, $x_2' = 0$, $x_3' = 2$. Розклад вектора $\vec{x}$ в новому базисі має вигляд $\vec{x} = \vec{e}_1' + 2\vec{e}_3'$.

Задача 2. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ простору L^2 многочлен має вигляд

$$x^2 + 2y^2 - xy + x + 3y + 5.$$

Записати цей многочлен в новому базисі, зв'язаному з старим базисом за допомогою рівностей

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Розв'язок. Так як $\vec{e}_1' = (\vec{e}_1 \vec{e}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = (\vec{e}_1 \vec{e}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то матриця переходу від старого базису до нового матиме вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + y' \\ -2x' + y' \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$x = x' + y'$$
$$y = -2x' + y'.$$

Підставимо значення x і y в многочлен, одержимо многочлен в новому базисі

$$(x' + y')^2 + 2(-2x' + y')^2 - (x' + y')(-2x' + y') + x' + y' + 3(-2x' + y') + 5 =$$
$$11x'^2 + 2y'^2 - 5x'y' - 5x' + 4y' + 5.$$

Задача 3. В просторі многочленів степеня ≤ 3 написати матрицю переходу від базису $1, x, x^2, x^3$ до базису $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$.

Розв'язок. Вектори нового базису $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$ розкладемо за векторами старого базису.

Одержимо

$$1 = 1\cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = \left(1\ x\ x^2\ x^3\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$x+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0x^2 + 0x^3 = \left(1\ x\ x^2\ x^3\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 1\cdot 1 + 2\cdot x + 1\cdot x^2 + 0x^3 = \left(1\ x\ x^2\ x^3\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 1\cdot 1 + 3\cdot x + 3\cdot x^2 + 1\cdot x^3 = \left(1\ x\ x^2\ x^3\right)\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Тоді матриця переходу матиме вигляд

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

219. Дано вектор $\vec{x}$. Розкласти цей вектор за новим базисом, зв'язаним з старим базисом виразами

1) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$
$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
$\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$

2) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$
$\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$
$\vec{e}_3' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$

3) $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$
$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$
$\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$
$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$

4) $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$
$\vec{e}_1' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$
$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$
$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4$
$\vec{e}_4' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$

220. Дано вектор $\vec{x} = 2\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_n\right)$. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$, якщо $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, ..., $\vec{e}_n' = \vec{e}_n + \vec{e}_1$.

221. Новий базис зв’язаний з старими виразами $\vec{e}_1' = \alpha\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \beta\,\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \gamma\;\vec{e}_4$, $\vec{e}_4' = \delta\;\vec{e}_5$, $\vec{e}_5' = \varepsilon\;\vec{e}_1$. Записати формули, що зв’язують старі координати $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ вектора $\vec{x}$ з новими координатами $(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5')$ цього ж вектора.

222. Довести, що кожна із двох систем векторів є базисом і знайти зв’язок координат одного і того ж вектора в цих двох базисах:

1) $\vec{e}_1 = (1,\ \ 2,\ \ 1)$, $\vec{e}_2 = (2,\ \ 3,\ \ 3)$, $\vec{e}_3 = (3,\ \ 1,\ \ 1)$,

$\vec{e}_1' = (3,\ \ 1,\ \ 4)$, $\vec{e}_2' = (5,\ \ 2,\ \ 1)$, $\vec{e}_3' = (1,\ \ 1,\ \ 6)$.

2) $\vec{e}_1 = (1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)$, $\vec{e}_1' = (1,\ \ 0,\ \ 3,\ \ 3)$,

$\vec{e}_2 = (1,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 1)$, $\vec{e}_2' = (-2,\ \ -3,\ \ -5,\ \ -4)$,

$\vec{e}_3 = (1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 1)$, $\vec{e}_3' = (2,\ \ 2,\ \ 5,\ \ 4)$,

$\vec{e}_4 = (1,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 3)$, $\vec{e}_4' = (-2,\ \ -3,\ \ -4,\ \ -4)$.

223. Довести, що кожна з двох систем функцій $t - t^2$, t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ і $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ є базисом в просторі многочленів степеня ≤ 3. Знайти координати многочлена степеня ≤ 3 в першому базисі, якщо відомі його координати h_1', h_2', h_3', h_4' в другому базисі.

224. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ і навпаки, якщо

1) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\vec{e}_4' = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

225. Скласти формули перетворення координат при переході від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_4'$.

1) $\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\vec{e}_1' = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$,
$\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e}_2' = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$,
$\vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e}_3' = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$\vec{e}_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\vec{e}_4' = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$;

2) $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ -1,\ 0)$, $\vec{e}_1' = (2,\ 1,\ 0,\ 1)$,
$\vec{e}_2 = (1,\ -1,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_2' = (0,\ 1,\ 2,\ 2)$,
$\vec{e}_3 = (-1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_3' = (-2,\ 1,\ 1,\ 2)$,
$\vec{e}_4 = (-1,\ -1,\ 0,\ 1)$, $\vec{e}_4' = (1,\ 3,\ 1,\ 2)$.

226. У просторі многочленів степеня ≤ 2 написати матриці переходу від базису $1, x, x^2$ до базису $x^2 - x,\ 3x^2 + 2x + 2,\ 2x^2 + 5x + 4$.

227. У просторі многочленів степеня $\le n$ написати матриці переходу від базису $1, (x-2), (x-2)^2, \ldots, (x-2)^n$ до базису $1, (x-3), (x-3)^2, \ldots, (x-3)^n$ і навпаки.

2.2.4. Підпростір лінійного простору

Припустимо, що деяка підмножина L' лінійного простору L задовольняє таким двом вимогам:

1. Якщо елементи $\vec{x}$ і $\vec{y}$ належать підмножині L', то і сума $\vec{x} + \vec{y}$ належить цій підмножині L'.

2. Якщо елемент $\vec{x}$ належить підмножині L', а λ - будь-яке дійсне число, то і елемент $\lambda\vec{x}$ належить підмножині L'.

Означення 2.14. Підмножина L' лінійного простору L, що задовольняє вимогам 1 і 2, називається лінійним підпростором (або просто підпростором) простору L.

Приклади лінійних підпросторів:

1. Підмножина лінійного простору L, яка складається з одного нульового елемента.

2. Весь простір L.

3. Підмножина B_2 усіх векторів, паралельних деякій площині, в звичайному просторі.

4. Нехай $\vec{x}, \vec{y}, \ldots, \vec{z}$ - сукупність елементів деякого простору L. Сукупність усіх лінійних комбінацій цих елементів, тобто множина елементів, що має вигляд $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \ldots + \gamma\vec{z}$, де $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ - довільні дійсні числа, називається лінійною оболонкою елементів $\vec{x}, \vec{y}, \ldots, \vec{z}$. Для лінійної оболонки довільних елементів $\vec{x}, \vec{y}, \ldots, \vec{z}$ лінійного простору L виконуються

вимоги 1 та 2. Тому усяка лінійна оболонка є підпростором лінійного простору L.

Нехай L' і L'' - два довільних підпростори лінійного простору L.

Означення 2.15. Множина усіх елементів $\vec{x}$ простору L, які належать одночасно L' і L'', називається перерізом підпросторів L' і L''.

Запис $L''' = L' \bigcap L''$ означає , що L''' є перерізом підпросторів L' і L''.

Означення 2.16. Множина усіх елементів простору L, що мають вигляд $\vec{y} + \vec{z}$, де $\vec{y} \in L'$, $\vec{z} \in L''$, називається сумою підпросторів L' і L''.

Запис $L^{\mathrm{IV}} = L' + L''$ означає, що L^{IV} є сумою підпросторів L' і L''.

Теорема 2.16. Переріз L''' і сума L^{IV} є підпросторами простору L.

Приклад. Нехай B_3 - лінійний простір усіх векторів звичайного простору. L' - підпростір усіх векторів, паралельних площині xOy, L'' - підпростір усіх векторів, паралельних площині xOz. Тоді сумою підпросторів L' і L'' буде весь простір B_3, а перерізом підпросторів L' і L'' буде множина усіх векторів, паралельних осі Ox.

Теорема 2.17. Якщо L' - підпростір лінійного простору L, то $d(L') \le d(L)$.

Теорема 2.18. Сума розмірностей довільних підпросторів L' і L'' скінченновимірного лінійного простору L дорівнює сумі розмірності перерізу цих підпросторів і розмірності суми цих підпросторів.

Теорема 2.19. Розмірність лінійної оболонки сукупності $\vec{x}, \vec{y}, \ldots, \vec{z}$ елементів лінійного простору L дорівнює максимальному числу лінійно незалежних елементів цієї сукупності.

Означення 2.17. Простір L називається прямою сумою підпросторів L' і L'', якщо кожний вектор $\vec{x}$ простору L можна представити єдиним способом у вигляді $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, де, $\vec{x}_1 \in L'$, $\vec{x}_2 \in L''$.

Теорема 2.20. Для того, щоб простір L був прямою сумою підпросторів L' і L'', достатньо виконання умов

$$L' \bigcap L'' = \vec{0}, \quad d(L) = d(L') + d(L'').$$

Задача з розв'язком

Задача. Дано лінійний простір L^n. Перевірити, чи є лінійним підпростором цього лінійного простору множина матриць

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

координати яких задовольняють рівності

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

Розв’язок. Сукупність матриць, координати яких задовольняють рівності $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$, утворюють підмножину простору L^n. Позначимо цю підмножину через L'. Покажемо, що для цієї підмножини L' виконуються вимоги 1-2 підпростору.

Нехай

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $\vec{x} \in L'$, $\vec{y} \in L'$, то $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ і $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$. Звідки випливає, що $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_n + y_n) = 0$ і $\lambda x_1 + \lambda x_2 + ... + \lambda x_n = 0$. Із цих рівностей випливає, що $\vec{x} + \vec{y} \in L'$ і $\lambda\vec{x} \in L'$. Таким чином, для L' виконуються вимоги 1-2 для підпростору 1, значить, L' є підпростором L^n.

Задачі для розв’язування

228. Дано лінійний підпростір L_4. Довести, що множина елементів L': $\vec{x}_1 = (0,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, $\vec{y}_1 = (0,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$, $\vec{z}_1 = (0,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ і множина елементів L'': $\vec{x}_2 = (x_1,\ 0,\ x_3,\ x_4)$, $\vec{y}_2 = (y_1,\ 0,\ y_3,\ y_4)$, $\vec{z}_2 = (z_1,\ 0,\ z_3,\ z_4)$ є підпросторами лінійного простору L_4.
229. Для лінійного простору L_4, розглянутого в попередній задачі, знайти переріз L''' і суму L^{IV} підпросторів L' і L''.
230. Дано лінійний простір P_5 многочленів не вище п’ятого степеня. Довести, що множина L' многочленів, що мають вигляд $a_0 t + a_1$ і множина L'' многочленів $b_0 t^4 + b_1 t^2 + b_2$ є підпросторами простору P_5, якщо додавання елементів і множення елемента на число розуміти в звичайному розумінні.
231. Знайти підпростори $L''' = L' \cap L''$ і $L^{\mathrm{IV}} = L' + L''$ з умови попередньої задачі.

232. Дано лінійний простір всіх геометричних векторів звичайної площини, чи буде лінійним підпростором множина таких векторів:
1) усі вектори, кінці яких лежать в першій чверті системи координат, а початки збігаються з початком координат;
2) усі вектори, що лежать на даній прямій.

233. Перерахувати усі лінійні підпростори звичайного простору.

234. Довести, що такі множини елементів утворюють підпростори, знайти їх базис і розмірність:
1) множина елементів простору L_n, перша і остання координати яких рівні між собою ($n \geq 2$);
2) множина елементів простору L_n, в яких координати з парними номерами дорівнюють нулю ($n \geq 2$);
3) множина усіх векторів звичайного простору компланарних заданій площині;
4) множина усіх матриць A порядку n, що задовольняють такій умові $A^{\mathrm{T}}=A$ (симетричні матриці);
5) множина усіх функцій $f(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ і таких, що задовольняють умові $f(t_0)=0$ для $t_0 \in [a,b]$.

235. Знайти розмірності суми і перерізу лінійних підпросторів L_4: L', натягнутого на вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ і L'', натягнутого на вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_l$:

1) $\vec{a}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 3,\ 0,\ 1)$.

2) $\vec{a}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\vec{a}_2 = (1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $\vec{a}_3 = (1,\ 3,\ 1,\ 3)$, $\vec{b}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 2)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 2)$, $\vec{b}_3 = (3,\ 1,\ 3,\ 1)$.

236. Знайти розмірність і базис суми і перерізу лінійних підпросторів простору многочленів степеня ≤ 3, натягнутих на системи многочленів $1+2t+t^3$, $1+t+t^2$, $t-t^2+t^3$ і $1+t^2$, $1+3t+t^3$, $3t-t^2+t^3$.

237. Описати лінійні оболонки таких систем векторів простору L^5:

$$1)\ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\quad 2)\ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

238. Знайти лінійні оболонки таких систем многочленів
1) $1, t, t^2$. 2) $1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2$.

239. Знайти розмірність і базис лінійної оболонки заданої системи векторів:

1) $\vec{x}_1 = (1, \quad 0, \quad 0, \quad -1)$,
$\vec{x}_2 = (2, \quad 1, \quad 1, \quad 0)$,
$\vec{x}_3 = (1, \quad 1, \quad 1, \quad 1)$,
$\vec{x}_4 = (1, \quad 2, \quad 3, \quad 4,)$,
$\vec{x}_5 = (0, \quad 1, \quad 2, \quad 3)$;

2) $\vec{x}_1 = (1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0)$,
$\vec{x}_2 = (1, \quad 1, \quad -1, \quad -1, \quad -1)$,
$\vec{x}_3 = (2, \quad 2, \quad 0, \quad 0, \quad -1)$,
$\vec{x}_4 = (1, \quad 1, \quad 5, \quad 5, \quad 2)$,
$\vec{x}_5 = (1, \quad -1, \quad -1, \quad 0, \quad 0)$.

240. Показати, що звичайний простір є прямою сумою підпросторів L' і L'', де

1) L' - площина, що задана рівнянням $x_3 = 0$, L'' - пряма, задана рівняннями $x_1 = x_2 = 0$;

2) L' - площина, яка задана рівнянням $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, L'' - пряма, яка задана рівняннями $x_1 = x_2 = x_3$;

3) L' - площина, яка задана рівнянням $x_1 + x_2 = 0$, L'' - пряма, задана рівняннями $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$