5. ЛІНІЙНІ ОБРАЗИ В E_n

5.1. Площина і пряма в E_n

Нехай E_k - деякий лінійний k-вимірний підпростір E_n $(1 \le k \le n-1)$ і M_o - фіксована точка простору E_n.

Означення 5.1. Множина P_k усіх точок $M \in E_n$, для яких справедлива рівність $\vec{OM} = \vec{OM}_o + \vec{x}$ (O - початок координат в E_n; $\vec{x}$ пробігає увесь підпростір E_k), називається k-вимірною площиною простору E_n.

Таким чином, k-вимірна площина P_k простору E_n є результатом паралельного зсуву підпростору E_k вздовж вектора $\vec{OM}_o$. В цьому випадку говорять, що P_k проходить через точку M_o паралельно підпростору E_k.

Звичайно P_1 називають прямою простору E_k, P_{n-1} - гіперплощиною E_n.

Теорема 5.1. Якщо вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ $(|\vec{a}| \neq 0)$ ортогональний до гіперплощини P_{n-1} і P_{n-1} проходить через точку $M_o(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$, то рівняння гіперплощини P_{n-1} має вигляд

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + ... + a_n(x_n - x_n^0) = 0$$

або

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + b = 0. \qquad (5.1)$$

І навпаки, усяке рівняння, що має вигляд (5.1) за умови, що всі $a_1, a_2, ..., a_n$ одночасно не дорівнюють нулю, є рівнянням деякої гіперплощини в E_n.

Рівняння (5.1) називається загальним рівнянням гіперплощини.

Зауваження 5.1. Рівняння (5.1) є рівнянням першого степеня, тобто лінійним відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Тому гіперплощина є поверхнею першого порядку в E_n.

Означення 5.2. Кутом φ між гіперплощинами P'_{n-1} і P''_{n-1} називається кут між векторами, перпендикулярними до цих площин.

Твердження 5.1. Якщо гіперплощини P'_{n-1} і P''_{n-1} задані своїми загальними рівняннями

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + ... + a'_n x_n + b_1 = 0,$$
$$a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + ... + a''_n x_n + b_2 = 0,$$

то

$$cos\,\varphi = \frac{\langle \vec{a}', \vec{a}'' \rangle}{|\vec{a}'||\vec{a}''|},$$

де $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, $\vec{a}'' = (a''_1, a''_2, ..., a''_n)$.

Теорема 5.2. Множина точок $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ тоді й тільки тоді є k-вимірною площиною P_k простору E_n, якщо вона збігається з множиною усіх точок E_n, координати яких задовольняють деякій системі з n-k лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$, для якої ранг основної матриці дорівнює числу рівнянь n-k.

Система з n-k лінійних рівнянь з теореми 5.2 називається загальними рівняннями площини P_k.

Зокрема, загальними рівняннями прямої P_1 в просторі E_n є система з (n-1)-го лінійних рівнянь, для якої ранг основної матриці дорівнює n-1. Ця система може бути записана у вигляді

$$\frac{x_1 - x_1^0}{q_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{q_2} = ... = \frac{x_n - x_n^0}{q_n}, \qquad (5.2)$$

де $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ - координати точки M_o, через яку проходить P_1; $q_1, q_2, ..., q_n$ - координати деякого (ненульового) вектора $\vec{q} \in E_n$, паралельного P_1. Систему (5.2) називають канонічними рівняннями прямої P_1. Вектор $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$, паралельний прямій, називається напрямним вектором прямої.

Якщо в (5.2) спільне відношення позначити через t, то система (5.2) запишеться у вигляді системи

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + q_1 t, \\ x_2 = x_2^0 + q_2 t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n^0 + q_n t, \qquad t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

яку називають параметричними рівняннями прямої P_1.

Теорема 5.3. Для відстані d від точки $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$ до гіперплощини $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$ має місце формула

$$d = \left| \frac{a_1x_1' + a_2x_2' + ... + a_nx_n' + b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}} \right|.$$

У випадку n=2, тобто у випадку простору E_2, поняття гіперплощини й прямої збігаються між собою. Тоді загальне рівняння прямої має вигляд $ax+by+c=0$, де вектор $\vec{a} = (a, b)$ перпендикулярний до прямої. Канонічне рівняння прямої в E_2 має вигляд

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

де x, y - координати довільної точки M прямої; x_0, y_0 - координати фіксованої точки M_0 прямої; p, q - координати ненульового вектора, колінеарного прямій. Звичайно, q/p при $p \neq 0$ позначають через k і називають кутовим коефіцієнтом прямої. Тоді рівняння прямої запишеться у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

При n=3, тобто у випадку простору E_3, поняття гіперплощини P_2 збігається з поняттям площини простору, а поняття прямої P_1 - з поняттям прямої простору.

У цьому випадку загальне рівняння площини P_2 має вигляд

$$ax+by+cz+d=0,$$

де вектор $\vec{a} = (a, b, c)$ перпендикулярний до площини P_2.

Канонічні рівняння прямої P_1 мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r},$$

де x, y, z - координати довільної точки M прямої; x_0, y_0, z_0 - координати фіксованої точки M_0 прямої; p, q, r - координати (ненульового) вектора, колінеарного прямій P_1.

Параметричні рівняння P_1 мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt, \qquad t \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Знайти проекцію точки $A(3, 2, 0, -1)$ на гіперплощину $x_1+2x_2-x_3+4x_4= - 41$.

Розв'язок. З рівняння гіперплощини знаходимо ортогнальний до неї вектор $\vec{a}=(1, 2, -1, 4)$. Рівняння перпендикуляра до заданої гіперплощини, що проходить через точку $A(3, 2, 0, -1)$, має вигляд

$$\frac{x_1 - 3}{1} = \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{x_3}{-1} = \frac{x_4 + 1}{4}. \qquad (5.3)$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -41, \\ \dfrac{x_1 - 3}{1} = \dfrac{x_2 - 2}{2} = \dfrac{x_3}{-1} = \dfrac{x_4 + 1}{4}, \end{cases}$$

знайдемо координати проекції.

Для розв'язування системи запишемо параметричні рівняння прямої (5.3):

$$\begin{cases} x_1 = t + 3, \\ x_2 = 2t + 2, \\ x_3 = -t, \\ x_4 = 4t - 1. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Підставивши значення x_1, x_2, x_3, x_4 в рівняння гіперплощини, знайдемо t=-2. З рівняння (5.4) знаходимо x_1=1, x_2=-2, x_3=2, x_4=-9. Таким чином, точка A_1(1, -2, 2, -9) є проекцією точки A(3,2,0,-1) на гіперплощину.

Задача 2. В умовах задачі 2 п.4.1.2 знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язок. Нехай $M(x, y, z)$ - довільна точка площини. Тоді вектори $A_1\vec{M} = (x+1, y, z-1)$, $A_1\vec{A}_2 = (5,3,1)$, $A_1\vec{A}_3 = (2,2,3)$ компланарні. При виконанні цієї умови їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $A_1\vec{M} \cdot A_1\vec{A}_2 \cdot A_1\vec{A}_3 = 0$. Якщо точка M не лежить на площині, то $A_1\vec{M} \cdot A_1\vec{A}_2 \cdot A_1\vec{A}_3 \neq 0$. Тому рівняння площини має вигляд

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7(x+1) - 13y + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 7x - 13y + 4z + 3 = 0.$$

Задача 3. В умовах задачі 2 п.4.1.2 знайти:

1) рівняння прямої A_1A_2;
2) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язок. 1) Скористаємося канонічним рівнянням прямої (5.2). За напрямний вектор даної прямої можна прийняти вектор $\vec{q} = A_1\vec{A}_2 = (5,3,1)$.

Враховуючи, що пряма проходить через точку A_1(-1, 0, 1), одержимо рівняння прямої A_1A_2 у вигляді

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

2) Скористаємося канонічним рівнянням прямої (5.2).

Пряма проходить через точку A_4(0, 4, -1). Тому покладемо $x_1^0 = 0, x_2^0 = 4, x_3^0 = -1.$ За напрямний вектор даної прямої можна взяти вектор $\vec{a}$ - нормальний вектор до площини $A_1A_2A_3$.

З рівняння площини $A_1A_2A_3$, одержаного в задачі 2 цього пункту, маємо: $\vec{a}$ =(7, -13, 4).

Тоді рівняння шуканої висоти має вигляд

$$\frac{x-0}{7} = \frac{y-4}{-13} = \frac{z+1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y-4}{-13} = \frac{z+1}{4}.$$

Задачі для розв'язування

489. Задані пряма l і точка M в E_2. Знайти:

1) рівняння прямої l', що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;
2) рівняння прямої l'', що проходить через точку M паралельно заданій прямій:

а) l: $-3x+2y-5=0$, $M(-1, 2)$;
б) l: $x+3y-11=0$, $M(0, 3)$;
в) l: $2x-4y-9=0$, $M(1, -1)$.

490. Знайти рівняння прямої:
1) яка проходить через точку (3, 4) паралельно осі Ox;
2) яка проходить через точку (-2, 1) паралельно осі Oy.

491. Встановити, чи перетинаються в одній точці три прямі:

1) $2x+3y-1=0$,	2) $4x-5y+6=0$,
$3x-y+3=0$,	$5x+3y-11=0$,
$2x-y+1=0$.	$x+2y-5=0$.

В задачах 492-496 дані прямі l_1 і l_2. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3, 2)$ і точку перетину прямих l_1 та l_2.

492. l_1: $-2x+y-5=0$, l_2: $x-5y-1=0$.
493. l_1: $x+y-1=0$, l_2: $2x+2y-2=0$.
494. l_1: $3x-4y-1=0$, l_2: $x-y-2=0$.
495. l_1: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}$, l_2: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$.
496. l_1: $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{1}$, l_2: $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{5}$

497. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x+2y+3=0$, $2x+3y+4=0$ паралельно прямій $5x+8y=0$.

498. Дано сторони трикутника ABC: $x-y=0$ (AB), $x+y-2=0$ (BC), $y=0$ (AC). Знайти рівняння висоти, що проходить через вершину A.

499. Дано вершини трикутника ABC: $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$. Потрібно:
1) написати рівняння сторони AB;
2) написати рівняння висоти CD й обчислити її довжину.

500. Дано сторона прямокутника $3x-4y+5=0$ та дві його вершини $A(1, -3)$, $C(1, 2)$. Знайти рівняння решти сторін прямокутника.

501. Знайти точку B, симетричну точці $A(-2, 4)$ відносно прямої: $3x+y-8=0$.

502. Дано вершини трикутника ABC : $A(-8, 3)$, $B(8, 5)$, $C(8, -5)$. Знайти точку перетину його висот.

503. Знайти рівняння прямої:
1) кутовий коефіцієнт якої 1/2 і відрізок, що відтинається на осі ординат, дорівнює 3;
2) що проходить через точку (1, 3) та кутовий коефіцієнт якої дорівнює -2;
3) що проходить через точку (-1,2) і утворює з віссю Ox кут $\pi/3$;
4) що проходить через точку (3, 7) і утворює з віссю Ox кут $\pi/6$;
5) що проходить через точку (0, 1) і утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

504. Знайти рівняння прямої:
1) яка відтинає на осях Ox й Oy відрізки, що відповідно становлять 3 і -4;

2) яка проходить через точку (3, 1) і відтинає на осях Ox та Oy відрізки однакової довжини;

3) яка проходить через точку (1, 2) й відтинає на осях Ox та Oy відрізки, відношення відповідних довжин яких дорівнює 1/3.

505. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (-6, 8) та відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 12 кв. од.

506. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2, 2) та відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 1 кв. од.

507. Знайти відстань d між паралельними прямими:

1) $x-2y+4=0,$ $2x-4y+5=0;$ 2) $2x-3y-1=0,$ $-6x+9y-5=0.$

508. Через точку (-2, 2) провести прямі, відстань до кожної з яких від точки (2, 5) дорівнює 3.

509. Через точку (-1, 2) провести прямі, відстань до кожної з яких від точки (6, 1) дорівнює 5.

510. Точки $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$, $C(2, 1)$ - вершини трикутника. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута трикутника при вершині B.

511. Дані вершини трикутника $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 5)$. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

512. Дані вершини трикутника $M_1(-10, 2)$ й $M_2(6, 4)$. Його висоти перетинаються в точці $N(5, 2)$. Визначити координати третьої вершини M_3.

513. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(2, -4)$ і рівняння бісектрис двох його кутів $x+y-2=0$ та $x-3y-6=0$.

514. Знаючи рівняння $3x-2y+6=0$ однієї з сторін кута і рівняння його бісектриси $x-3y+5=0$, скласти рівняння другої сторони кута.

515. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $2x-y+8=0$, $x-2y-12=0$. Точка (4, 0) лежить на основі. Знайти рівняння основи.

516. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо дані одна з його вершин (-2, -2) і рівняння трьох медіан: $y=x$, $x=2$ і $x+2y-6=0$.

517. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо $A(3, -1)$ і $B(7, 3)$ його вершини, а $M(4, 2)$ - точка перетину його висот.

518. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(2, 1)$, рівняння висот BM і CM: $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$, де M - точка перетину висот.

519. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1, 3)$ так, що середина її відрізка, що міститься між паралельними прямими $x+2y+5=0$ та $x+2y+1=0$, лежить на прямій $x-y-5=0$.

520. Дано рівняння двох сторін трикутника: $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$. Його медіани перетинаються в точці (2, 2). Знайти рівняння третьої сторони трикутника.

521. Вершинами трикутника ABC є точки $A(2, -2)$ та $B(3, -1)$. Його медіани перетинаються в точці $O(1, 0)$. Знайти рівняння висоти трикутника, яка проходить через вершину C.

522. Знайти рівняння сторін трикутника ABC, якщо відомі рівняння двох бісектрис $x+2y-13=0$, $x-y-5=0$ і координати точки $A(7, 8)$.

523. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, -1, 3)$ й має нормальний вектор $\vec{n}=(5, 0, 4)$.

524. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, -3, 7)$ паралельно площині $2x-6y-3z+5=0$.

В задачах № 525, 526 знайти рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

525. $M_0(2, 2, -2)$, $\vec{a}=(-2, 2, -1)$, $\vec{b}=(1, 2, 3)$.

526. $M_0(1, 2, -5)$, $\vec{a}=(1, -3, -1)$, $\vec{b}=(2, 2, 1)$.

527. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1, 1, 1)$ і $M_2(-1, 1, -1)$ паралельно прямій, визначеній точками $A(5, -2, 3)$ та $B(6, 1, 0)$.

528. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2, -1, 3)$ та $M_2(3, 1, 2)$ паралельно вектору $\vec{a}=(3,-1,-4)$.

В задачах № 529, 530 написати рівняння площини, яка проходить через три точки.

529. $M_1(1, 2, 3)$,	530. $M_1(3, -1, 2)$,
$M_2(1, -1, 4)$,	$M_2(4, -1, 1)$,
$M_3(-1, 0, -2)$.	$M_3(2, 0, 2)$.

531. Знайти рівняння граней тетраедра з вершинами в точках (1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1).

532. Знайти рівняння висоти піраміди $ABCD$, опущеної з вершини D на грань ABC, якщо $D(1, 4, -2)$, $A(0, -1, 1)$, $B(3, 5, 1)$, $C(1, -3, -1)$.

533. Написати рівняння площини:
   1) яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$;
   2) яка проходить через точку $M(1, 1, -2)$ перпендикулярно до площин $2x+3z=0$, $x-y+z-1=0$;
   3) яка проходить через точку (1, -1, 1) перпендикулярно до площин $x-y+z-1=0$, $2x+y+z+1=0$.

534. Через точки $A(1, 1, 1)$ і $B(2, 2, 2)$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+y-z=0$.

535. Дана точка $A(1, 2, 3)$, написати рівняння площин:
   1) що проходить через точку A паралельно координатним площинам;
   2) що проходять через точку A та через осі координат.

536. Дано дві точки $A(3, 2, -1)$ й $B(2, -3, 1)$. Знайти рівняння площин, які проходять через точки A і B паралельно координатним осям.

537. Знайти точки перетину площини $x-2y+4z-8=0$ з осями координат.

538. Площина проходить через точку $M_1(6, -10, 1)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a=-3$ і на осі аплікат відрізок $c=2$. Знайти рівняння цієї площини.

539. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1, 2, -1)$ і $M_2(-3, 2, 1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b=3$.

540. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1, 2, 3)$ й відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

541. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, 4, -1)$, $M_2(-13, 2, -10)$ і відтинає на осях абсцис та аплікат відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

542. Обчислити об'єм тетраедра, утвореного координатними площинами і площиною, яка проходить через точку $(3, 5, -7)$ та відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини.

543. Знайти рівняння площини, перпендикулярної до площини $2x-2y+4z-5=0$, яка відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки $a=-2$, $b=2/3$.

544. Знайти рівняння площини, яка паралельна вектору $\vec{a}=(2, 1, -1)$ і відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки $a=3$, $b=-2$.

545. Знайти відстань точки $A(2, 3, 1)$ від площини $x-2y+z+5=0$.

   В задачах № 546, 547 знайти відстань між паралельними площинами.

546. $x-2y+z-1=0$, $2x-4y+2z-1=0$.

547. $2x-y+2z+9=0$, $4x-2y+4z-21=0$.

548. Знайти висоту піраміди $SABC$, опущену з вершини S на грань ABC, якщо $S(1, 4, -2)$, $A(0, -1, 1)$, $B(3, 5, 1)$, $C(1, -3, -1)$.

549. Знайти площину, рівновіддалену від площин $2x-3y+z+5=0$ та $2x-3y+z-7=0$.

550. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин $12x+9y-20z-19=0$ та $16x-12y+15z-9=0$.

551. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1, -2, 0)$ і від площини $3x-2y+6z-9=0$.

В задачах №№ 552-554 знайти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути, утворені двома площинами, що перетинаються.

552. $x-2y+4z-3=0$, $2x+4y-z+5=0$.
553. $2x+7y+z-1=0$, $5x-5y+2z+1=0$.
554. $2x-y+3z+5=0$, $x+3y-2z+7=0$.

555. Знайти площину, яка в два рази більше віддалена від площини $x+y-z+1=0$, ніж від площини $x+y-z-1=0$, і не знаходиться між ними.

556. Знайти площину, розташовану між площинами $x-2y+z-2=0$ та $x-2y+z-6=0$, таку, що ділить відстань між ними у відношенні 1:3.

557. Знайти рівняння прямої:

1) яка проходить через дві точки $M_1(2, -3, 1/2)$, $M_2(3, 5, 3/2)$;

2) яка проходить через точку $M_0(2, 1, -3)$ паралельно вектору $\vec{a}=(1, -3, 1)$;

3) яка проходить через точку $M_1(-3, 4, -5)$ паралельно:

а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz.

558. Написати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(0, 7, -2)$ паралельно:

1) вектору $\vec{a}=(3, -2, 4)$;

2) прямій $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$;

3) прямій $x=3t-2$; $y=2t+1$; $z=-3t+3$.

559. Через точку $A(3, -4, 2)$ провести пряму, перпендикулярну до площини $x-2y+3z-7=0$.

560. Через точку $A(2, 1, 1)$ провести пряму, паралельну площинам $x+y-z+1=0$ і $3x-y-5=0$.

561. Через точку $(-1, 2, 1)$ провести пряму, паралельну прямій $\begin{cases} x+y-2z-1=0, \\ x+2y-z+1=0. \end{cases}$

562. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5, -1, -3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ 4x-5y-z+2=0. \end{cases}$

В задачах №№ 563-565 написати канонічні й параметричні рівняння прямих, які проходять через дві дані точки M_1 і M_2.

563. $M_1(2, -1, -1)$ і $M_2(3, 3, -1)$.

564. $M_1(1, -3, 1)$ і $M_2(2, 4, 2)$.

565. $M_1(0, 2, 1)$ і $M_2(2, 0, 0)$.

566. Дано вершини трикутника $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ і $C(4, -7, -2)$. Написати параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

567. Дано вершини трикутника $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ і $C(-5, 14, -3)$. Написати канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

568. Дано вершини трикутника $A(2, -1, -3)$, $B(5, 2, -7)$ і $C(-7,11,6)$. Написати канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.

569. Дано вершини трикутника $A(1, -2, -4)$, $B(3, 1, -3)$ і $C(5, 1, -7)$. Написати параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

В задачах №№ 570, 571 довести паралельність прямих.

570. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

571. $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

В задачах №№ 572-574 знайти кут між прямими.

572. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ і $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-3}$.

573. $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x-y+2z+1=0. \end{cases}$

574. $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y+z=0, \\ y-z+2=0. \end{cases}$

В задачах №№ 575-577 написати канонічні рівняння прямих.

575. $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$ 576. $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$ 577. $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

В задачах №№ 578, 579 написати параметричні рівняння прямих.

578. $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0. \end{cases}$ 579. $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

580. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1, 2, -3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}=(6, -2, -3)$ і перетинає пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

581. Через точку $M(2, 1, 1)$ провести пряму, паралельну площинам $x-y+z+2=0$, $x+y+2z-1=0$.

582. Через точку $M(2, 2, 1)$ провести площину, перпендикулярну до прямої $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

583. Через точку $M(1, 1, 2)$ провести площину, паралельну прямим $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$.

584. Через точку $M(1, 2, 1)$ провести площину, паралельну прямим $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

585. Провести площину через пряму $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ і точку $M(2, 1, 1)$.

586. Через пряму $\begin{cases} x-1=0, \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+y+z=0$.

587. Знайти рівняння й довжину висоти трикутника, який відтинається на площині $3x-y+4z-12=0$ координатними площинами; висота, опущена з вершини, що лежить на осі Oz.

В задачах №№ 588, 589 знайти точку перетину прямої та площини.

588. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$, $x+y-z+1=0$.

589. $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$.

590. Знайти проекцію точки (2, 1, 1) на площину $x+y+3z+5=0$.

591. Знайти проекцію точки (2, 3, 1) на пряму $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$.

592. Знайти точку N, симетричну точці $M(1, 1, 1)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

593. Знайти точку, симетричну точці (4, 1, 6) відносно прямої $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

594. Знайти точку, симетричну точці (2, -5, 7) відносно прямої, яка проходить через точки (5, 4, 6) і (-2, -17, -8).

595. Знайти точку, симетричну точці (1, 3, -4) відносно площини $3x+y-2z=0$.

596. Знайти точку N, симетричну точці $M(1, 2, 3)$ відносно площини $x+y+2z-6=0$.

597. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих $\begin{cases} x+4z+1=0, \\ x-4y+9=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} y=0, \\ x+2z+4=0. \end{cases}$

598. Обчислити відстань від точки (1, -1, -2) до прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

В задачах №№ 599, 600 знайти відстань між прямими.

599. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0. \end{cases}$

600. $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0, \end{cases}$ і $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$.

601. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(1, 2, -3)$ паралельно прямим $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$, $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

602. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $x=2t-1$, $y=3t$, $z=t+4$ і точку $M(3, -1, 0)$.

603. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ і $x=3t+7$, $y=2t+2$, $z=-2t+1$ лежать в одній площині. Знайти рівняння цієї площини.

604. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-2$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

В задачах №№ 605, 606 знайти найкоротшу відстань між двома прямими.

605. $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

606. $x=2t-4$, $y=-t+4$, $z=-2t-1$; $x=4t-5$, $y=-3t+5$, $z=-5t+5$.

607. Знайти проекцію точки $A(1,1,1,1,1)$ п'ятивимірного евклідового простору на гіперплощину $x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=1$.

608. Знайти проекцію точки $B(0,1,2,3)$ чотиривимірного евклідового простору на гіперплощину $2x_1-3x_2+x_3+4x_4=41$.

609. Знайти відстань від точки $B(1,2,0,3)$ чотиривимірного евклідового простору до гіперплощини $3x_1+2x_2+6x_3+x_4=7$.

610. Знайти відстань від точки $A(1,1,1,1,1)$ п'ятивимірного евклідового простору до гіперплощини $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2$.

611. Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами чотиривимірного евклідового простору $3x_1+x_2-x_3+x_4=0$ і $3x_1+x_2-x_3+x_4-2=0$.

612. Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами п'ятивимірного евклідового простору $x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5+2=0$ і $x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5-6=0$.

613. Знайти рівняння гіперплощини, яка проходить через точку $M(2,-3,7,4)$ паралельно гіперплощині $2x_1-x_2+x_3-3x_4-1=0$.

614. Знайти рівняння гіперплощини, яка проходить через точку $M(1,2,0,-2,3)$ паралельно гіперплощині $3x_1+2x_2-4x_3+x_4-x_5+3=0$.

В задачах №№ 615, 616 знайти рівняння гіперплощин, які рівновіддалені від двох даних гіперплощин.

615. $x_1-3x_2-x_3+4x_4+x_5-4=0$, $4x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5+1=0$.

616. $3x_1+3x_2-x_3+x_4+2x_5-1=0$, $x_1+x_2-3x_3+3x_4-2x_5-7=0$.

617. Знайти рівняння гіперплощини, віддаленої від даної гіперплощини $x_1-x_2+3x_3-5x_4-2=0$ на відстань *3-х* одиниць.

В задачах №№ 618, 619 знайти кут між гіперплощинами.

618. $x_1+2x_2+2x_3+3x_4+5=0$, $3x_1+x_2+5x_3+x_4-1=0$.

619. $3x_1+2x_2+3x_3+x_4-5x_5+7=0$, $2x_1+2x_2+x_3-3x_4+2x_5-1=0$.

620. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x_1-2}{3}=\frac{x_2-3}{1}=\frac{x_3-1}{2}=\frac{x_4+2}{-1}$ на гіперплощину $2x_1-3x_2+x_3+4x_4+4=0$.

621. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x_1-1}{2}=\frac{x_2+3}{-1}=\frac{x_3+2}{5}=\frac{x_4}{7}=\frac{x_5-5}{4}$ на гіперплощину $3x_1-2x_2-x_3+3x_4-x_5+18=0$.

5.2. Геометрична інтерпретація розв'язків систем лінійних рівнянь

Нехай задана система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

і нехай A - основна матриця, а B - розширена матриця системи.

Теорема 5.3. Якщо $r(A)\neq r(B)$, то в E_n немає точок, координати яких задовольняють системі (система несумісна).

Якщо $r(A)=r(B)=n$, в просторі E_n знайдеться тільки одна точка $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, координати якої є розв'язком системи (система має єдиний розв'язок).

Якщо $r(A)=r(B)=k$ $(1\leq k<n)$, то множина точок, координати яких задовольняють системі, є $(n-k)$-вимірною площиною P_{n-k} простору E_n (система має безліч розв'язків, причому число вільних невідомих дорівнює $n-k$).

Теорема 5.4. Якщо система однорідна, тобто $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, і 1) $r(A)=n$, то системі задовольняють тільки координати точки $O(0, 0, ..., 0)$ (нульовий розв'язок);

2) $r(A)=k$ $(1 \le k<n)$, то множина точок, координати яких задовольняють системі, є $(n\text{-}k)$-вимірною площиною P_{n-k} простору E_n , що проходить через початок координат $O(0, 0, ..., 0)$.

Наслідок 5.1. Якщо $m=n$, то однорідна система при $|A| \neq 0$ має єдиний нульовий розв'язок, при $|A|=0$ - безліч розв'язків.

Наслідок 5.2. Однорідна система при $m=n$ має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $|A|=0$.

Зауваження 5.2. Якщо $r(A)=r(B)=k$ $(1 \le k<n)$, то розмірність площини P_{n-k} - площини розв'язків системи, дорівнює числу $n\text{-}k$ вільних невідомих.

Задача з розв'язком

Задача. Визначити розмірність площини п'ятивимірного евклідового простору

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4-2x_5=3, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4-x_5=1, \\ x_1-4x_2-x_3+2x_4+x_5=-2. \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислюючи ранги основної матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і розширеної матриці

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

одержимо $r(A)=r(B)=2$. Число базисних невідомих системи дорівнює 2, вільних: 5-2=3.

Таким чином, множина точок, координати яких задовольняють системі, є тривимірною площиною простору E_5.

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 622-626 знайти розмірність площин п'ятивимірного евклідового простору.

622. $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3+2x_4-x_5=2, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=3, \\ 4x_1-x_2-8x_3+5x_4+x_5=7. \end{cases}$

623. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=3, \\ 2x_1-2x_2+2x_3-2x_4+2x_5=4. \end{cases}$

624. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5=5, \\ 2x_1-2x_2+6x_3-2x_4+2x_5=10, \\ 3x_1-3x_2+9x_3-3x_4+3x_5=-15. \end{cases}$

625. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1-2x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+2x_2+4x_3+x_4+4x_5=0. \end{cases}$

626. $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

В задачах №№ 627-631 знайти розмірність площин чотиривимірного евклідового простору.

627. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0. \end{cases}$

628. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-11x_2+17x_3+8x_4=0. \end{cases}$

629. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3+x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-5x_3-4x_4=0, \\ 5x_1-8x_2-13x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+2x_2-2x_3-10x_4=0. \end{cases}$

630. $\begin{cases} 3x_1-5x_2-8x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3-5x_4=0, \\ 5x_1+x_2-4x_3-9x_4=0, \\ 7x_1-7x_2-\quad 17x_4=0. \end{cases}$

631. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+5x_4=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+6x_4=0. \end{cases}$