4. ДІЙСНИЙ ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР

4.1. Добуток векторів у звичайному просторі

4.1.1. Прямокутні складова й проекція вектора на вісь

Означення 4.1. Віссю $\vec{S}$ називається пряма, на якій вибрано додатний напрям і одиницю довжини. Вісь $\vec{S}$ визначається вектором $\vec{S}_0$ (ортом осі).

Означення 4.2. Проекцією точки M на дану вісь $\vec{S}$ називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки M на дану вісь.

Означення 4.3. Складовою вектора $\vec{AB}$ на вісь $\vec{S}$ називається вектор $\vec{A'B'}$, де точка A' - проекція точки A, а точка B' - проекція точки B на вісь $\vec{S}$.

Означення 4.4. Проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь $\vec{S}$ називається довжина складової цього вектора, взята з додатним знаком, якщо напрямки складової та осі збігаються, і з від'ємним знаком, якщо складова та вісь мають протилежні напрямки. Проекцію вектора $\vec{AB}$ на вісь $\vec{S}$ позначають $np_{\vec{S}}\vec{AB}.$

Теорема 4.1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь $\vec{S}$ дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута α між вектором та віссю, тобто

$$np_{\vec{S}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha \tag{4.1}$$

Властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$np_{\vec{S}}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n\right) = np_{\vec{S}}\vec{a}_1 + np_{\vec{S}}\vec{a}_2 + \ldots + np_{\vec{S}}\vec{a}_n .$$

2. Проекція добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на проекцію вектора, тобто

$$np_{\vec{S}}\lambda\vec{a} = \lambda\ np_{\vec{S}}\vec{a} .$$

Задача з розв'язком

Задача. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють з віссю $\vec{S}$ кути 60^o і 120^o. Знайти проекцію суми $\vec{a} + 3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 4.$

Розв'язок. Оскільки проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$np_{\vec{S}}\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = np_{\vec{S}}\vec{a} + np_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right),$$

то досить знайти проекції на вісь $\vec{S}$ кожного із векторів $\vec{a}$ і $3\vec{b}$. Відповідно з формулою (4.1) одержуємо:

$$np_{\vec{S}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos 60^o = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$np_{\vec{S}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| cos 120^o = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

За властивістю 2 знаходимо проекцію вектора $3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$:

$$np_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right) = 3\ np_{\vec{S}}\vec{b} = 3 \cdot (-2) = -6.$$

Таким чином,

$$np_{\vec{S}}\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = 3 + (-6) = -3.$$

Задачі для розв'язування

314. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - одиничні вектори, що утворюють з даною віссю $\vec{S}$ відповідно кути $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$. Знайти проекцію на вісь $\vec{S}$ вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

315. Знайти проекцію суми векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 6$, $|\vec{c}| = 8$, $\left|\vec{d}\right| = 12$, а кути, що утворюють ці вектори з віссю $\vec{S}$, відповідно дорівнюють 0, $\frac{2}{3}\pi$, π, $\frac{\pi}{3}$.

316. Довести, що $np_{\vec{S}}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n\right) = np_{\vec{S}}\vec{a}_1 + np_{\vec{S}}\vec{a}_2 + \ldots + np_{\vec{S}}\vec{a}_n$ для будь-якого скінченного числа доданків.

317. Розглядаючи проекції деякої ламаної лінії, довести формули

1) $sin\,\varphi + sin\,3\varphi + \ldots + sin(2n-1)\varphi = \dfrac{1 - cos\,2n\varphi}{2\,sin\,\varphi}$;

2) $cos\,\varphi + cos\,3\varphi + \ldots + cos(2n-1)\varphi = \dfrac{sin\,2n\varphi}{2\,sin\,\varphi}$.

4.1.2. Декартова прямокутна система координат

Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, то така система координат називається декартовою прямокутною системою координат.

У випадку декартової прямокутної системи координат базисні вектори позначають через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є відповідно ортами осей *Ox, Oy, Oz*. Кожний вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладений за декартовим прямокутним базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто для кожного вектора $\vec{d}$ знайдеться єдина трійка чисел *x, y, z* така, що справедлива рівність:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

Числа *x, y, z* називаються декартовими прямокутними координатами вектора $\vec{d}$.

Якщо точка M - точка простору, то декартові прямокутні координати цієї точки збігаються з декартовими координатами її радіус-вектора $O\vec{M}$, тобто запис $M(x,y,z)$ рівносильний запису $O\vec{M}=(x,y,z)$. Якщо дані $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Теорема 4.2. Декартові прямокутні координати *x, y, z* вектора $\vec{d}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі *Ox, Oy, Oz* відповідно, а вектори $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ є складовими вектора $\vec{d}$ на осі *Ox, Oy, Oz*.

Зауваження 4.1. Нехай вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мають спільний початок *O*. Система координат *Oxyz* називається правою (лівою), якщо поворот на найменший кут від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{k}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). Аналогічно визначається права (ліва) система координат на площині. Надалі завжди будуть розглядатися тільки праві системи координат.

Позначимо буквами α,β,γ кути нахилу вектора $\vec{d}$ відповідно до осей *Ox, Oy, Oz*. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{d}$.

Справедливі співвідношення.

Для проекцій вектора $\vec{d}$ на осі маємо

$$x=\left|\vec{d}\right|\cos\alpha,\quad y=\left|\vec{d}\right|\cos\beta,\quad z=\left|\vec{d}\right|\cos\gamma\ .$$

Довжина вектора $\vec{d}$ виражається через його координати формулою

$$\left|\vec{d}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \qquad (4.2)$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{d}$ виражаються через координати цього вектора за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (4.3)$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Якщо $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2);\\ \vec{a}-\vec{b}&=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2).\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Якщо $\vec{a}=(x,y,z)$, то для будь-якого числа α

$$\alpha\vec{a}=(\alpha x,\alpha y,\alpha z).$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Визначити модулі суми та різниці векторів $\vec{a} = (3,-5,8)$, $\vec{b} = (-1,1,-4)$.

Розв'язок. Знаходимо за формулою (4.4) координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2,-4,4); \quad \vec{a} - \vec{b} = (4,-6,12).$$

За формулою (4.2) одержимо

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6,$$

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = 14.$$

Задача 2. Дано координати вершин піраміди $A_1(-1,0,1)$, $A_2(4,3,2)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(0,4,-1)$. Знайти довжини ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 піраміди.

Розв'язок. Знайдемо координати векторів $A_1\vec{A}_2$, $A_1\vec{A}_3$, $A_1\vec{A}_4$. Маємо $A_1\vec{A}_2 = (5,3,1)$, $A_1\vec{A}_3 = (2,2,3)$, $A_1\vec{A}_4 = (1,4,-2)$. Оскільки $\left|A_1A_2\right| = \left|A_1\vec{A}_2\right|$, то $\left|A_1A_2\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$.

Аналогічно

$$\left|A_1A_3\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17};$$

$$\left|A_1A_4\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

Задачі для розв'язування

318. Знайти модуль вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \frac{1}{5}\left(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ і його напрямні косинуси.

319. Дано вектори $\vec{a} = (1,-2)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2},1\right)$, $\vec{c} = (2,0)$. Знайти координати векторів:

   1) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$; 2) $\frac{3\vec{a} - 5\vec{b}}{2}$; 3) $\frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{3}$.

320. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні?

321. Переконатися, що чотири точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ є вершинами трапеції.

322. Дано вершини паралелограма *ABCD*: $A(2,2,2)$, $B(6,5,0)$, $C(0,3,8)$. Знайти координати вершини *D*.

323. Знайти точку *M*, яка знаходиться від точки $A(-4,0,1)$ на відстані 9, знаючи напрямні косинуси вектора $O\vec{M}$: $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.

324. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(2,-1,3)$, $B(4,0,1)$, $C(-10,5,3)$. Знайти косинус кута *ABC*.

325. У трикутнику з вершинами $A(5,4)$, $B(-1,2)$, $C(5,1)$ проведена медіана *AD*. Знайти її довжину.
326. Дано трикутник з вершинами $A(4,1)$, $B(7,5)$, $C(-4,7)$. Знайти довжину бісектриси *AD* кута *BAC*.
327. На площині дано два вектори $\vec{p}=(2,-3)$ та $\vec{q}=(1,2)$. Розкласти вектор $\vec{a}=(9,4)$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$.
328. Дано три вектори $\vec{a}=(3,-1)$, $\vec{b}=(1,-2)$, $\vec{c}=(-1,7)$. Розкласти вектор $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$.
329. На площині дано чотири точки *A(1,-2), B(2,1), C(3,2), D(-2,3).* Розкласти вектори $A\vec{D}$, $B\vec{D}$, $C\vec{D}$ та $A\vec{D}+B\vec{D}+C\vec{D}$ за базисом $A\vec{B}$, $A\vec{C}$.
330. Дано три вектори $\vec{p}=(3,-2,1)$, $\vec{q}=(-1,1,2)$, $\vec{r}=(2,1,-3)$. Розкласти вектор $\vec{c}=(11,-6,-7)$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.
331. В деякому базисі дано чотири вектори $\vec{a}=(2,2,3), \vec{b}=(1,2,3)$, $\vec{c}=(1,1,1)$, $\vec{d}=(3,0,-2)$. Переконатись, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

4.1.3. Скалярний добуток двох векторів

Означення 4.5. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, позначене символом $\langle \vec{a},\vec{b} \rangle$ (або $\vec{a}\,\vec{b}$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто $\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}|\,cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

Наслідок 4.1. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проекцію другого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів, тобто

$$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = |\vec{a}|\; пр_{\vec{a}}\vec{b} \text{ або } \langle \vec{a},\vec{b} \rangle = |\vec{b}|\; пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Геометричні властивості скалярного добутку

Теорема 4.3. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку.

Теорема 4.4. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток додатний (від’ємний).

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. $\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = \langle \vec{b},\vec{a} \rangle$ *(комутативна властивість).*
2. $\langle \alpha\vec{a},\vec{b} \rangle = \alpha\langle \vec{a},\vec{b} \rangle$ *(асоціативна властивість).*
3. $\langle (\vec{a}+\vec{b}),\vec{c} \rangle = \langle \vec{a},\vec{c} \rangle + \langle \vec{b},\vec{c} \rangle$ *(дистрибутивна властивість)*
4. $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle > 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{a}\vec{a}=0$, якщо $\vec{a}=\vec{0}$.

5. $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2$. Добуток $\langle \vec{a}\vec{a}\rangle$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається скалярним квадратом. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора.

Зауваження 4.2. Справедливі рівності

$$\vec{i}^{\,2} = 1;\quad \vec{j}^{\,2} = 1;\quad \vec{k}^{\,2} = 1;\quad \langle \vec{i},\vec{j}\rangle = \langle \vec{i},\vec{k}\rangle = \langle \vec{j},\vec{k}\rangle = 0.$$

Теорема 4.5. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Наслідок 4.2. Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є рівність

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Наслідок 4.3. Кут між векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Наслідок 4.4. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Наслідок 4.5.

$$|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a},\vec{a}\rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Задачі з розв’язком

Задача 1. В умовах задачі 2 п. 4.1.2 знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Розв’язок. Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2} = (5,3,1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4} = (1,4,-2)$, то косинус кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\rangle}{|\overrightarrow{A_1A_2}||\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{5\cdot 1 + 3\cdot 4 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}} = \frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = \frac{15}{7\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тоді $$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_4. Тому

$$\left(A_1A_2\hat{\ }A_1A_4\right) = \left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right) = arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Задача 2. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначити, при яких значеннях α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикулярні.

Розв'язок. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку (теорема 4.3). Звідки для α маємо співвідношення:

$$\left\langle\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \alpha\vec{b}\right)\right\rangle = 0.$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$\left\langle\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \alpha\vec{b}\right)\right\rangle = \vec{a}^2 - \alpha\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle + \alpha\left\langle\vec{b}\vec{a}\right\rangle - \alpha^2\vec{b}^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 - \alpha\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle + \alpha\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle - \alpha^2\left|\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 - \alpha^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

Оскільки $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, òî $9 - 25\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Задача 3. Знайти довжину вектора $\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{y}$, якщо $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 2$, кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. Маємо $\langle\vec{a}\vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2$. Звідси $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Тому

$$|\vec{a}| = |\vec{x} - 2\vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - 2\vec{y})^2} = \sqrt{\vec{x}^2 - 4\vec{x}\vec{y} + 4\vec{y}^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{x}|^2 - 4|\vec{x}||\vec{y}|\,cos\frac{\pi}{3} + 4|\vec{y}|^2} = \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{13}.$$

Задачі для розв'язування

332. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Знайти:

1) $\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$ 2) $\vec{a}^2$; 3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; 4) $\left\langle\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)\right\rangle$.

333. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, знайти довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

334. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, а вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, що дорівнюють $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, знайти:

1) $\left\langle\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)(\vec{c} - \vec{a})\right\rangle$; 2) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2$.

335. Дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $|\vec{c}|=4$, знайти $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

336. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60°. Знаючи, що $|\vec{a}|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $|\vec{c}|=6$, визначити модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

337. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a}-\vec{b}$?

338. Дано три вектори $\vec{a}=(4,-2,-4)$, $\vec{b}=(-2,4,-3)$, $\vec{c}=(0,2,-1)$. Обчислити:

а) $\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$; б) $\langle\vec{a}\vec{c}\rangle$; в) $\sqrt{\vec{a}^2}$; г) $\left\langle\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right\rangle$.

339. Дано чотири вектори $\vec{a}=(4,-8,-4)$, $\vec{b}=(2,4,3)$, $\vec{c}=(1,2,5)$, $\vec{d}=(0,1,2)$. Обчислити:

а) $\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$; б) $\left\langle\vec{a}\vec{d}\right\rangle+\left\langle\vec{b}\vec{d}\right\rangle$; в) $\left\langle\left(3\vec{a}+\vec{d}\right)\left(2\vec{b}-2\vec{c}\right)\right\rangle$.

340. Дано вектори $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При якому значенні m ці вектори взаємно перпендикулярні?

341. Дано точки *A(-3,0,2), B(5,-2,1), C(2,6,-1), D(1,3,-3).* Довести, що прямі *AB* та *CD* взаємно перпендикулярні.

342. При якому значенні m вектори $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?

343. Дано вершини чотирикутника *A(1,-2,2), B(1,4,0), C(-4,1,1), D(-5,-5,3).* Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

344. Позначивши через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони ромба, що виходять із спільної вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

345. Визначити кут між векторами $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

346. Дано вершини трикутника *A(3,2,-3), B(5,1,-1), C(1,-2,1).* Визначити його внутрішній кут при вершині *B*.

347. Обчислити внутрішні кути трикутника *A*(1,2,1), *B*(3,-1,7), *C*(7,4,-2); переконатися, що цей трикутник рівнобедрений.

348. У прямокутному рівнобедреному трикутнику проведені медіани з вершин гострих кутів. Знайти кут між ними.

349. Дано вершини трикутника *A*(0,0,5), *B*(5,-2,1), *C*(2,6,1). Знайти кути трикутника.

350. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

351. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=(5,2,5)$ на вісь вектора $\vec{b}=(2,-1,2)$.

352. Дано три вектори $\vec{a}=(1,-3,4)$, $\vec{b}=(3,-4,2)$, $\vec{c}=(-1,1,4)$. Знайти $np_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

353. Дано вектори $\vec{a} = (3,0,4)$, $\vec{b} = (2,-1,-2)$. Знайти:

1) $пр_{\vec{b}}\vec{a};$ 2) $пр_{\vec{a}}\vec{b};$ 3) $пр_{\vec{a}}\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right).$

354. Дано точки $A(3,1,0)$, $B(0,-2,6)$, $C(3,-2,0)$, $D(1,-2,4)$. Знайти $пр_{\vec{CD}}\vec{AB}$.

355. Дано дві точки $A(2,-4,0,)$, $B(6,8,4)$. Знайти проекцію вектора $\vec{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні кути.

356. Дано вершини трикутника $A(4,1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(6,3,1)$. Знайти проекцію вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$.

357. Знайти вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$, якщо відомо, що його проекція на вектор $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ дорівнює 1.

4.1.4. Векторний добуток векторів

Означення 4.6. Три вектори утворюють впорядковану трійку векторів, якщо вказано, який із цих векторів є першим, який - другим, який - третім.

Означення 4.7. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається правою (лівою), якщо після приведення до спільного початку найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).

Зауваження 4.3. Праву (ліву) трійку утворюють великий, незігнутий вказівний та середній пальці правої (лівої) руки.

Означення 4.8. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символом $\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right]$ (або $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$) і задовольняє трьом вимогам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто

$$|\vec{c}| = \left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$, якщо $\vec{c} \neq \vec{0}$, напрямлений так, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.

Геометричні властивості векторного добутку

Теорема 4.6. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

Теорема 4.7. Довжина (модуль) векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ дорівнює S паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right| = S$.

Наслідок 4.6. Якщо $\vec{e}$ - орт векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$, à S - площа паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=S\vec{e}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ *(антикомутативна властивість).*
2. $\left[(\alpha\vec{a})\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ *(асоціативна властивість).*
3. $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\vec{c}\right]$ *(дистрибутивна властивість).*
4. $[\vec{a}\vec{a}]=0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Зауваження 4.4. Справедливі рівності:

$$\left[\vec{i}\,\vec{i}\right]=\left[\vec{j}\,\vec{j}\right]=\left[\vec{k}\vec{k}\right]=0;\quad \left[\vec{i}\,\vec{j}\right]=\vec{k};\quad \left[\vec{i}\,\vec{k}\right]=-\vec{j};\quad \left[\vec{j}\vec{k}\right]=\vec{i}\ .$$

Теорема 4.8. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами

$$\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right),\quad \vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right),$$

то векторний добуток цих векторів має вигляд

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Наслідок 4.7. Два вектори $\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ і $\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Задача з розв'язком

Задача. В умовах задачі 2 п. 4.1.2 знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

Розв'язок. Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює площі трикутника $A_1A_2A_3$. Площа трикутника $A_1A_2A_3$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $A_1\vec{A}_2$ і $A_1\vec{A}_3$, тобто половині модуля векторного добутку векторів $A_1\vec{A}_2$ і $A_1\vec{A}_3$.

Оскільки $A_1\vec{A}_2$=(5,3,1), $A_1\vec{A}_3$=(2,2,3), то

$$\left[A_1\vec{A}_2A_1\vec{A}_3\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=\left(7,-13,4\right).$$

Отже,

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left\|\left[A_1\vec{A}_2A_1\vec{A}_3\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+(-13)^2+4^2}=3\sqrt{26}\ .$$

Задачі для розв'язування

358. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, знайти $\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|$.
359. Дано $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a}\vec{b} = 16$. Знайти $\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|$.
360. Довести, що $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right] = 2\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ і дати геометричне тлумачення формули.
361. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, знайти:

   1) $\left|\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\right|$; 2) $\left|\left[\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right]\right|$.
362. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умові: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$=0. Довести, що $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\vec{b}\vec{c}\right] = \left[\vec{c}\vec{a}\right]$.
363. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ зв'язані співвідношеннями $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\vec{c}\vec{d}\right]$, $\left[\vec{a}\vec{c}\right] = \left[\vec{b}\vec{d}\right]$. Довести колінеарність векторів $\vec{a}+\vec{d}$ та $\vec{b}+\vec{c}$.
364. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними?
365. Дано вектори $\vec{a}$=(3, -1, -2) і $\vec{b}$=(1, 2, -1). Знайти:

   1) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$; 2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{b}\right]$.
366. Дано точки A(2, -1, 2), B(1, 2, -1), C(3, 2, 1). Знайти координати векторних добутків:

   1) $\left[\vec{AB}\vec{BC}\right]$ 2) $\left[\left(\vec{BC}-2\vec{CA}\right)\vec{CB}\right]$.
367. Дано вектори $\vec{a} = (1,0,-2)$, $\vec{b} = (2,1,0)$, $\vec{c} = (-1,1,1)$. Знайти $\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]$.
368. Дано трикутник з вершинами A(2,-1,2), B(1,2,-1) і C(3,2,1). Знайти його площу.
369. Знайти площу трикутника, вершинами якого є A(1,0,6), B(4,5,-2), C(7,3,4).
370. Дано вершини трикутника A(5,-6,2), B(1,3,-1) C(1,-1,2). Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини A на сторону BC.
371. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.
372. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}+3\vec{b},\ 3\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1,\ \left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{6}$.
373. Сила $\vec{F}$=(3,2,-4) прикладена до точки A(2,-1,1). Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

374. Сила $\vec{P}$=(2,-4,5) прикладена до точки M(4,-2,3). Визначити момент цієї сили відносно точки A(3,2,1).

375. Сила $\vec{P}$=(2,2,2) прикладена до M(4,2,-3). Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки C(2,4,0).

376. Дано три сили $\vec{M}$=(2,-1,-3), $\vec{N}$=(3,2,-1) і $\vec{P}$=(-4,1,3), прикладені до точки C(-1,4,2). Визначити величину та напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки A(2,3,-1).

377. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$=(4,-2,-3) і $\vec{b}$=(0,1,3), утворює з віссю OY тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}|$=26, знайти його координати.

378. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}$=(2,-3,1) і $\vec{b}$=(1,-2,3) та задовольняє умові $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

4.1.5. **Мішаний добуток векторів**

Нехай дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Означення 4.9. Якщо вектор $\vec{a}$ векторно помножити на вектор $\vec{b}$, а потім одержаний вектор $[\vec{a}\,\vec{b}\,]$ скалярно помножити на вектор $\vec{c}$, то в результаті одержується число $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}$, яке називається мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Теорема 4.9. Мішаний добуток $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятому із знаком плюс, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - права, і із знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - ліва. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}$ дорівнює нулю.

Наслідок 4.8. Справедлива рівність

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}=\vec{a}[\vec{b}\;\vec{c}\,].$$

Тому мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ звичайно позначають $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, не вказуючи, які два з цих векторів перемножуються векторно.

Наслідок 4.9. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Наслідок 4.10. Мішаний добуток трьох векторів, два з яких колінеарні, дорівнює нулю.

Теорема 4.10. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами:

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1);\quad \vec{b}=(x_2;y_2;z_2);\quad \vec{c}=(x_3;y_3;z_3),$$

то мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює визначнику, елементи рядків якого відповідно дорівнюють координатам векторів, що перемножаються, тобто

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

<u>*Наслідок 4.11.*</u> Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$; $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ є рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Задача з розв'язком

Задача. В умовах задачі 2 п. 4.1.2 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язок. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ модуля мішаного добутку векторів $A_1\vec{A}_2 = (5,3,1)$, $A_1\vec{A}_3 = (2,2,3)$, $A_1\vec{A}_4 = (1,4,-2)$.

Знайдемо їх мішаний добуток $A_1\vec{A}_2 A_1\vec{A}_3 A_1\vec{A}_4$.

Маємо

$$A_1\vec{A}_2 A_1\vec{A}_3 A_1\vec{A}_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -53.$$

Отже,

$$V = \frac{1}{6}|-53| = \frac{53}{6} = 8\frac{5}{6}.$$

Задачі для розв'язування

379. Чи будуть компланарними вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо
   1) $\vec{a}=(2,5,7)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$, $\vec{c}=(1,2,2)$;
   2) $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(1,9,-1)$;
   3) $\vec{a}=(2,-1,2)$, $\vec{b}=(1,2,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,7)$.
380. Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ і $D(2,1,3)$ лежать в одній площині.
381. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30°. Знаючи, що $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$, знайти $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.
382. Дано три вектори $\vec{a}=(1,-1,3)$, $\vec{b}=(-2,2,1)$, $\vec{c}=(3,-2,5)$. Знайти $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.
383. Знайти об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.
384. Дано вершини тетраедра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.
385. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умові $[\vec{a}\,\vec{b}]+[\vec{b}\,\vec{c}]+[\vec{c}\,\vec{a}]=0$, компланарні.

386. Об'єм тетраедра V=5, три його вершини знаходяться в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі OY.

4.1.6. **Подвійний векторний добуток трьох векторів**

Означення 4.10. Подвійним векторним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається вектор $\vec{d}$, що дорівнює векторному добутку вектора $[\vec{a}\,\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$.

За означенням $\vec{d} = \left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$.

Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $[\vec{a}\,\vec{b}]$ і вектора $\vec{c}$. Із перпендикулярності вектора $\vec{d}$ до векторного добутку $[\vec{a}\,\vec{b}]$ випливає, що $\vec{d}$ лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ теж перпендикулярні до векторного добутку $[\vec{a}\,\vec{b}]$.

Теорема 4.11 Подвійний векторний добуток трьох векторів дорівнює різниці добутків середнього вектора на скалярний добуток крайніх мінус добуток того крайнього вектора, який знаходиться у внутрішніх дужках, на скалярний добуток інших векторів, тобто

$$\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right] = \vec{b}\langle\vec{a}\vec{c}\rangle - \vec{a}\langle\vec{c}\vec{b}\rangle.$$

Зауваження 4.5. В загальному випадку

$$\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right] = -\left[\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right], \text{ але } \left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right] \neq \left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right].$$

Задача з розв'язком

Задача. Довести тотожність

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\langle\vec{a}\vec{c}\rangle - \vec{c}\langle\vec{a}\vec{b}\rangle,$$

не використовуючи твердження теореми 4.11.

Розв'язок. Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином. Вісь Ox спрямуємо вздовж вектора $\vec{a}$, а вісь Oy помістимо в площині $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вважаючи, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ приведені до спільного початку). В такому випадку будемо мати

$$\vec{a}=(x_1;0;0),\ \vec{b}=(x_2;y_2;0),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3).$$

Знайдемо $\vec{d}$. Маємо

$$\left[\vec{b}\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = y_2 z_3 \vec{i} - x_2 z_3 \vec{j} + \left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right)\vec{k}.$$

Отже,

$$\vec{d}=\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & 0 & 0\\ y_2z_3 & -x_2z_3 & x_2y_3-x_3y_2\end{vmatrix}=-\left(x_1x_2y_3-x_1x_3y_2\right)\vec{j}-x_1x_2z_3\vec{k}=$$

$$=\left(0;\ -\left(x_1x_2y_3-x_1x_3y_2\right);\ -x_1x_2z_3\right)=\left(0;\ \left(x_1x_3y_2-x_1x_2y_3\right);\ -x_1x_2z_3\right).$$

Знайдемо $\vec{b}\langle\vec{a},\vec{c}\rangle-\vec{c}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. Маємо

$$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=x_1x_3;\ \ \vec{b}\langle\vec{a}\vec{c}\rangle=\left(x_1x_2x_3;\ x_1x_3y_2;\ 0\right),$$

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=x_1x_2;\ \ \vec{c}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\left(x_1x_2x_3;\ x_1x_2y_3;\ x_1x_2z_3\right).$$

Звідки

$$\vec{b}\langle\vec{a},\vec{c}\rangle-\vec{c}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=(0;(x_1x_3y_2-x_1x_2y_3);-x_1x_2z_3),$$

що збігається з виразом для $\vec{d}$.

Задачі для розв'язування

387. Дано вектори $\vec{a}$=(2,-3,1), $\vec{b}$=(-3,1,2) і $\vec{c}$=(1,2,3). Знайти $\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]$.
388. Дано вектори $\vec{a}$=(3,0,1), $\vec{b}$=(2,4,3) і $\vec{c}$=(-1,3,2), $\vec{d}$=(2,0,1). Знайти $\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$, $\left\langle\left[\vec{a}\vec{b}\right],\left[\vec{b}\vec{d}\right]\right\rangle$.
389. Довести тотожності:
   1) $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b}\left[\vec{c}\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right]=0,$
   2) $\left\langle\left[\vec{a}\vec{b}\right],\left[\vec{c}\vec{d}\right]\right\rangle=\langle\vec{a},\vec{c}\rangle\langle\vec{b},\vec{d}\rangle-\langle\vec{a},\vec{d}\rangle\langle\vec{b},\vec{c}\rangle,$
   3) $\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\left[\vec{c}\vec{d}\right]\right]=\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\vec{d}\right)-\vec{d}\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right),$
   4) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\left[\vec{b}\vec{c}\right]\left[\vec{c}\vec{a}\right]=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)^2.$

4.2. **Означення дійсного евклідового простору**

Дійсний лінійний простір L називається дійсним евклідовим простором E (або просто евклідовим простором), якщо справджуються такі умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам (векторам) цього простору $\vec{x}$ і $\vec{y}$ ставиться у відповідність дійсне число, що називається скалярним добутком цих елементів і позначається символом $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.

II. Вказане правило підпорядковане таким чотирьом аксіомам:

1. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$.
2. $\langle\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}_1,\vec{y}\rangle+\langle\vec{x}_2,\vec{y}\rangle$.
3. $\langle\lambda\vec{x},\vec{y}\rangle=\lambda\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.
4. $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle>0$, якщо $\vec{x}\neq0$, $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0$, якщо $\vec{x}=0$.

Означення 4.11. Розмірністю евклідового простору E називається розмірність лінійного простору L, що бере участь в означенні E.

<u>Приклад 1</u>. В n-вимірному лінійному просторі L_n матриць-рядків довжини n скалярний добуток двох будь-яких векторів $\vec{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ і $\vec{y}=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ може бути означеним, наприклад, з допомогою рівності

$$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle = x_1y_1+\ldots+x_ny_n \qquad (4.5)$$

Зауваження 4.6. n-вимірний евклідів простір, який одержується з L_n введенням в L_n за деяким правилом скалярного добутку векторів, позначається через E_n. З прикладу 1 випливає, що E_3 є звичайним простором, а E_2 - площиною простору E_3. n-вимірний евклідів простір E^n одержується з L^n введенням в L^n скалярного добутку.

<u>Приклад 2</u>. Розглянемо нескінченновимірний лінійний простір $C[a,b]$ усіх функцій $x(t)$, визначених та неперервних на відрізку $[a,b]$. Скалярний добуток двох таких функцій $x(t)$ і $y(t)$ означимо як інтеграл від їх добутку

$$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt\,. \qquad (4.6)$$

Простір $C[a,b]$ з так означеним скалярним добутком є нескінченновимірним евклідовим простором.

Задача з розв'язком

Задача. Нехай $\vec{x}=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ і $\vec{y}=\left(\beta_1,\beta_2\right)$ довільні вектори лінійного простору L_2. Довести, що лінійний простір L_2 з означеним такою рівністю скалярним добутком $\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle=\alpha_1\beta_1+3\alpha_2\beta_2$ є евклідовим простором.

Розв'язок. Переконаємось, що так означений скалярний добуток підпорядкований чотирьом аксіомам евклідового простору.

1. $\left\langle \vec{y},\vec{x}\right\rangle=\beta_1\alpha_1+3\beta_2\alpha_2=\alpha_1\beta_1+3\alpha_2\beta_2$, тобто $\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle=\left\langle \vec{y},\vec{x}\right\rangle$.

2. Нехай $\vec{x}=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$, $\vec{y}=\left(\beta_1,\beta_2\right)$ і $\vec{z}=\left(\gamma_1,\gamma_2\right)$ - довільні елементи простору L_2, тоді $\vec{x}+\vec{y}=\left(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2\right)$ і $\left\langle \vec{x}+\vec{y},\vec{z}\right\rangle=\left(\alpha_1+\beta_1\right)\gamma_1+$
$+3\left(\alpha_2+\beta_2\right)\gamma_2=\alpha_1\gamma_1+\beta_1\gamma_1+3\alpha_2\gamma_2+3\beta_2\gamma_2=\left(\alpha_1\gamma_1+3\alpha_2\gamma_2\right)+\left(\beta_1\gamma_1+3\beta_2\gamma_2\right)=\left\langle \vec{x},\vec{z}\right\rangle+\left\langle \vec{y},\vec{z}\right\rangle$

3. $\lambda\,\vec{x}=\left(\lambda\,\alpha_1,\lambda\,\alpha_2\right)$;

$$\left\langle \lambda\,\vec{x},\vec{y}\right\rangle=\lambda\,\alpha_1\beta_1+3\lambda\,\alpha_2\beta_2=\lambda\left(\alpha_1\beta_1+3\alpha_2\beta_2\right)=\lambda\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle.$$

4. $\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle=\alpha_1^2+3\alpha_2^2\geq 0$ і $\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle=0 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=0 \Leftrightarrow \vec{x}=0$.

Таким чином, лінійний простір L_2 з так означеним скалярним добутком є евклідовим простором.

Задачі для розв'язування

390. Довести, що з аксіом скалярного добутку випливають такі властивості:

а) $\langle \vec{x}, \alpha \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$; б) $\langle \vec{x}, \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle$;

в) $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$; г) $\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0$.

391. Перевірити, чи є скалярними добутками в просторі E:

а) добуток довжин векторів;

б) подвоєний звичайний скалярний добуток?

392. Нехай $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ і $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2)$ - довільні вектори лінійного простору L_2. Довести, що лінійний простір L_2 з означеним скалярним добутком одним із цих способів:

а) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$; б) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2$

є евклідовим простором. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{x}$=(1,1) і $\vec{y}$=(-3,2) кожним із цих способів.

393. Нехай $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ і $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2)$ - довільні вектори лінійного простору L_2. Довести, що скалярний добуток в L_2 можна ввести формулою $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_1\beta_2 + b\alpha_2\beta_1 + c\alpha_2\beta_2$ в тому і тільки в тому випадку, якщо одночасно $a>0$ і $ac>b^2$.

394. Довести, що в просторі P_2 многочленів степеня не вище другого скалярний добуток многочленів $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ і $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$ можна означити формулою:

а) $\langle f,g \rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$; á) $\langle f,g \rangle=a_0b_0+2a_1b_1+a_2b_2$.

395. Довести, що в просторі $C[a,b]$ скалярний добуток функцій $x(t)$ і $y(t)$ можна означити формулою $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt$.

4.3. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Означення кута між векторами в евклідовому просторі. Ортогональність.

Означення 4.12. Довжиною вектора $\vec{x} \in E_n$ називається величина $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

<u>Приклад 1.</u> В E_n з скалярним добутком (4.5)

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \qquad (4.7)$$

а вектори $\vec{e}_1$=(1,0,0,...,0), $\vec{e}_2$=(0,1,0,...,0), ..., $\vec{e}_n$=(0,0,...,0,1), що утворюють базис в E_n, мають довжини рівні одиниці.

Зауваження 4.7. З аксіоми 4 для скалярного добутку евклідового простору випливає, що $|\vec{x}|$ існує для будь-якого $\vec{x} \in E_n$.

Теорема 4.12. Для будь-яких двох векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ довільного евклідового простору справедлива рівність

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \le \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2, \qquad (4.8)$$

яка називається нерівністю Коші-Буняковського.

Приклад 2. В евклідовому просторі E_n з скалярним добутком (4.5) нерівність Коші-Буняковського має вигляд

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \le \left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right).$$

Приклад 3. В евклідовому просторі $C[a,b]$ усіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функція $x(t)$ із скалярним добутком (4.6) нерівність Коші-Буняковського має вигляд

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt .$$

Означення 4.13. Кутом φ між двома ненульовими векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ евклідового простору E називається той кут (що змінюється в межах від 0 до π), косинус якого означається співвідношенням

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}} .$$

Дане означення кута коректне, оскільки в силу нерівності Коші-Буняковського (4.8) дріб, що стоїть у правій частині останньої нерівності, за модулем не перевищує одиниці.

Означення 4.14. Два довільних вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ евклідового простору E називаються ортогональними, якщо скалярний добуток цих векторів $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ дорівнює нулю.

Приклад 4. В евклідовому просторі E_n (E^n) з скалярним добутком (4.5) косинус кута між двома ненульовими векторами $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ виражається формулою

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}}, \qquad (4.9)$$

а умова ортогональності векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ запишеться у вигляді

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=0.$$

Вектори $\vec{e}_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0)$, ..., $\vec{e}_n=(0,0,\ldots,0,1)$ попарно ортогональні.

Приклад 5. В евклідовому просторі $C[a,b]$ усіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $x=x(t)$ із скалярним добутком (4.6) косинус кута між двома ненульовими векторами $x=x(t)$ і $y=y(t)$ виражається формулою

$$cos\,\varphi = \frac{\int\limits_a^b x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b y^2(t)dt}},$$

а умова ортогональності векторів x=x(t) і y=y(t) простору $C[a,b]$ запишеться у вигляді

$$\int\limits_a^b x(t)y(t)dt = 0.$$

Задача з розв'язком

Задача. У трикутнику, натягнутому на вектори $\vec{x}$=(-3,15,1,-5) і $\vec{y}$=(1,-5,-2,10) простору E_4 з скалярним добутком (4.5), визначити кути між сторонами трикутника - векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x}$ - $\vec{y}$.

Розв'язок. Маємо $\vec{x}$ - $\vec{y}$=(-4,20,3,-15).

За формулою (4.9) одержуємо

$$cos\left(\vec{x}\hat{,}\vec{y}\right) = \frac{\langle \vec{x}\cdot\vec{y}\rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{-3-75-2-50}{\sqrt{9+225+1+25}\cdot\sqrt{1+25+4+100}} = -\frac{130}{\sqrt{260}\sqrt{130}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$cos\left(\vec{x}\hat{,}\vec{x}-\vec{y}\right) = \frac{\langle \vec{x},\vec{x}-\vec{y}\rangle}{|\vec{x}||\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{12+300+3+75}{\sqrt{260}\sqrt{16+400+9+225}} = \frac{390}{\sqrt{260}\sqrt{650}} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$cos\left(\vec{y}\hat{,}\vec{x}-\vec{y}\right) = \frac{\langle \vec{y},\vec{x}-\vec{y}\rangle}{|\vec{y}||\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{-4-100-6-150}{\sqrt{130}\sqrt{650}} = -\frac{260}{\sqrt{130}\sqrt{650}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 396, 397 визначити кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ простору E_4 з скалярним добутком (4.5).

396. $\vec{x}$=(2,1,3,2), $\vec{y}$=(1,2,-2,1). 397. $\vec{x}$=(1,2,2,3), $\vec{y}$=(3,1,5,1).

398. Знайти довжини сторін трикутника, натягнутого на вектори $\vec{x}$=(2,-1,3,-2) і $\vec{y}$=(3,1,5,1), простору E_4 з скалярним добутком (4.5). Визначити кути між сторонами трикутника - векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x}$ - $\vec{y}$. Які з цих кутів природно вважати внутрішніми кутами трикутника, які зовнішніми?

399. Як зміниться кут між ненульовими векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$, якщо помножити:
   а) вектор $\vec{x}$ на додатне число;
   б) вектор $\vec{x}$ на від'ємне число;
   в) обидва вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ на від'ємне число?

400. Довести, що якщо вектори $\vec{x},\vec{y},\ldots,\vec{z}$ - попарно ортогональні, то для будь-яких чисел λ, μ, ..., ν вектори $\lambda\vec{x},\mu\vec{y},\ldots,\nu\vec{z}$ також будуть попарно ортогональні.

401. Довести, що якщо вектор $\vec{x}$ ортогональний до кожного із векторів $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_l$, то він ортогональний і до будь-якої лінійної комбінації цих векторів.
402. Довести, що квадрат діагоналі прямокутного n-вимірного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер, що виходять з однієї вершини.

4.4 Ортонормований базис. Ортогональне перетворення базису. Ортогональна матриця

Означення 4.15. Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють ортонормований базис цього простору, якщо ці вектори попарно ортогональні і модуль кожного із них дорівнює одиниці, тобто якщо

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = \begin{bmatrix} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Приклад. В евклідовому просторі E_n з скалярним добутком (4.5) вектори

$$\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$
$$.\quad .\quad .$$
$$\vec{e}_n = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1)$$

утворюють ортонормований базис цього простору.

Теорема 4.13. В усякому n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортонормований базис.

Алгоритм побудови за даною системою n лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ системи попарно ортогональних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, довжина кожного з яких дорівнює одиниці, має вигляд:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|};$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \text{ де } \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1;$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}, \text{ де } \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \langle \vec{a}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 - \langle \vec{a}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1;$$

$$.\quad .\quad .$$

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{b}_n}{|\vec{b}_n|}, \text{ де } \vec{b}_n = \vec{a}_n - \langle \vec{a}_n, \vec{e}_{n-1} \rangle \vec{e}_{n-1} - \ldots - \langle \vec{a}_n, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1.$$

Указаний алгоритм називається процесом ортогоналізації лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ - два ортонормованих базиси в E_n (або E^n) і нехай

$$\vec{e}_1' = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + \ldots + p_{n1}\vec{e}_n = \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \ldots \\ p_{n1} \end{pmatrix};$$

$$\vec{e}_2' = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + \ldots + p_{n2}\vec{e}_n = \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \ldots \\ p_{n2} \end{pmatrix};$$

$$. \quad . \quad .$$

$$\vec{e}_n' = p_{1n}\vec{e}_1 + p_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + p_{nn}\vec{e}_n = \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \ldots \\ p_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто перехід від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ задається матрицею

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 4.16. Перехід від одного ортонормованого базису до іншого називається ортогональним перетворенням базису.

Означення 4.17. Квадратна матриця A називається ортогональною, якщо вона невироджена і $A^{-1}=A^{T}$.

Теорема 4.14. Квадратна матриця P порядку n є ортогональною тоді і тільки тоді, коли вона є матрицею ортогонального перетворення базису в E_n (або E^n).

Теорема 4.15. Для елементів ортогональної матриці справедливі співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}p_{kj} = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{при } \; i = k, \\ 0 & \text{при } \; i \neq k; \end{array}\right.$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}p_{ik} = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{при } \; j = k, \\ 0 & \text{при } \; j \neq k, \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортонормована система векторів тривимірного евклідового простору з скалярним добутком (4.5). Показати, що система векторів

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{3}\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right),$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{3}\left(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right),$$

$$\vec{a}_3 = \frac{1}{3}\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right)$$

буде також ортонормованою.

Розв'язок. Для розв'язання задачі необхідно довести, що норма кожного з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ дорівнює одиниці і скалярний добуток кожних двох векторів дорівнює нулю.

З умови ортонормованості даної системи векторів маємо:

$$\left|\vec{e}_1\right| = \left|\vec{e}_2\right| = \left|\vec{e}_3\right| = 1;$$

$$\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \right\rangle = \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\rangle = 0;$$

$$\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right\rangle = \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \right\rangle = 1.$$

Використавши ці рівності при обчисленні скалярних добутків $\left\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\rangle, \left\langle \vec{a}_1, \vec{a}_3 \right\rangle, \left\langle \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\rangle$, одержимо: $\left\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\rangle = \frac{1}{9}(4\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right\rangle - 2\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right\rangle +$
$+ 4\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \right\rangle + 4\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\rangle - 2\left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right\rangle + 4\left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\rangle - 2\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\rangle - 2\left\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \right\rangle) =$
$= \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0;$

$$\left\langle \vec{a}_1, \vec{a}_3 \right\rangle = \frac{1}{9}(2 - 4 + 2) = 0;$$

$$\left\langle \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\rangle = \frac{1}{9}(2 + 2 - 4) = 0.$$

Знаходимо довжину кожного із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\left|\vec{a}_1\right| = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 4 + 1} = 1; \quad \left|\vec{a}_2\right| = 1; \quad \left|\vec{a}_3\right| = 1.$$

Таким чином, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ підпорядковані умовам (4.10) і, отже, утворюють ортонормований базис.

Задача 2. У просторі E_3 з скалярним добутком (4.5) дано два лінійно незалежних вектори $\vec{a}_1 = (1,\ 2,\ 0)$ і $\vec{a}_2 = (0,\ -3,\ 1)$. Побудувати ортонормований базис в лінійній оболонці цих векторів.

Розв'язок. Застосовуючи процес ортогоналізації, одержуємо:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{(1,\ 2,\ 0)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right);$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \quad \text{де } \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2 \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1.$$

Знайдемо $\vec{b}_2$. Маємо

$$\langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle = (0,\ -3,\ 1)\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right) = -\frac{6}{\sqrt{5}};$$

$$\langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right);$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = (0,\ -3,\ 1) + \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right) = \left(\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5},\ 1\right).$$

Звідси

$$\vec{e}_2 = \frac{\frac{1}{5}(6,\ -3,\ 5)}{\frac{1}{5}\sqrt{36+9+25}} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6,\ -3,\ 5) = \left(\frac{6}{\sqrt{70}},\ -\frac{3}{\sqrt{70}},\ \frac{5}{\sqrt{70}}\right).$$

Задачі для розв'язування

403. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - ортонормований базис тривимірного евклідового простору. Показати, що система векторів $\vec{e}_1' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3$; $\vec{e}_2' = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3$; $\vec{e}_3' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3$ також буде ортонормованою.

404. Вектори $1, t, t^2$ утворюють базис у просторі P_2 многочленів від t степеня, не вище другого, простору $C[-1,1]$. Показати, що система векторів $1,\ t,\ t^2 - \frac{1}{3}$ утворює ортогональний базис цього простору.

405. Многочлени $1, t, t^2$ утворюють базис у просторі P_2 многочленів від t степеня, не вище другого, простору $C[0,\ 1]$. Показати, що многочлени 1, $\sqrt{3}(2t-1)$, $5(6t^2-6t+1)$ утворюють ортогональний базис цього простору.

В задачах №№ 406, 407 дано лінійно незалежну систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Побудувати ортонормований базис в лінійній оболонці цих векторів, використовуючи процес ортогоналізації.

406. $\vec{a}_1$=(0, -1, 2),
$\vec{a}_2$=(-1, 3, 4),
$\vec{a}_3$=(2, 1, 3).

407. $\vec{a}_1$=(1, 0, 1),
$\vec{a}_2$=(2, 1, 2),
$\vec{a}_3$=(0, 1, 1).

В задачах №№ 408, 409 дано лінійно незалежну систему векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Знайти ортонормований базис в лінійній оболонці цих векторів.

408. $\vec{a}_1$=(-1, 0, 2), $\vec{a}_2$=(4, -1, 3).

409. $\vec{a}_1$=(-1, 1, 1), $\vec{a}_2$=(2, -1, 0).

410. Знайти ортогональний базис підпростору, натягнутого на систему векторів $\vec{a}_1$=(1, 2, 2, -1), $\vec{a}_2$=(1, 1, -5, 3), $\vec{a}_3$=(3, 2, 8, -7).

411. Знайти ортогональний базис підпростору, натягнутого на вектори $\vec{a}_1$=(1, 0, 2, 1), $\vec{a}_2$=(2, 1, 2, 3), $\vec{a}_3$=(0, 1, -2, 1).

4.5. Взаємні базиси в E_n. Контраваріантні і коваріантні координати вектора та зв'язок між ними. Зміна координат вектора при переході до нового базису

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ - довільний базис в E_n (не обов'язково ортонормований).

<u>*Твердження 4.1.*</u> Сукупність векторів $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$, означених рівностями

$$\left\langle \vec{e}_i \vec{e}^{\,j} \right\rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \quad (i, j = \overline{1, n}) \end{cases} \tag{4.11}$$

утворюють в E_n базис.

Означення 4.18. Базис $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$ називається взаємним до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

<u>*Твердження 4.2*</u>. Для вибраного в E_n базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ взаємний базис $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$ визначається однозначно.

<u>*Твердження 4.3.*</u> Взаємним до взаємного базису $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$ є початковий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Означення 4.19. Базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$ називаються взаємними.

Зауваження 4.8. Для ортонормованого базису $\vec{e}_i = \vec{e}^{\,i}, \ i = \overline{1, n}$.

В цьому випадку взаємні базиси збігаються.

Зауваження 4.9. Взаємні базиси в E_2 визначаються за допомогою рівностей (4.11) при i, j = 1, 2. На рис. 4.1 наведений приклад взаємних базисів в E_2.

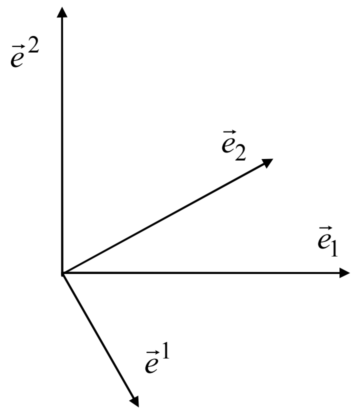

Рис. 4.1

Нехай $\vec{x}$ - довільний вектор E_n. Тоді $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n =$ $= x_1\vec{e}^1 + x_2\vec{e}^2 + \ldots + x_n\vec{e}^n$.

Означення 4.20. Координати $x^1, x^2, \ldots, x^n$ вектора $\vec{x}$ в початковому базисі називається контраваріантними координатами $\vec{x}$, а координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ того ж вектора у взаємному базисі $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \ldots, \vec{e}^n$ називаються коваріантними координатами $\vec{x}$.

У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормований базис $x_i = x^i$ $(i = \overline{1,n})$.

Означення 4.21. Матриця $G = \|g_{ij}\|$, $i, j = \overline{1,n}$, де $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$, називається метричною матрицею в E_n, а її елементи g_{ij} - метричними коефіцієнтами базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в E_n.

<u>*Твердження 4.4*</u>. Матриця $G^* = \|g^{ij}\|$, $i, j = \overline{1,n}$, де $g^{ij} = \langle \vec{e}^i, \vec{e}^j \rangle$ є оберненою до матриці G, тобто $G^* = G^{-1}$.

Зауваження 4.10. У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - ортонормований базис матриця G є одиничною.

<u>*Твердження 4.5.*</u> Коваріантні і контраваріантні координати вектора $\vec{x}$ зв'язані рівностями

$$(x_1 x_2 \ldots x_n) = (x^1 x^2 \ldots x^n)G, \quad (x^1 x^2 \ldots x^n) = (x_1 x_2 \ldots x_n)G^{-1}.$$

Нехай в E_n поряд з даним базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ узято новий базис $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n$, причому формула переходу від $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ до $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n$ має вигляд

$$(\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)C \qquad (4.12)$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ . & . & . & . \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Зауваження 4.11. Запис елемента c_{ij} матриці C (п.2.2.3) в вигляді c^i_j більш зручний при скороченому запису підсумовування, який буде введений в п.9.2.

<u>*Твердження 4.6*</u>. Якщо $\dot{\vec{e}}^1, \dot{\vec{e}}^2, \ldots, \dot{\vec{e}}^n$ - базис, взаємний до $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n$, то

$$(\dot{\vec{e}}^1, \dot{\vec{e}}^2, \ldots, \dot{\vec{e}}^n) = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \ldots, \vec{e}^n)D, \qquad (4.13)$$

де

$$D = \left(C^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \ldots & d_1^n \\ d_2^1 & d_2^2 & \ldots & d_2^n \\ . & . & . & . \\ d_n^1 & d_n^2 & \ldots & d_n^n \end{pmatrix}.$$

<u>*Твердження 4.7.*</u> Якщо $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$ - контраваріантні, а $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$ коваріантні координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n$, то

$$(\dot{x}_1 \dot{x}_2 \ldots \dot{x}_n) = (x_1 x_2 \ldots x_n)C, \qquad (4.14)$$

$$(\dot{x}^1 \dot{x}^2 \ldots \dot{x}^n) = (x^1 x^2 \ldots x^n)D. \qquad (4.15)$$

Зауваження 4.12. У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - ортонормований базис, а C - ортогональне перетворення, то $C=D$.

Зауваження 4.13. Із формул (4.12) і (4.14) випливає, що матриці перетворення початкового базису і коваріантних координат вектора $\vec{x}$ збігаються.

Із формули (4.15) випливає, що перетворення контраваріантних координат вектора $\vec{x}$ здійснюється з допомогою оберненої матриці C^{-1}. Дійсно

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Цим пояснюється назва координат, що використовує латинські слова *co* - спільно, *contra* - напроти, *vario* - змінюючись. Зауважимо, що коваріантні і контраваріантні координати вектора будуть розглядатися в цій та 9-й главах.

Задачі з розв’язком

Задача 1. Показати, що для $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 \in E_3$ $\quad x^1 = \left\langle \vec{x}, \vec{e}^1 \right\rangle$, $x^2 = \left\langle \vec{x}, \vec{e}^2 \right\rangle$, $x^3 = \left\langle \vec{x}, \vec{e}^3 \right\rangle$.

Розв'язок. Помноживши обидві частини рівності $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$ скалярно на $\vec{e}^1$, одержимо

$$\left\langle \vec{x}, \vec{e}^1 \right\rangle = x^1\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}^1 \right\rangle + x^2\left\langle \vec{e}_2, \vec{e}^1 \right\rangle + x^3\left\langle \vec{e}_3, \vec{e}^1 \right\rangle.$$

Звідси, враховуючи рівності $\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}^1 \right\rangle = 1,\ \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}^1 \right\rangle = 0,\ \left\langle \vec{e}_3, \vec{e}^1 \right\rangle = 0$, що випливають з (4.11), приходимо до першої рівності в умові задачі.

Аналогічно

$$\left\langle \vec{x}, \vec{e}^2 \right\rangle = x^1\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}^2 \right\rangle + x^2\left\langle \vec{e}_2, \vec{e}^2 \right\rangle + x^3\left\langle \vec{e}_3, \vec{e}^2 \right\rangle = x^2;$$

$$\left\langle \vec{x}, \vec{e}^3 \right\rangle = x^1\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}^3 \right\rangle + x^2\left\langle \vec{e}_2, \vec{e}^3 \right\rangle + x^3\left\langle \vec{e}_3, \vec{e}^3 \right\rangle = x^3.$$

Задача 2. Відносно базису з метричними коефіцієнтами $g_{11}=4$, $g_{22}=3$, $g_{12}=-3$ дано вектор $\vec{x}=(1,2)$. Знайти координати x_1, x_2 цього вектора у взаємному базисі.

Розв'язок. Використовуючи твердження 4.5, маємо

$$(x_1 x_2) = (x^1 x^2)G = (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = (-2 \quad 3),$$

$$x_1=-2,\ x_2=3.$$

Задачі для розв'язування

412. Показати, що $x_1 = \left\langle \vec{x}, \vec{e}_1 \right\rangle,\ x_2 = \left\langle \vec{x}, \vec{e}_2 \right\rangle,\ x_3 = \left\langle \vec{x}, \vec{e}_3 \right\rangle$.
413. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ з метричними коефіцієнтами $g_{11}=4$, $g_{12}=3$, $g_{22}=9$ дано вектор $\vec{x}=(2,1)$. Знайти координати x_1, x_2 цього вектора у взаємному базисі.
414. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дано вектор $\vec{x}=(-5,2)$. Знайти координати x_1, x_2 цього вектора у взаємному базисі, знаючи довжини базисних векторів $|\vec{e}_1| = 3,\ |\vec{e}_2| = 4$ і кут між ними $\varphi=2\pi/3$.
415. Знаючи довжини базисних векторів $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ і кути між ними $\left(\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}\right) = \left(\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3}\right) = \left(\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}\right) = \pi/3$, знайти метричні коефіцієнти g^{ij} базису $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
416. Знаючи метричні коефіцієнти g_{ij} базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ знайти координати векторів цього базису у взаємному з ним базисі $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$.
417. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ з метричними коефіцієнтами $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{12}=g_{13}=g_{23}=1/2$ дано вектор $\vec{x}=(1,0,2)$. Знайти координати x_1, x_2, x_3 цього вектора у взаємному базисі.
418. Знаючи довжини базисних векторів $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ і кут $\varphi=\pi/4$ між ними, знайти координати векторів $\vec{e}^1, \vec{e}^2$ базису, взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

419. Знаючи метричні коефіцієнти g_{11}=2, g_{22}=4, g_{12}=-2 базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, знайти:

1) метричні коефіцієнти g^{11}, g^{12}, g^{22} базису $\vec{e}^1, \vec{e}^2$, взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;
2) координати векторів $\vec{e}^1, \vec{e}^2$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

420. Знаючи метричні коефіцієнти g_{11}=4, g_{22}=4, g_{33}=4, g_{12}=2, g_{13}=2, g_{23}=2 базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ знайти:

1) метричні коефіцієнти g^{ij} базису $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$, взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$;
2) координати векторів базису $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$, взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

421. Довжини векторів базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дорівнюють 1, а кути між ними дорівнюють $\pi/4$. Знайти:

1) метричні коефіцієнти g^{ij} базису $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$, взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$;
2) координати векторів $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ базису, взаємного з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

4.6. **Вираження скалярного добутку через координати векторів-співмножників в довільному базисі E_n**

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ - базис в E_n, $\vec{x}, \vec{y}$ - довільні вектори в E_n.

Твердження 4.8.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j = (x^1 \quad ... \quad x^n) G \begin{pmatrix} y^1 \\ . \\ . \\ . \\ y^n \end{pmatrix},$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y_i = (x^1 \quad ... \quad x^n) \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} x_i y_j = (x_1 \quad ... \quad x_n) G^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix},$$

де

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n = x_1\vec{e}^{\,1} + x_2\vec{e}^{\,2} + \ldots + x_n\vec{e}^{\,n},$$
$$\vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \ldots + y^n\vec{e}_n = y_1\vec{e}^{\,1} + y_2\vec{e}^{\,2} + \ldots + y_n\vec{e}^{\,n}.$$

Наслідок 4.12.

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^i x^j = \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix},$$

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix},$$

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}x_i x_j = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} G^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Наслідок 4.13. Кут φ між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ визначається за допомогою формул

$$cos\,\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^i y^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^i x^j} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}y^i y^j}},$$

$$cos\,\varphi = \frac{x^1 y_1 + x^2 y_2 + \ldots + x^n y_n}{\sqrt{x^1 x_1 + x^2 x_2 + \ldots + x^n x_n} \cdot \sqrt{y^1 y_1 + y^2 y_2 + \ldots + y^n y_n}},$$

$$cos\,\varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}x_i y_j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}x_i x_j} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}y_i y_j}}.$$

У випадку ортонормованого базису формули для $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $|\vec{x}|$, $cos\varphi$ мають вигляд (4.5), (4.7), (4.9) відповідно.

Задачі з розв'язком

Задача 1. Знайти в E_2 метричну матрицю і скалярний добуток векторів $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ і $\vec{y} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$, знаючи, що $|\vec{e}_1|=1$ і $|\vec{e}_2|=2$ і кут між векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ дорівнює $\pi/3$.

Розв'язок. Оскільки $g_{ii} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = |\vec{e}_i|^2$, а $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = |\vec{e}_i||\vec{e}_j| \cos\varphi_{ij}$, де φ_{ij} - кут між векторами $\vec{e}_i$ і $\vec{e}_j$, ij=1, 2, то

$$g_{11} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = |\vec{e}_1|^2 = 1,\ g_{12} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 1 \cdot 2 \cos\pi/3 = 1,\ g_{22} = |\vec{e}_2| = 4.$$

Маємо

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -51.$$

Задача 2. Базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ довільної системи координат задовольняють умовам

$$|\vec{e}_1| = 1,\ |\vec{e}_2| = 2,\ |\vec{e}_3| = 1,\ \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \pi/3,\ \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/2.$$

Знаючи координати вершин $A_1(1,1,0)$, $A_2(-1,0,1)$, $A_3(0,1,-2)$, $A_4(1,3,2)$ знайти:

1) довжину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;
2) кути між ребрами A_1A_2 і A_1A_3, A_1A_2 і A_1A_4, A_1A_3 і A_1A_4.

Розв'язок. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$. Маємо

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-2,-1,1),\ \overrightarrow{A_1A_3} = (-1,0,-2),\ \overrightarrow{A_1A_4} = (0,2,2).$$

Оскільки

$$g_{11} = |\vec{e}_1|^2 = 1, g_{22} = |\vec{e}_2|^2 = 4, g_{33} = |\vec{e}_3|^2 = 1, g_{12} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 1 \cdot 2 \cdot \cos\pi/3 = 1,$$

$$g_{13} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 1 \cdot 1 \cdot \cos\pi/2 = 0, g_{23} = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot \cos\pi/2 = 0$$

і $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то за формулою

$$|\vec{x}|^2 = \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}$$

маємо

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=13.$$

Отже,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{13}\,.$$

Аналогічно знаходимо

$$\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{5},\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=2\sqrt{5}\,.$$

Кути між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 знайдемо за формулою

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_3}\right)=\frac{\left\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right\rangle}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}.$$

Скалярний добуток

$$\left\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right\rangle=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=3+0-2=1.$$

Тоді

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_3}\right)=\frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}}.$$

Аналогічно

$$\left\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4}\right\rangle=-10,\ \left\langle\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}\right\rangle=-6$$

і $cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}},\ cos\left(\overrightarrow{A_1A_3}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)=-\dfrac{3}{5}.$

Задача 3. Відносно ортонормованого базису дано вектори $\vec{a}$=(-1,1,1,-1) і $\vec{b}$=(0,3,0,0). Знайти скалярний добуток цих векторів, їх довжини і кут між ними.

Розв’язок. Скалярний добуток знайдемо за формулою

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^i y_i\,.$$

Оскільки у випадку ортонормованого базису взаємні базиси збігаються, то коваріантні і контраваріантні координати теж збігаються, тому

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^i y^i,\ |\vec{x}|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i x^i=\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2.$$

Звідки

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (-1)\cdot 0 + 1\cdot 3 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 = 3,$$

$$|\vec{a}|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 4,\ |\vec{a}| = 2,$$

$$|\vec{b}|^2 = 0^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 = 9,\ |\vec{b}| = 3.$$

Нарешті з формули $cos\,\varphi = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}$, дістанемо $cos\,\varphi = \dfrac{3}{3\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$. Звідки $\varphi = \pi/3$.

Задачі для розв'язування

422. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ і $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, знаючи, що $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ і кут між векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ дорівнює $\pi/4$.
423. Вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ утворюють кут $\alpha = \pi/6$. Знаючи, що $|\vec{e}_1| = 3, |\vec{e}_2| = 4$, обчислити скалярний добуток векторів $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ і $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
424. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ і $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=1$, $g_{12}=1$, $g_{22}=4$ базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.
425. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=1$, $g_{12}=5/16$, $g_{22}=1$ базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.
426. Знайти косинус кута φ між векторами $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ і $\vec{b} = 3\vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=1$, $g_{12}=-1/4$, $g_{22}=1$ базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.
427. Знайти косинуси кутів α і β, які вектор $\vec{a} = (x, y)$ утворює з базисними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти g_{11}, g_{12}, g_{22} цього базису.
428. Знайти довжину вектора $\vec{a}=(7,-8)$, якщо $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.
429. Довжини векторів базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дорівнюють 1, кути між ними дорівнюють $\pi/3$. Знайти довжини векторів базису $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}$, взаємного з даним, і кути між ними.
430. Дано вектор $\vec{a}=(7,-8)$. Знайти вектор $\vec{b}$, що має довжину 1, якщо він перпендикулярний вектору $\vec{a}$ і напрямлений так, щоб пара векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мала додатну орієнтацію, якщо $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.
431. Знаючи довжини базисних векторів $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$ і кут між ними $\varphi = \pi/3$, знайти довжину вектора $\vec{a}=(-4,6)$.
432. Довжини базисних векторів афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 4$, $|\vec{e}_2| = 2$, а кут між ними $\varphi = \pi/3$. Відносно цієї системи координат задані вершини трикутника $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$. Визначити довжини сторін AB і AC цього трикутника і кут A між ними.

433. Довжини базисних векторів афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$ і кут між ними $\alpha=2\pi/3$. Відносно цієї системи координат дано вершини трикутника $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$. Знайти довжини сторін AB і BC цього трикутника і кут B між ними.

434. Довжини базисних векторів афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{3}$, а кут між ними $\alpha=5\pi/6$. Відносно цієї системи координат дано два вектори $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(2,2)$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

435. Відносно афінної системи координат дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$, довжини сторін якого $|AB| = \sqrt{52},\ |AC| = 4,\ |BC| = \sqrt{28}$. Визначити довжини базисних векторів цієї системи координат і кут між ними.

436. Відносно афінної системи координат дано прямокутний трикутник ABC з вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,2)$, прямим кутом при вершині C і катетами $|AC| = 2,\ |BC| = 3$. Визначити довжини базисних векторів цієї афінної системи і кут між ними.

437. Відносно афінної системи координат дано прямокутний трикутник ABC з вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,2)$, прямим кутом при вершині C і катетами $|AC| = 2,\ |BC| = 3$. Визначити довжини сторін $A'B'$ і $A'C'$ трикутника $A'B'C'$ і кут A' між ними, якщо вершини цього трикутника мають координати $A'(1,1)$, $B'(2,2)$, $C'(2,4)$.

438. Знаючи довжини базисних векторів $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ і кут φ між ними, знайти:

1) довжину вектора $\vec{a} = (x, y)$;

2) кут α між векторами $\vec{a} = (x^1, y^1)$ і $\vec{b} = (x^2, y^2)$;

3) площу S паралелограма, побудованого на парі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

439. Знайти косинуси кутів α і β, які вектор $\vec{a} = (x, y)$ утворює з базисними векторами, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, а кут між векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дорівнює $\varphi=\pi/3$.

440. Виразити через метричні коефіцієнти $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ довжини базисних векторів і кути $\alpha_{ij} = \widehat{\vec{e}_i \vec{e}_j}$ між ними.

441. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$ і $\vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{ij} = \left\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ 1/2 \text{ при } i \neq j \end{array}\right.$ базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

442. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ в базисі з метричними коефіцієнтами $g_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ \sqrt{3}/2 \text{ при } i \neq j. \end{array}\right.$

443. Знайти кут φ між векторами $\vec{a}=(1,0,1)$ і $\vec{b}=(-1,1,-1)$ в базисі з метричними коефіцієнтами $g_{ij}=\begin{cases}1 \text{ при } i=j,\\ 1/\sqrt{2} \text{ при } i\neq j.\end{cases}$

444. Знайти косинуси кутів α_1, α_2, α_3, які вектор $\vec{a}=\left(x^1,x^2,x^3\right)$ утворює з базисними векторами $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, знаючи метричні коефіцієнти g_{ij} цього базису.

445. Знайти косинуси кутів φ_1, φ_2, φ_3, утворених вектором $\vec{a}=\left(x^1,x^2,x^3\right)$ з базисними векторами $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, якщо $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\omega_{12}$, $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\omega_{23}$, $\widehat{\vec{e}_3\vec{e}_1}=\omega_{31}$.

446. Базисні вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ довільної системи координат задовольняють умовам $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3}=\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\pi/3$. Знаючи координати вершин піраміди $A_1(0,1,1)$, $A_2(1,0,-1)$, $A_3(1,1,-1)$, $A_4(2,-1,2)$ знайти:
1) довжини ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 піраміди;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

В задачах №№ 447, 448 знайти скалярний добуток векторів, один з яких заданий своїми координатами x^1, x^2, x^3 в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, а другий - координатами y_1, y_2, y_3 в базисі $\vec{e}^1,\vec{e}^2,\vec{e}^3$, взаємному з базисом $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

447. $\vec{x}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+4\vec{e}_3-\vec{e}_4$,
$\vec{y}=\vec{e}^1-2\vec{e}^2+\vec{e}^3+\vec{e}^4$.

448. $\vec{x}=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3+2\vec{e}_4$,
$\vec{y}=\vec{e}^1-\vec{e}^2+3\vec{e}^3-2\vec{e}^4$.

449. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$=(1,-1,2,-2) і $\vec{b}$=(2,0,-1,1) і кут φ між ними, знаючи метричні коефіцієнти $g_{ij}=\begin{cases}2 \text{ при } i=j,\\ 1 \text{ при } i\neq j,\end{cases}$ i,j=1,2,3,4 базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$.

450. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{x}=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3-\vec{e}_4$ і $\vec{y}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4$ і кут між ними, знаючи довжини базисних векторів $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=|\vec{e}_4|=\sqrt{2}$ і кути між ними $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3}=\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_4}=$ $=\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_4}=\widehat{\vec{e}_3\vec{e}_4}=\pi/4$.

451. Нехай $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ і $\vec{e}^1,\vec{e}^2,\vec{e}^3$ - взаємні базиси. Знайти кути θ_i між векторами $\vec{e}_i$ і $\vec{e}^i$ (i=1,2,3), знаючи метричні коефіцієнти g_{ij} базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

452. Нехай $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ і $\vec{e}^1,\vec{e}^2,\vec{e}^3$ - взаємні базиси. Знайти кути θ_i між векторами $\vec{e}_i$ і $\vec{e}^i$ (i=1,2,3), якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \omega_{12}$, $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \omega_{23}$, $\widehat{\vec{e}_3\vec{e}_1} = \omega_{31}$.

В усіх задачах №№ 453-458 припускається, що координати векторів задані відносно ортонормованого базису.

453. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$=(1,-1,1,-1) і $\vec{b}$=(0,0,3,0), їх довжини і кут між ними.

В задачах №№ 454-457 знайти кут між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

454. $\vec{a}_1$=(2,3,1,6), $\vec{a}_2$=(3,2,-6,-1).
455. $\vec{a}_1$=(1,2,1,2), $\vec{a}_2$=(2,1,-2,-1).
456. $\vec{a}_1$=(1,1,1,1), $\vec{a}_2$=(1,1,3,-5).
457. $\vec{a}_1$=(1,0,2,2), $\vec{a}_2$=(0,1,1,-1).
458. Знайти чотиривимірний вектор, що ортогональний до векторів (1,1,1,1), (1,-1,-1,1), (2,1,1,3) і має довжину 1.

4.7. Визначник Грама. Об'єм паралелепіпеда в E_n

Нехай $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ - вектори в E_n.

Означення 4.22. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle & ... & \langle\vec{a}_1,\vec{a}_k\rangle \\ . & . & . \\ \langle\vec{a}_k,\vec{a}_1\rangle & ... & \langle\vec{a}_k,\vec{a}_k\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Грама для векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$.

<u>Приклад 1</u>. Метрична матриця G є матрицею Грама для базисних векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ в E_n.

Дійсно,

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & ... & g_{1n} \\ . & . & . \\ g_{n1} & ... & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle & ... & \langle\vec{e}_1,\vec{e}_n\rangle \\ . & . & . \\ \langle\vec{e}_n,\vec{e}_1\rangle & ... & \langle\vec{e}_n,\vec{e}_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Означення 4.23. Визначник

$$\Gamma(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k) = \begin{vmatrix} \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle & ... & \langle\vec{a}_1,\vec{a}_k\rangle \\ . & . & . \\ \langle\vec{a}_k,\vec{a}_1\rangle & ... & \langle\vec{a}_k,\vec{a}_k\rangle \end{vmatrix}$$

називається визначником Грама для векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$.

<u>Приклад 2.</u>

$$\Gamma(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n) = |G|,$$

де $|G|$ - визначник G.

<u>*Твердження 4.9*</u>.

$$\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k) \geq 0.$$

При цьому $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)=0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ - лінійно залежні.

<u>*Твердження 4.10*</u>. Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in E_2$, то $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = S^2$, де S - площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

<u>*Твердження 4.11*</u>. Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in E_3$, то $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = V^2$, де V - об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в E_3.

Означення 4.24. Паралелепіпедом, побудованим на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ в E_n, для яких точка M_0 є спільним початком, називається множина точок M, для кожної з яких $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \lambda_1 \vec{a}_1 + ... + \lambda_k \vec{a}_k$, де $\lambda_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,k}$, O - початок координат в E_n.

Означення 4.25. Об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ $(k \leq n)$ в E_n з початком в точці M_0, називається величина V, що визначається рівністю $V=\sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)}$.

Зауваження 4.14. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ в E_n, не залежить від вибору спільного початку векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$.

<u>*Приклад 3*</u>. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в E_n, обчислюється за формулою

$$V_{\text{баз}}=\sqrt{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)} = \sqrt{|G|}.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Показати, що площа S паралелограма (рис.4.2), побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ в E_2 обчислюється за формулою

$$S = \sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}.$$

Розв'язок.

$$S=|\vec{a}_1||\vec{a}_2| \sin\omega = |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\sqrt{1-\cos^2\omega} =$$

$$= \sqrt{|\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2 - (|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\omega)^2} =$$

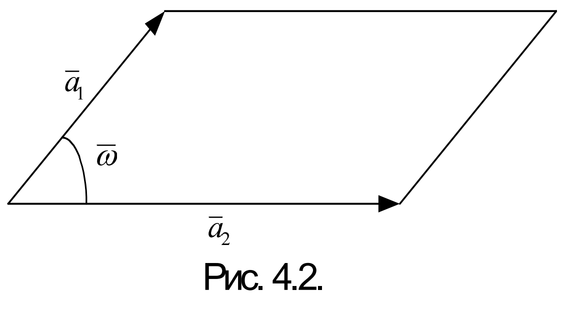

Рис. 4.2.

$$=\sqrt{\begin{vmatrix} |\vec{a}_1|^2 & |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\omega \\ |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\omega & |\vec{a}_2|^2 \end{vmatrix}} =$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \\ \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle & \vec{a}_2^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}.$$

Задача 2. В умовах задачі 2 п.4.6 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язок. Об'єм піраміди дорівнює *1/6* об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3},\ \overrightarrow{A_1A_4}$.

Позначимо $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a},\ \overrightarrow{A_1A_3} = \vec{b},\ \overrightarrow{A_1A_4} = \vec{c}$. Тоді $|\vec{a}| = \sqrt{13},\ |\vec{b}| = \sqrt{5},\ |\vec{c}| = 2\sqrt{5}$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1,\ \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = -10,\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = -6.$

$$V^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 1 & 5 & -6 \\ -10 & -6 & 20 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 13 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \\ -5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 432.$$

$$V = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}.$$

Отже, об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює $(1/6)V = 2\sqrt{3}$.

Задачі для розв'язування

459. Знайти площу S паралелограма, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$ базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.
460. Знайти площу S паралелограма, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, якщо $|\vec{e}_1| = 2,\ |\vec{e}_2| = 3$ і кут між ними $\omega = (3/4)\pi$.
461. Знайти об'єм орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=3$, $g_{22}=13$, $g_{33}=3$, $g_{12}=5$, $g_{13}=-1$, $g_{23}=-5$ базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
462. Знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=2$, $g_{22}=2$, $g_{33}=2$, $g_{12}=g_{13}=g_{23}=1$ базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах.
463. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 2,\ \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/3.$
464. Довжини векторів базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дорівнюють $2\sqrt{3}$, а кути між ними дорівнюють $\pi/6$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.
465. Обчислити об'єм V паралелепіпеда, знаючи довжини його ребер $|\overrightarrow{OA}| = 2,\ |\overrightarrow{OB}| = 1,\ |\overrightarrow{OC}| = 3$, що виходять із однієї вершини O, і плоскі кути між ними $\widehat{AOB} = \pi/2$, $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} = \pi/3$.

466. В умовах задачі № 446 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

467. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, що виходять з однієї точки, є ребрами n-вимірного паралелепіпеда. Знайти висоту цього паралелепіпеда, приймаючи за його основу (n-1)-вимірний паралелепіпед, побудований на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$.

468. Обчислити об'єм V ïàðàëåëåï³ïåäà, çíàþ÷è äîâæèíè éîãî ðåáåð $\left|\vec{OA}\right| = a,\ \left|\vec{OB}\right| = b,\ \left|\vec{OC}\right| = c$ ³ êóòè $B\hat{O}C = \alpha,\ C\hat{O}A = \beta,\quad A\hat{O}B = \gamma$ ì³æ íèìè.

4.8. Означення векторного ддобутку в E_n

Означення 4.26. Будемо говорити, що упорядкована сукупність із n лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ в E_n має ту ж орієнтацію, що і сукупність базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, якщо визначник із координат цих векторів в цьому базисі є додатна величина, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{(1)}^1 & a_{(1)}^2 & \ldots & a_{(1)}^n \\ . & . & . & . \\ a_{(n)}^1 & a_{(n)}^2 & \ldots & a_{(n)}^n \end{vmatrix} > 0,$$

і протилежну орієнтацію, якщо цей визначник від'ємна величина.

Зауваження 4.15. Якщо визначник із координат векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ дорівнює 0, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ лінійно залежні. Будемо вважати, що у цьому випадку упорядкована сукупність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ не має орієнтації.

Означення 4.27. Векторним добутком векторів $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n-1} \in E_n \ (n \geq 3)$ називається вектор $\vec{c}$, який позначається символом $\left[\vec{a}_1 ... \vec{a}_{n-1}\right]$ і задовольняє трьом умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $\sqrt{\Gamma\left(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n-1}\right)}$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний кожному із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$;

3) вектор $\vec{c}$, якщо $\vec{c} \neq \vec{0}$, напрямлений так, що упорядкована сукупність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \ \vec{c}$ має ту ж орієнтацію, що і сукупність базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в E_n.

Зауваження 4.16. Для векторного добутку в E_n виконуються властивості, аналогічні властивостям для векторного добутку в E_3. Зокрема, необхідною і достатньою умовою лінійної залежності векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ є рівність нулю їх векторного добутку.

Твердження 4.12. Якщо

$$\vec{a}_1 = a_{(1)}^1 \vec{e}_1 + ... + a_{(1)}^n \vec{e}_n = a_1^{(1)} \vec{e}^{\,1} + ... + a_n^{(1)} \vec{e}^{\,n},$$

$$. \quad . \quad .$$

$$\vec{a}_{n-1} = a_{(n-1)}^1 \vec{e}_1 + ... + a_{(n-1)}^n \vec{e}_n = a_1^{(n-1)} \vec{e}^{\,1} + ... + a_n^{(n-1)} \vec{e}^{\,n},$$

то

$$\left[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{n-1}\right] = \sqrt{|G|}\begin{vmatrix} a^1_{(1)} & a^2_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ . & . & . & . \\ a^1_{(n-1)} & a^2_{(n-1)} & \ldots & a^n_{(n-1)} \\ \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \ldots & \vec{e}^n \end{vmatrix} = \sqrt{|G^{-1}|}\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ . & . & . & . \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \ldots & a_n^{(n-1)} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{vmatrix} \qquad (4.16)$$

Зауваження 4.17. У випадку ортонормованого базису

$$\left[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{n-1}\right] = \begin{vmatrix} a^1_{(1)} & a^2_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ . & . & . & . \\ a^1_{(n-1)} & a^2_{(n-1)} & \ldots & a^n_{(n-1)} \\ \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \ldots & \vec{e}^n \end{vmatrix} \qquad (4.17)$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. В умовах задачі № 2 п.4.6 знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

Розв'язок. Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює площі трикутника $A_1A_2A_3$, що дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$.

Знаходимо векторний добуток в базисі $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ взаємному з даним $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. За формулою (4.16) маємо

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \end{vmatrix} = \sqrt{3}\left(2\vec{e}^1 - 5\vec{e}^2 - \vec{e}^3\right).$$

За формулою

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} x_i x_j = (x_1 \ldots x_n) G^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

знаходимо модуль векторного добутку

$$\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|^2 = \sqrt{3}(2 - 5 - 1)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 26 + 35 + 3 = 64.$$

Звідси $\left\| \left[\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \right] \right\| = 8$.

Отже, $S_{\Delta A_1A_2A_3} = 4$.

Зауваження 4.18. $S_{\Delta A_1A_2A_3}$ можна знайти за допомогою визначника Грама

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \right)}.$$

Задача 2. Відносно ортонормованого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ простору E_4 дано три вектори $\vec{x}_2 = (1,0,0,1)$, $\vec{x}_2 = (0,2,0,1)$, $\vec{x}_3 = (-1,1,2,0)$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язок. Об'єм щуканого паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку $[\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3]$.

У випадку ортонормованого базису векторний добуток обчислюється за формулою (4.17). Тоді

$$[\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{e}_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4.$$

$$\left\| [\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3] \right\|^2 = 16+4+1+16=37.$$

$$\left\| [\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3] \right\| = \sqrt{37}.$$

Отже, $V = \sqrt{37}$.

Зауваження 4.19. Об'єм паралелепіпеда можна знайти за допомогою визначника Грама $V = \sqrt{\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)}$.

Задача 3. Довести формулу (4.16) в E_3.

Доведення. Нехай $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3$ - вектори в E_3. Тоді за властивостями векторного добутку в E_3 маємо

$$[\vec{x}\vec{y}] = \left[\left(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 \right)\left(y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3 \right) \right] = x^1y^2[\vec{e}_1\vec{e}_2] + x^1y^3[\vec{e}_1\vec{e}_3] + x^2y^1[\vec{e}_2\vec{e}_1] + x^2y^3[\vec{e}_2\vec{e}_3] +$$
$$+ x^3y^1[\vec{e}_3\vec{e}_1] + x^3y^2[\vec{e}_3\vec{e}_2] = \left(x^1y^2 - x^2y^1 \right)[\vec{e}_1\vec{e}_2] - \left(x^1y^3 - x^3y^1 \right)[\vec{e}_1\vec{e}_3] + \left(x^2y^3 - x^3y^2 \right)[\vec{e}_2\vec{e}_3].$$

Оскільки вектор $\vec{e}^{\,3}$ ортогональний до векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, то $[\vec{e}_1\vec{e}_2] = k\vec{e}^{\,3}$. Звідси $\left\langle [\vec{e}_1\vec{e}_2], \vec{e}_3 \right\rangle = k\left\langle \vec{e}^{\,3}, \vec{e}_3 \right\rangle = k.$

З іншого боку $\left\langle [\vec{e}_1, \vec{e}_2], \vec{e}_3 \right\rangle = V_{\text{баз}} = \sqrt{|G|}$.

Тому $k = \sqrt{|G|}$ і $[\vec{e}_1\vec{e}_2] = \sqrt{|G|}\,\vec{e}^{\,3}$.

Аналогічно

$$[\vec{e}_2\vec{e}_3] = \sqrt{|G|}\,\vec{e}^{\,1}, \quad [\vec{e}_3\vec{e}_1] = \sqrt{|G|}\,\vec{e}^{\,2}.$$

Таким чином

$$[\vec{x}\vec{y}] = (x^1y^2 - x^2y^1)\sqrt{|G|}\vec{e}^3 - (x^1y^3 - x^3y^1)\sqrt{|G|}\vec{e}^2 + (x^2y^3 - x^3y^2)\sqrt{|G|}\vec{e}^1 =$$

$$= \sqrt{|G|}\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \end{vmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

469. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}$=(0, 1, 0), $\vec{b}$=(2, -1, 3). Знайти координати векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ в базисі $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ взаємному з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ і $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/4$.
470. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}$=(0, 3, 1), $\vec{b}$=(2, 0, 1). Знайти координати векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ в цьому базисі, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$ і $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \pi/2$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/3$.
471. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}$=(2, -1, 3), $\vec{b}$=(0, 5, -2). Знайти координати векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ в цьому базисі, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$ і $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/3$.
472. Відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}$=(1, 2, -3), $\vec{b}$=(0, 5, -2). Знайти координати векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ в цьому базисі, якщо $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 3$ і $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \pi/3$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/2$.
473. В умовах задачі № 446 знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

В задачах №№ 474-476 відносно ортонормованого базису дано три вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

474. $\vec{x}_1 = (1,2,1,2)$, $\vec{x}_2 = (0,1,0,-1)$, $\vec{x}_3 = (2,0,1,1)$.
475. $\vec{x}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{x}_2 = (1,0,1,0)$, $\vec{x}_3 = (2,-1,-1,1)$.
476. $\vec{x}_1 = (-2,0,1,-1)$, $\vec{x}_2 = (0,-1,1,2)$, $\vec{x}_3 = (3,0,0,1)$.

4.9. Мішаний добуток в E_n. Орієнтований об'єм n-вимірного паралелепіпеда в E_n

Означення 4.28. Мішаним добутком векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ в E_n називається величина

$$\left\langle [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{n-1}], \vec{a}_n \right\rangle.$$

Твердження 4.13. Якщо

$$\vec{a}_1 = a^1_{(1)}\vec{e}_1 + \ldots + a^n_{(1)}\vec{e}_n = a^{(1)}_1\vec{e}^{\,1} + \ldots + a^{(1)}_n\vec{e}^{\,n},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\vec{a}_n = a^1_{(n)}\vec{e}_1 + \ldots + a^n_{(n)}\vec{e}_n = a^{(n)}_1\vec{e}^{\,1} + \ldots + a^{(n)}_n\vec{e}^{\,n},$$

то

$$\left\langle [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{n-1}], \vec{a}_n \right\rangle = \sqrt{|G|}\begin{vmatrix} a^1_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ . & . & . \\ a^1_{(n)} & \ldots & a^n_{(n)} \end{vmatrix} = \sqrt{|G^{-1}|}\begin{vmatrix} a^{(1)}_1 & \ldots & a^{(1)}_n \\ . & . & . \\ a^{(n)}_1 & \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix}. \qquad (4.18)$$

Зауваження 4.20. У випадку, якщо $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ - ортонормований базис

$$\left\langle [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{n-1}], \vec{a}_n \right\rangle = \begin{vmatrix} a^1_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ . & . & . \\ a^1_{(n)} & \ldots & a^n_{(n)} \end{vmatrix}. \qquad (4.19)$$

Означення 4.29. Орієнтованим об'ємом n-вимірного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ в E_n називається мішаний добуток векторів $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$, тобто

$$\tilde{V} = \left\langle [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{n-1}], \vec{a}_n \right\rangle.$$

Зауваження 4.21. $\tilde{V} = 0$ тоді і тільки тоді, коли сукупність векторів $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ лінійно залежна, $\tilde{V} > 0$, якщо сукупність векторів $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ має ту ж орієнтацію, що й сукупність базисних векторів, $\tilde{V} < 0$ - у протилежному випадку.

Зауваження 4.22. Рівність $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \tilde{V}$ для векторів $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 \in E_3$ є однією із властивостей мішаного добутку в E_3.

Твердження 4.14.

$$\tilde{V}^2 = \Gamma(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n) = V^2,$$

де V - об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$.

Зауваження 4.23. Оскільки для векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ має місце рівність $(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)^2 = \Gamma(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$, то для векторів базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ в E_3 буде

$$(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)^2 = \Gamma(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = |G|.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. В умовах задачі № 2 п.4.6 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язок. Об'єм піраміди дорівнює *1/6* модуля мішаного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. За формулою (4.18) маємо

$$\left\langle \left[\overrightarrow{A_1A_2}\, \overrightarrow{A_1A_3} \right], \overrightarrow{A_1A_4} \right\rangle = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \sqrt{3}(-12) = -12\sqrt{3}.$$

Тоді об’єм піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$.

Задача 2. Відносно ортонормованого базису дано вектори $\vec{x}_1=(0,1,1,1)$, $\vec{x}_2=(1,0,1,1)$, $\vec{x}_3=(1,1,0,1)$, $\vec{x}_4=(1,1,1,0)$. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв’язок. Обчислимо орієнтований об’єм паралелепіпеда за формулою (4.19).

Маємо

$$\widetilde{V}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3.$$

Тоді $V=|-3|=3.$

Задачі для розв’язування

477. Знаючи метричні коефіцієнти g_{ij}, базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, знайти об’єм V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\left(x^1,x^2,x^3\right)$, $\left(y^1,y^2,y^3\right)$, $\left(z^1,z^2,z^3\right)$.
478. Знайти орієнтований об’єм $\widetilde{V}$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\left(x^1,x^2,x^3\right)$, $\vec{b}=\left(y^1,y^2,y^3\right)$, $\vec{c}=\left(z^1,z^2,z^3\right)$, якщо $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\omega_{12}$, $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\omega_{23}$, $\widehat{\vec{e}_3\vec{e}_1}=\omega_{31}$.
479. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(1,3,0)$, $\vec{b}=(1,2,1)$, $\vec{c}=(1,-2,3)$, якщо $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\pi/2$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3}=\pi/3$, $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\pi/3$.
480. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(5,2,-3)$, $\vec{c}=(1,4,-2)$, якщо $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$ і $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3}=\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\pi/3$.

В задачах №№ 481-483 знаючи метричні коефіцієнти $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{23}=g_{13}=1/2$, $g_{12}=0$ базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

481. $\vec{a}=(1,0,7)$, $\vec{b}=(-1,2,4)$, $\vec{c}=(3,2,1)$.
482. $\vec{a}=(2,-3,1)$, $\vec{b}=(1,1,2)$, $\vec{c}=(3,1,-1)$.
483. $\vec{a}=(-2,1,5)$, $\vec{b}=(3,0,2)$, $\vec{c}=(-1,4,2)$.
484. В умовах задачі № 446 знайти об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ і довжину її висоти, опущеної з вершини A_4.

В задачах №№ 485-487 обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4$. (Припускається, що координати векторів задані відносно ортонормованого базису).

485. $\vec{x}_1=(1,3,4,-1)$, $\vec{x}_2=(0,2,5,1)$, $\vec{x}_3=(1,-7,-3,2)$, $\vec{x}_4=(-2,5,0,-3)$.

486. $\vec{x}_1=(1,2,0,4)$, $\vec{x}_2=(2,0,1,0)$, $\vec{x}_3=(0,4,1,2)$, $\vec{x}_4=(4,1,2,3)$.

487. $\vec{x}_1=(1,2,3,4)$, $\vec{x}_2=(0,1,2,3)$, $\vec{x}_3=(1,0,3,4)$, $\vec{x}_4=(1,1,5,6)$.

488. Вектори $\vec{a}_1=(4,0,2,3)$, $\vec{a}_2=(0,1,1,2)$, $\vec{a}_3=(2,0,4,1)$, $\vec{a}_4=(1,2,0,4)$, що виходять з однієї точки, є ребрами 4-вимірного паралелепіпеда. Знайти висоту цього паралелепіпеда, приймаючи за його основу 3-вимірний паралелепіпед, побудований на векторах:

1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; 2) $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.

Координати векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ задані в ортонормованому базисі.