3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Ранг матриці

Означення 3.1. Мінором *r*-го порядку матриці A розмірів $m \times n$ називається визначник *r*-го порядку, утворений з елементів матриці A, що залишились після викреслення в ній *m-r* рядків і *n-r* стовпців ($r \le m$, $r \le n$).

Означення 3.2. Натуральне число r називається рангом матриці A, якщо воно задовольняє вимогам:

1) матриця A має мінор *r*-го порядку, відмінний від нуля;
2) усякий мінор (r+1)-го і більш високого порядку (якщо такі існують) дорівнює нулю.

Ранг матриці A, всі елементи якої - нулі, за означенням дорівнює нулю.

Означення 3.3. Мінор *r*-го порядку матриці рангу r, не рівний нулю, називається базисним мінором матриці A (матриця може мати кілька базисних мінорів).

Рядки і стовпці, на перетині яких стоїть базисний мінор, називаються відповідно базисними рядками і базисними стовпцями.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі операції:

1. Перестановка (транспозиція) двох рядків або стовпців.
2. Додавання до всіх елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Матриці, одержані одна із іншої за допомогою скінченого числа елементарних перетворень, називаються еквівалентними.

Теорема 3.1. Ранги еквівалентних матриць рівні.

Означення 3.4. Матриця розмірів $m \times n$, рангу $r \ge 1$ називається трапецевидною, якщо існує таке натуральне число l ($l \le m, l \le n$), що

1) елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ll}$ не рівні нулю;

2) при $l < m$ елементи стовпців, що стоять під елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ll}, a_{ll+1}, \ldots, a_{ln}$ рівні нулю;

3) при l=m рівні нулю елементи стовпців, що стоять під елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{l-1l-1}$.

Трапецевидна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{ll} & \dots & a_{ln} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Твердження 3.1. Ранг трапецевидної матриці дорівнює l.

Твердження 3.2. Для усякої ненульової матриці A існує еквівалентна їй трапецевидна матриця $A_{\text{тр}}$, яка може бути одержана з допомогою елементарних перетворень матриці A.

Пояснимо хід одержання трапецевидної матриці $A_{\text{тр}}$, еквівалентної даній матриці A.

Перший крок. Якщо перший рядок матриці A складається з нулів, то ми переставляємо його на останнє місце. Отже, можна вважати, що матриця, еквівалентна A, в першому рядку має елемент, відмінний від нуля. Тоді, переставляючи стовпці, можемо перейти до еквівалентної матриці, у якої цей елемент стоїть на перетині першого рядка і першого стовпця. Потім, додаючи до кожного рядка перший рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, переходимо до матриці, в якій усі елементи першого стовпця, за винятком першого елемента a_{11}, дорівнюють нулю. Якщо $m \geq 2$ і матриця, складена із елементів другого і наступного рядків не нульова, то виконуємо другий крок.

Другий крок. Якщо виявляється, що другий рядок складається з нулів, то ми переставляємо його на останнє місце. Тому можна вважати, що серед елементів другого рядка є елемент, відмінний від нуля. Можемо вважати, що цей елемент стоїть на перетині другого стовпця і другого рядка. Як і раніше перетворюємо в нулі усі елементи другого стовпця, що стоять під ним. Відзначимо, що операції другого кроку не зачіпають першого рядка і першого стовпця. Якщо $m \geq 3$ і матриця, складена з елементів третього і наступного рядків ненульова, то виконують третій крок.

Через скінченне число аналогічних кроків прийдемо до трапецевидної матриці.

Теорема 3.2. (теорема про базисний мінор). Базисні рядки (базисні стовпці) як елементи лінійних просторів L_n (L^m) лінійно незалежні. Будь-який рядок (будь-який стовпець) матриці A є лінійною комбінацією базисних рядків (базисних стовпців).

Теорема 3.3. Ранг матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців (рядків).

Розглянемо два методи обчислення рангу матриці.

Перший метод. Для даної матриці A знаходять еквівалентну їй трапецевидну матрицю $A_{\text{тр}}$. Тоді ранг матриці A дорівнює рангу матриці $A_{\text{тр}}$.

Другий метод. При обчисленні рангу матриці A переходять від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо уже знайдено мінор k-го порядку $|D|$, відмінний від нуля, то обчислюють лише ті мінори (k+1)-го порядку, які є окантованими відносно $|D|$. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Задача з розв'язком

Задача. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Перший метод. Виконуємо такі елементарні перетворення матриці A. Переставимо місцями перший і третій стовпці матриці A. Одержимо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до елементів другого рядка елементи першого, а до третього елементи першого, помножені на число (-5), дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Додаючи до третього рядка елементи другого, помножені на 3, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержали трапецевидну матрицю, для якої l=2. Отже, $r(A)$=2.

Другий метод. Мінор другого порядку, що стоїть в лівому верхньому кутку, відмінний від нуля

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Мінори третього порядку, окантовані відносно $|D|$, дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $r(A)=2$.

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 241-250 знайти ранги матриць**:**

241. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. 242. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$. 243. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

244. $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 8 \end{pmatrix}$. 245. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 246. $\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$.

247. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. 248. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

249. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. 250. $\begin{pmatrix} 9 & \lambda+2 & \lambda+2 & 9 & -5 \\ 5 & \lambda+4 & \lambda+1 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & \lambda+1 & \lambda & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 251-256 визначити ранги матриць і знайти їх базисні мінори:

251. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 252. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 253. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

254. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. 255. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 256. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 3 & 13 & 18 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 257, 258 показати, що дані системи векторів лінійно залежні:

257. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$ 258. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

В задачах №№ 259, 260 показати, що дані системи векторів лінійно незалежні:

259. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

260. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

В задачах №№ 261, 262 дослідити лінійну залежність системи векторів (тобто указати лінійно незалежну підсистему і подати через вектори підсистеми решту векторів даної системи):

261. $\vec{a}_1 = (0, \ 2, \ 1, \ -3), \quad \vec{a}_2 = (3, \ 1, \ -2, \ 1), \quad \vec{a}_3 = (3, \ -1, \ 3, \ 4).$

262. $\vec{a}_1 = (2, \ -1, \ 0, \ 3, \ 4), \quad \vec{a}_2 = (1, \ 3, \ -1, \ 0, \ 5),$
$\vec{a}_3 = (3, \ 2, \ -1, \ 3, \ 9), \quad \vec{a}_4 = (0, \ 1, \ -1, \ 1, \ -1).$

В задачах №№ 263-265 знайти всі значення λ при яких вектор $\vec{x}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

263. $\vec{a}_1 = (2, \ 3, \ 5), \ \vec{a}_2 = (3, \ 7, \ 8), \ \vec{a}_3 = (1, \ -6, \ 1), \ \vec{x} = (7, \ -2, \ \lambda).$

264. $\vec{a}_1 = (3, \ 2, \ 5), \ \vec{a}_2 = (2, \ 4, \ 7), \ \vec{a}_3 = (5, \ 6, \ \lambda), \ \vec{x} = (1, \ 3, \ 5).$

265. $\vec{a}_1 = (3, \ 2, \ 6), \ \vec{a}_2 = (7, \ 3, \ 9), \ \vec{a}_3 = (5, \ 1, \ 3), \ \vec{x} = (\lambda, \ 2, \ 5).$

3.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі. Правило Крамера.

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

відносно n невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Означення 3.5. Розв'язком системи (3.1) називається впорядкований набір чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, підстановка яких замість невідомих перетворює всі рівняння системи в арифметичні тотожності. Розв'язок системи (3.1), записаний у вигляді матриці-стовпця $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, є елементом простору L^n.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоч би один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається несумісною.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається основною матрицею системи (3.1).

Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ називаються вільними членами рівнянь.

Матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається розширеною матрицею системи (3.1).

Теорема 3.4. (теорема Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система (3.1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її розширеної матриці був рівним рангу основної матриці, тобто

$$r(\tilde{\hat{A}})=r(A).$$

В окремому випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих і матриця A невироджена, тобто

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

де

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ 1 \le i \le n.$$

Правило розв'язування довільної системи лінійних рівнянь.

Нехай система (3.1) сумісна. Виберемо в A базисний мінор. Виділимо з системи (3.1) систему r рівнянь, серед коефіцієнтів яких містяться елементи базисного мінору. В лівих частинах рівнянь цієї системи залишимо такі r невідомих, коефіцієнти при яких є елементами базисного мінору. Ці невідомі назвемо базисними невідомими. Решта n-r=k невідомих системи (3.1) перенесемо в праву частину і назвемо їх вільними невідомими. У випадку r=n вільні невідомі відсутні. Розв'язуємо одержану систему відносно базисних невідомих (наприклад, за правилом Крамера). Тоді, якщо, наприклад, $x_1, x_2, \dots, x_r$ - базисні невідомі, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - вільні, то система (3.1) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 + c_{2r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n, \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_r = d_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n, \end{cases}$$

який і називається розв'язком системи (3.1).

Зауваження 3.1. У випадку $r<n$ може існувати декілька базисних мінорів матриці A. В зв'язку з цим існує кілька способів вибору r рівнянь, а також базисних невідомих.

Задачі з розв'язком

Задача 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо основну матрицю A системи і розширену матрицю $\tilde{A}$ системи. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначимо ранги цих матриць одним із методів, даних в попередньому пункті. Для даної системи $r(A)=3$, $r(\tilde{A})=4$.

Система несумісна.

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

Розв'язок. В цій системі $r(A)=3$ і $r(\tilde{A})=3$. Система сумісна. Так як

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то із перших трьох рівнянь за формулами Крамера знаходимо

$$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=1.$$

Задача 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$$

Розв'язок. В цій системі $r(A)=2$, $r(\tilde{A})=2$. Система сумісна. Так як

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то із перших двох рівнянь системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \ -3x_3 + x_4, \\ x_1 - \ x_2 = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

знаходимо

$$x_1 = \ \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4,$$
$$x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4.$$

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 266-277 розв'язати системи рівнянь:

266. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 \quad - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

267. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

268. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

269. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

270. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

271. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$

272. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

273. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

274. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

275. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

276. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

277. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$

3.3. Метод Гаусса

Означення 3.6. Під елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь розуміють такі операції:

1) зміна нумерації невідомих системи;
2) перестановка місцями рівнянь системи;
3) додавання до одного рівняння іншого рівняння, помноженого на довільне число.

Означення 3.7. Дві сумісні системи лінійних рівнянь називаються рівносильними, якщо всі розв'язки першої системи є також розв'язками другої і, навпаки, всі розв'язки другої системи є розв'язками першої. Якщо обидві системи не сумісні, вони теж називаються рівносильними.

Теорема 3.5. В результаті елементарних перетворень система рівнянь переходить у рівносильну систему рівнянь (з урахуванням зміни нумерації невідомих).

Нехай дано систему лінійних рівнянь (3.1).

Метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих за допомогою елементарних перетворень системи.

Розглянемо перше рівняння системи. Якщо в ньому усі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнюють нулю, то ми переставляємо це рівняння на останнє місце. Якщо усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків немає. Тому інтерес представляє випадок, коли в першому рівнянні хоч би один із коефіцієнтів при невідомих не дорівнює нулю. Нехай ним буде коефіцієнт при x_1 (цього завжди можна досягнути за рахунок зміни нумерації невідомих).

Перепишемо тепер початкову систему в такому вигляді. Перше рівняння залишимо без зміни. Наступні рівняння одержимо додаванням до них першого рівняння, помноженого на відповідний коефіцієнт так, щоб після додавання рівняння не містили x_1. Таким чином, нова система рівносильна початковій, містить невідоме x_1 тільки в першому рівнянні, з решти рівнянь невідоме x_1 виключене.

Розглянемо тепер друге рівняння нової системи. Якщо в ньому усі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнюють нулю, то переставляємо це рівняння на останнє місце. Якщо усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків немає. Тому інтерес представляє випадок, коли в другому рівнянні нової системи є хоч би один коефіцієнт при невідомих, відмінний від нуля. Можемо вважати, що це коефіцієнт при x_2. Перепишемо тепер нову систему в такому вигляді. Перші два рівняння залишимо попередніми. В інших рівняннях виключимо x_2, додаючи до них друге рівняння, помножене на відповідний коефіцієнт.

Продовжуючи аналогічні дії у випадку, коли система сумісна, одержимо систему, в якій матриця коефіцієнтів при невідомих буде трапецевидною, тобто система буде мати вигляд

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \quad \ldots \quad + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \quad \ldots \quad + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \quad . \quad . \quad . \\ \qquad \qquad c_{ll}x_l + c_{ll+1}x_{l+1} + \ldots + c_{ln}x_n = d_l. \end{cases}$$

Тоді, якщо $l=n$, то $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$. Підставимо x_n в передостаннє рівняння системи, знайдемо x_{n-1}. Потім аналогічно знайдемо невідомі $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$. В цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Якщо $l<n$, то з останнього рівняння виражаємо x_l через невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$. Підставляючи цей вираз в передостаннє рівняння, виражаємо x_{l-1} через невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$. Потім, аналогічно, виражаємо невідомі $x_{l-2}, x_{l-3}, \ldots, x_2, x_1$. В цьому випадку система має безліч розв'язків, причому базисними невідомими є невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_l$, вільними - невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$.

Метод Гаусса рівносильний відшуканню матриці, еквівалентної розширеній матриці системи, в якій та частина, що відповідає основній матриці системи, є трапецевидною. Причому при елементарних перетвореннях розширеної матриці не допускається перестановка останнього стовпця, що відповідає стовпцю з вільних членів. Якщо після деякого елементарного перетворення розширеної матриці в ній появиться рядок, що складається з нулів, за винятком останнього елемента, то система рівнянь несумісна.

Задачі з розв'язком

Задача 1. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв'язок. Виконуємо над даною системою такі елементарні перетворення.

Змінимо порядок рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на (-2) і додамо до другого рівняння, потім перше рівняння помножимо на (-7) і додамо до третього рівняння. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ 15x_2 - 16x_3 = 47. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на (-3) і додамо до третього рівняння. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ -x_3 = 2. \end{cases}$$

Отже, x_3=-2. Тоді

$$x_2=3+x_3=3-2=1,$$
$$x_1=-5+2x_2-2x_3=1.$$

Таким чином, x_1=1, x_2=1, x_3=-2, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Практично зручно записати розширену матрицю системи так, щоб її частина, що відповідає основній матриці системи була трапецевидною.

Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right).$$

Введемо ще й 5-й так званий контрольний стовпець, кожний елемент якого є сумою чотирьох елементів даного рядка. При лінійних перетвореннях елементів матриці такому ж перетворенню повинні підлягати елементи контрольного стовпця. Кожний елемент контрольного стовпця перетвореної матриці дорівнює сумі елементів відповідного рядка.

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 7 & 1 & -2 & 12 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & -2 & 12 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 15 & 15 \\ 0 & 15 & -16 & 47 & 46 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right). \quad (3.2)$$

З (3.2) видно, що $r(A)$=3, $r(\tilde{A})$=3. Система сумісна.

Так як ранг матриці A дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв’язок, який знайдемо, записавши перетворену систему за одержаною матрицю (3.2). Одержимо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \quad 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ \qquad -x_3 = 2. \end{cases}$$

Звідки

x_3=-2,
x_2=3+x_3=1,
x_1=-5+2x_2-2x_3=1,

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -7, \\ -7x_1 + x_2 - 14x_3 = 37. \end{cases}$$

Розв'язок. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & -7 \\ -7 & 1 & -14 & 37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & -5 & 7 & -31 \\ 0 & 15 & -21 & 93 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідки $r(A)=r(\tilde{A})=3$. Отже, система сумісна.

З даних чотирьох рівнянь перші три лінійно незалежні, оскільки мінор третього порядку основної матриці, який складається з елементів першого, другого і третього рядків, відмінний від нуля. Четверте рівняння системи є лінійною комбінацією інших, і його можна відкинути. Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ \quad -5x_2 + 4x_3 = -22, \\ \qquad 3x_3 = -9. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

який задовольняє і четверте рівняння системи.

Задача 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & -3 & -11 \\ 0 & 30 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

$r(A)$=2, $r(\tilde{A})$=3, тобто $r(A) \neq r(\tilde{A})$.

Система рівнянь несумісна.

Задача 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \quad 7x_3 - 4x_4 = -10. \end{cases}$$

Розв'язок. Маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $r(A)$=2, $r(\tilde{A})$=2. Система сумісна. Так як ранг менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

З даних трьох рівнянь системи перші два лінійно незалежні, а третє рівняння є лінійною комбінацією перших двох.

Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 - x_3 + x_4, \\ \quad - x_2 = 7 + 6x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

де x_1, x_2 базисні, а x_3, x_4 вільні невідомі.

Розв'язавши останню систему відносно x_1, x_2, одержимо

$$\begin{aligned} x_1 &= -10 - 7x_3 + 4x_4, \\ x_2 &= -7 - 6x_3 + 3x_4, \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= x_4. \end{aligned}$$

Запишемо загальний розв'язок даної системи у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Позначивши вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ через $\vec{x}$, $\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ через $\vec{a}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ через $\vec{b}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ через $\vec{c}$, одержимо

$$\vec{x} = \vec{a} + x_3\vec{b} + x_4\vec{c},$$

тобто загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Зауваження. Щоб із загального розв'язку системи одержати деякий частинний розв'язок, треба надати вільним невідомим якихось числових значень.

Наприклад, коли $x_3 = x_4 = 0$, маємо $\vec{x} = \vec{a}$, тобто вектор $\vec{a}$ (або x_1=-10, x_2=-7, x_3=0, x_4=0) є частинним розв'язком системи.

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 278-297 зозв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

278. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

279. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

280. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

281. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

282. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

283. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

284. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -14, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

285. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

286. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \quad + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 \quad + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 \qquad - x_4 + 2x_5 = 8, \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad = 1. \end{cases}$

287. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

288. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad + 5x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5. \end{cases}$

289. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

290. $\begin{cases} 3{,}21x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}34x_3 = 6{,}12, \\ 0{,}43x_1 + 4{,}11x_2 + 0{,}22x_3 = 5{,}71, \\ 0{,}17x_1 + 0{,}16x_2 + 4{,}73x_3 = 7{,}06. \end{cases}$

291. $\begin{cases} 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20, \\ 4x_1 - 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8, \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9. \end{cases}$

292. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

293. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

294. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = -6, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = -4. \end{cases}$

295. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -18, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$

296. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

297. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 \qquad = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

В задачах №№ 298-300 дослідити систему і знайти загальний розв’язок в залежності від значення параметра λ :

298. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$

299. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

300. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

3.4. Системи лінійних однорідних рівнянь

Означення 3.8. Система рівнянь (3.1), в якій $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, називається однорідною. Така система має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Нехай матриця A, складена з коефіцієнтів системи (3.3), має ранг r. Ранг r матриці A у випадку однорідної системи називається рангом системи.

Однорідна система завжди сумісна, так як набір чисел $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ є її розв'язком. Розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ називається нульовим.

Якщо $n=r$, то нульовий розв'язок буде єдиним розв'язком системи (3.3); при $r<n$ система має розв'язки, відмінні від нульового.

Означення 3.9. Нехай $r<n$. Тоді будь-яка сукупність з n-r лінійно-незалежних розв'язків однорідної системи (3.3) називається фундаментальною системою розв'язків однорідної системи.

Теорема 3.5. Загальний розв'язок однорідної системи рангу r з n невідомими має вигляд

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \ldots + c_{n-r}\vec{x}_{n-r},$$

де c_1, c_2, ..., c_{n-r} - деякі довільні сталі, а $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-r}$ - фундаментальна система розв'язків однорідної системи (3.3).

Теорема 3.6. Множина розв'язків $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ лінійної однорідної системи рангу r утворює в просторі L^n підпростір розмірності n-r, в якому фундаментальна система розв'язків утворює базис.

Фундаментальну систему розв'язків можна знайти так.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ - базисні, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - вільні невідомі. Виразимо базисні через вільні і запишемо систему (3.3) у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = c_{1r+1}x_{r+1} + c_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{2r+1}x_{r+1} + c_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ x_r = c_{rr+1}x_{r+1} + c_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + c_{rn}x_n, \\ x_{r+1} = \quad x_{r+1}, \\ x_{r+2} = \quad\quad x_{r+2}, \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ x_n = \quad\quad\quad x_n, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1r+1} \\ c_{2r+1} \\ . \\ . \\ . \\ c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \begin{pmatrix} c_{1r+2} \\ c_{2r+2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+2} + \ldots + \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} x_n.$$

Тоді

$$\vec{x} = \vec{c}_1 x_{r+1} + \vec{c}_2 x_{r+2} + \ldots + \vec{c}_{n-r} x_n,$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_r \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{1r+1} \\ c_{2r+1} \\ . \\ . \\ . \\ c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad \vec{c}_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При такому запису загального розв’язку числа $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ грають роль довільних сталих, а вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_{n-r}$ утворюють фундаментальну систему розв’язків однорідної системи (3.3).

Означення 3.10. Система лінійних однорідних рівнянь (3.3) називається відповідною до системи неоднорідних рівнянь (3.1), якщо вона одержана з (3.1) заміною в (3.1) вільних членів $b_1,...,b_m$ на нульові значення.

Теорема 3.7. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь (3.1) дорівнює сумі якогось частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь (3.3) відповідної до (3.1).

Тобто, якщо $\vec{x}_0$ - частинний розв'язок системи (3.1), а $\vec{x}^* = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + ... + c_{n-r}\vec{x}_{n-r}$ - загальний розв'язок відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь (3.3), то згідно з теоремою 3.7, загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь (3.1) має вигляд

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}^* = \vec{x}_0 + c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + ... + c_{n-r}\vec{x}_{n-r}.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A)$=3.

Розмірність підпростору розв'язків $k = n - r = 5 - 3 = 2.$ Отже, нам досить знайти які-небудь два лінійно незалежних розв'язки.

Так як r=3, то з чотирьох рівнянь візьмемо три, коефіцієнти яких входять в базисний мінор матриці A.

Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 3x_3 + 4x_5 = 0, \\ \quad x_2 + x_4 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ \quad -2x_4 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = -3x_3 - 4x_5, \\ \quad x_2 + x_4 = -2x_3 - 3x_5, \\ \quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 5x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 3x_5, \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_4 = 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_5 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5 \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5.$$

Вектори $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і утворюють базис підпростору розв'язків.

Отже, загальний розв'язок системи рівнянь можна записати таким чином

$$x = \vec{c}_1 x_4 + \vec{c}_2 x_5,$$

де x_4 і x_5 - довільні сталі.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \qquad\quad + 7x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо матрицю системи

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 7 & -4\end{pmatrix}.$$

Маємо

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 1 & 6 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A)$=2.

Розмірність підпростору розв'язків $k=n-r=4-2=2.$ Тобто, нам досить знайти довільні два лінійно незалежних розв'язки.

Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ \quad -x_2-6x_3+3x_4=0\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}x_1-x_2=-x_3+x_4,\\ \quad -x_2=6x_3-3x_4.\end{cases}$$

Розв'язавши її відносно x_1, x_2, одержимо

$$\begin{cases}x_1=-7x_3+4x_4,\\ x_2=-6x_3+3x_4,\\ x_3=1\cdot x_3+0\cdot x_4,\\ x_4=0\cdot x_3+1\cdot x_4\end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ -6\\ 1\\ 0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}x_4.$$

Вектори $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-7\\ -6\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ і $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Отже, загальний розв'язок системи рівнянь можна записати таким чином

$$\vec{x}=\vec{a}_1x_3+\vec{a}_2x_4,$$

де x_3, x_4 - довільні сталі.

Зауважимо, що однорідна система рівнянь цієї задачі є відповідною до неоднорідної системи рівнянь задачі 4 п. 3.3. Таким чином, загальний розв'язок $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}x_3+\vec{c}x_4$ задачі 4 п. 3.3 має вигляд

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}^*$, де $\vec{x}_0 = \vec{a}$ - частинний розв'язок відповідної неоднорідної системи, $\vec{x}^* = \vec{b}x_3 + \vec{c}x_4$, $\vec{b} = \vec{a}_1$, $\vec{c} = \vec{a}_2$ - загальний розв'язок відповідної однорідної системи рівнянь.

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 301-310 знайти всі розв'язки систем:

301. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

302. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

303. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

304. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

305. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

306. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

307. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

308. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

309. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

310. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

311. Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи рівнянь:

1). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

2). $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

3). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

4). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

6). $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

7). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

8). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9). $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$ 10). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$

11). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ 12). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 \qquad\qquad = 0, \\ \quad 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

312. Знайти системи однорідних рівнянь, множини розв’язків яких збігаються з лінійними оболонками, натягнутими на вектори

1). $\vec{b}_1 = (1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 1,\ -3,\ 2)$.

2). $\vec{b}_1 = (1,\ 2,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 4,\ 5,\ -1)$,

$\vec{b}_3 = (2,\ 5,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}_4 = (1,\ 1,\ -4,\ 2)$.

3). $\vec{b}_1 = (2,\ 3,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}_2 = (2,\ 4,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}_3 = (2,\ 5,\ -3,\ 4)$.

313. З’ясувати, чи утворюють рядки кожної з матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв’язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$