6. **ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ**

6.1. **Означення лінійного оператора**

Нехай L і M лінійні простори.

Означення 6.1. Лінійним оператором A, що діє із L в M називається відповідність між векторами цих просторів, яка кожному вектору $\vec{x} \in L$ ставить у відповідність цілком певний вектор $\vec{y} \in M$, що називається образом вектора $\vec{x}$ і позначається символом $\vec{y} = A(\vec{x})$, причому для будь-яких елементів $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ простору L і будь-якого дійсного числа λ виконуються співвідношення:

1. $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A(\vec{x}_1)+A(\vec{x}_2)$. 2. $A(\lambda\vec{x})=\lambda A(\vec{x})$.

Зауваження 6.1. Якщо простір L збігається з простором M, то лінійний оператор, що діє в цьому випадку з L в L називається також лінійним перетворенням простору L.

Зауваження 6.2. Лінійний оператор A, що діє із L_n в L_1, називається лінійним функціоналом.

<u>Приклад 1</u>. Оператор, який ставить у відповідність кожному вектору $\vec{x} \in L$ сам цей вектор, є лінійним. Він називається тотожним і позначається буквою E, так що $E(\vec{x})=\vec{x}$.

Приклад 2. Оператор, який ставить у відповідність кожному вектору $\vec{x} \in L$ вектор $\lambda\vec{x}$, $\lambda \in R$ є лінійним.

Геометрично лінійний оператор $A(\vec{x})=\lambda\vec{x}$ в E_n (або в E^n) при $\lambda>0$ є однорідний розтяг (стиск) усіх векторів простору з однаковим коефіцієнтом розтягу (стиску). При $\lambda<0$ розтяг (стиск) усіх векторів простору супроводиться симетричним відображенням їх відносно початку координат.

Задача з розв'язком

Задача. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - базис простору E_2 і $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ - довільний вектор цього простору. Переконатися, що перетворення простору $\vec{u} = A(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1 + \alpha x_2\vec{e}_2$ є лінійним ($\alpha \in R$).

Розв'язок. Для доведення лінійності перетворення слід переконатися у виконанні умов:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}),$$
$$A(\lambda\vec{x})=\lambda A(\vec{x}).$$

для даного перетворення.

Нехай розклад довільного вектора $\vec{y} \in E_2$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має вигляд $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$, тоді

$$\vec{x}+\vec{y}=\left(x_1+y_1\right)\vec{e}_1+\left(x_2+y_2\right)\vec{e}_2 \text{ і } \lambda\vec{x}=\lambda x_1\vec{e}_1+\lambda x_2\vec{e}_2.$$

Отже,

$$A\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\left(x_1+y_1\right)\vec{e}_1+\alpha\left(x_2+y_2\right)\vec{e}_2=\left(x_1\vec{e}_1+\alpha x_2\vec{e}_2\right)+\left(y_1\vec{e}_1+\alpha y_2\vec{e}_2\right)=A(\vec{x})+A\left(\vec{y}\right).$$

$$A(\lambda\vec{x})=\lambda x_1\vec{e}_1+\alpha\lambda x_2\vec{e}_2=\lambda\left(x_1\vec{e}_1+\alpha x_2\vec{e}_2\right)=\lambda A(\vec{x}).$$

Геометричне перетворення A є розтяг (стиск) простору E_2 в напрямі вектора $\vec{e}_2$ (рис.6.1).

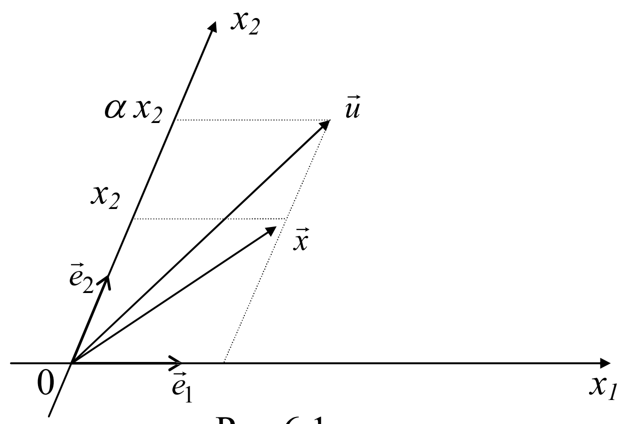

Рис.6.1.

Задачі для розв'язування

632. Нехай $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ - базис простору E_2 і $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$ - довільний вектор цього простору. Установити, чи є лінійними такі перетворення простору E_2:

1. $\vec{u}=A(\vec{x})=\alpha_1 x_1\vec{e}_1+\alpha_2 x_2\vec{e}_2$; 2. $\vec{u}=A(\vec{x})=x_1^2\vec{e}_1$;

3. $\vec{u}=A(\vec{x})=\left(x_1+3x_2\right)\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$; 4. $\vec{u}=A(\vec{x})=x_1\vec{e}_1-2x_2\vec{e}_2$;

5. $\vec{u}=A(\vec{x})=x_1\vec{e}_1$; 6. $\vec{u}=A(\vec{x})=x_1\vec{e}_1+x_1\vec{e}_2$.

Вияснити геометричний зміст цих перетворень.

633. Які із таких перетворень простору E_3 є лінійними?

а) $A(\vec{x})=\left(x_2+x_3,\ 2x_1+x_3,\ 3x_1-x_2+x_3\right)$; б) $A(\vec{x})=\left(2x_1+x_2, x_1+x_3, \left(x_3\right)^2\right)$,

де через x_1,x_2,x_3 позначені координати довільного вектора $\vec{x}$ у деякому базисі.

634. Довести, що операція диференціювання є лінійним оператором простору P_n многочленів степеня не вище n.

635. Довести, що операція проектування в просторі E_3 на площину xOy є лінійним оператором.

636. Довести лінійність таких операторів, визначених в просторі $C[a,b]$ для усіх неперервних на $[a,b]$ функцій

а) $g(t)=A(f(t))=t\cdot f(t)$; б) $g(t)=A(f(t))=f(t)\cdot\varphi(t)$.

де $\varphi(t)$ фіксована функція неперервна на $[a,b]$.

6.2. **Матриця лінійного оператора**

Нехай A - лінійний оператор, що діє із L^n в L^m, і $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ і $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$ фіксовані базиси відповідно простору L^n і простору L^m.

Якщо розклад вектора $A(\vec{p}_i)$ в базисі $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$ має вигляд

$$A(\vec{p}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{q}_j \text{ , } (i=1,2,...,n)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$A(\vec{p}_1) = a_{11}\vec{q}_1 + a_{21}\vec{q}_2 + \ldots + a_{m1}\vec{q}_m = (\vec{q}_1 \ldots \vec{q}_m)\begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

$$A(\vec{p}_2) = a_{12}\vec{q}_1 + a_{22}\vec{q}_2 + \ldots + a_{m2}\vec{q}_m = (\vec{q}_1 \ldots \vec{q}_m)\begin{pmatrix} a_{12} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix},$$

$$. \qquad . \qquad .$$

$$A(\vec{p}_n) = a_{1n}\vec{q}_1 + a_{2n}\vec{q}_2 + \ldots + a_{mn}\vec{q}_m = (\vec{q}_1 \ldots \vec{q}_m)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

то матриця

$$A_{qp} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

утворена із коефіцієнтів цього розкладу, називається матрицею оператора A в парі базисів $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ і $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$.

Говорять, що матриця A_{qp} задає оператор A в цій парі базисів.

Оскільки кожний вектор $\vec{x} \in L^n$ є матрицею-стовпцем X висоти n, утвореною із координат цього вектора в базисі $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$, а кожний вектор $\vec{y} \in L^m$ є матрицею-стовпцем Y висоти m, утвореною з координат цього вектора в базисі $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$, то зв'язок між координатами векторів $\vec{x}$ і $\vec{y} = A(\vec{x})$ можна записати матричними співвідношеннями:

$$Y{=}A_{qp}X, \text{ тобто } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ (i{=}1,2,...,m).$$

У випадку, якщо оператор A діє із L^n в L^n, досить зафіксувати один базис $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$. При цьому вектори $A(\vec{p}_i)$ потрібно розкласти в цьому базисі.

Якщо розклад в даному базисі має вигляд

$$A(\vec{p}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \vec{p}_j \,, \ (i{=}1,2,...,n),$$

то матриця оператора A запишеться так

$$A{=}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зв'язок між координатами векторів $\vec{x}$ і $\vec{y} = A(\vec{x})$ запишеться матричним співвідношенням

$$Y{=}AX$$

звідки випливає, що координати вектора $\vec{y}$ виражаються через координати вектора $\vec{x}$ за формулою

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ (i{=}1,2,...,n).$$

Приклад 1. Нехай $\vec{y} = E(\vec{x}) = \vec{x}$.

В будь якому базисі матриця тотожного перетворення має вигляд

$$E{=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Нехай $\vec{y} = N(\vec{x}) = \vec{0}$. В будь-якому базисі матриця нульового перетворення має вигляд

$$N{=}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Нехай $\vec{y} = A(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$.

Матриця подібного перетворення в будь-якому базисі має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Знайти матрицю лінійного оператора

$$\vec{y} = A(\vec{x}) = 2x_1\vec{e}_1 + (5x_1 - 3x_2)\vec{e}_2 - (6x_2 - x_3)\vec{e}_3.$$

Розв'язок. Вектор $\vec{y} = 2x_1\vec{e}_1 + (5x_1 - 3x_2)\vec{e}_2 - (6x_2 - x_3)\vec{e}_3$.

Тому

$$y_1=2x_1,$$
$$y_2=5x_1-3x_2,$$
$$y_3=\quad -6x_2+x_3$$

і матриця оператора має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Оператор A повертає усі вектори площини xOy навколо початку координат на кут α проти годинникової стрілки. Знайти його матрицю в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.

Розв'язок. Розглянемо дію оператора A на базисні вектори (рис.6.2).

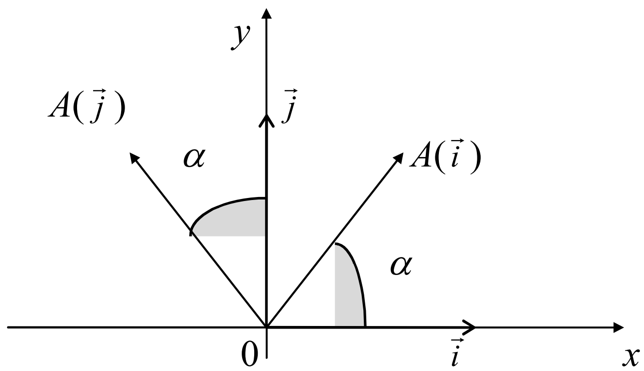

Рис.6.2

$$A(\vec{i}) = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j} = (\vec{i}\;\vec{j})\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$A(\vec{i}) = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} = (\vec{i}\;\vec{j})\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Звідки, $$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

637. Знайти в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ матриці таких лінійних операторів простору L_2.
1) $\vec{u} = A(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2$, 2) $\vec{u} = A(\vec{x}) = x_2\vec{e}_2$,
3) $\vec{u} = A(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1 + (x_1 + 2x_2)\vec{e}_2$, 4) $\vec{u} = A(\vec{x}) = (x_1 - 4x_2)\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$.
638. Знайти в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матриці таких лінійних операторів простору L_3.
1) $\vec{u} = A(\vec{x}) = (x_1, x_2, 0)$; 2) $\vec{u} = A(\vec{x}) = (x_3, x_2, x_1)$;
3) $\vec{u} = A(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3; x_1 + 3x_2 + 2x_3)$;
4) $\vec{u} = A(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3; -x_3; -x_2)$.
639. Оператор A повертає усі вектори площини xOy на кут $-\pi/2$ навколо початку координат. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.
640. Оператор A повертає усі вектори площини xOy на кут α за годинниковою стрілкою. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.
641. Оператор A повертає усі вектори площини xOy на кут $\pi/6$ навколо початку координат. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.
642. Оператор A проектує усі вектори площини xOy на пряму $y = \sqrt{3}x$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.
643. Оператор A проектує усі вектори площини xOy на пряму $y = 1/\sqrt{3}x$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.
644. Нехай A - поворот звичайного тривимірного простору на кут φ навколо осі
1) Oz 2) Oy 3) Ox.
Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
645. Оператор A ортогонально проектує усі вектори звичайного тривимірного простору на площину:
1) xOy 2) xOz 3) yOz.
Записати матрицю цього оператора в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
646. В просторі P_n многочленів від t степеня не вище n знайти матрицю оператора диференціювання в базисі $\vec{e}_0 = 1,\ \vec{e}_1 = t,\ \vec{e}_2 = \frac{t^2}{2!}, \ldots, \vec{e}_n = \frac{t^n}{n!}$.
647. Який геометричний зміст мають лінійні оператори простору E_3, матриці яких відносно деякого прямокутного базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ мають такий вигляд

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

648. Знайти матрицю A лінійного оператора, що переводить лінійно незалежні вектори

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}),$$
$$\dots$$
$$\vec{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

простору L_n відповідно у вектори

$$\vec{b}_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}),$$
$$\dots$$
$$\vec{b}_n = (b_{n1}, \dots, b_{nn}).$$

649. Знайти лінійний оператор, що переводить вектори

$$\vec{a}_1 = (2,3,5,0),\ \vec{a}_2 = (0,1,2,0),\ \vec{a}_3 = (1,0,0,0),\ \vec{a}_4 = (0,0,0,1)$$

відповідно у вектори

$$\vec{b}_1 = (1,1,1,0),\ \vec{b}_2 = (1,1,-1,0),\ \vec{b}_3 = (2,1,2,0),\ \vec{b}_4 = (0,0,0,2).$$

6.3. Дії над лінійними операторами

Нехай A і B два лінійних оператори, що діють із лінійного простору L' в лінійний простір L''.

Означення 6.2. Сумою операторів A і B називається лінійний оператор $A+B$, що визначається рівністю

$$(A + B)(\vec{x}) = A(\vec{x}) + B(\vec{x}).$$

Означення 6.3. Добутком лінійного оператора A на скаляр λ називається лінійний оператор λA, що визначається рівністю

$$(\lambda A)(\vec{x}) = \lambda\left(A(\vec{x})\right).$$

Означення 6.4. Оператор $-A=(-1)A$ називається протилежним оператору A.

Означення 6.5. Нульовим оператором, що позначається символом O, називається оператор, що відображає усі елементи простору L' в нульовий елемент простору L''.

Оператор O діє за правилом $O(\vec{x}) = \vec{0}$.

Теорема 6.1. Множина $L(L', L'')$ усіх лінійних операторів, що діють із L' в L'' з операціями суми і множення на скаляр, нульовим оператором і протилежним оператором, означеними вище, утворює лінійний простір.

Теорема 6.2. Якщо в деякому базисі $\{\vec{p}_i\}$ простору L^n і в базисі $\{\vec{q}_j\}$ простору L^m оператору A відповідає матриця A, а оператору B - матриця B, то сумі операторів $A+B$ в цих базисах відповідає матриця $A+B$.

Теорема 6.3. Якщо A - матриця оператора A в базисі $\{\vec{p}_i\}$ простору L^n і базисі $\{\vec{q}_j\}$ простору L^m, то λA - матриця оператора λA в цих базисах.

Означення 6.6. Добутком операторів A і B, що діють із L в L називається лінійний оператор AB діючий за правилом $(AB)(\vec{x}) = A(B(\vec{x}))$, тобто спочатку на вектор $\vec{x}$ діє оператор B, а потім на вектор $B(\vec{x})$ діє оператор A.

Теорема 6.4. Оператору AB відповідає добуток відповідних матриць AB.

Для оператора A, що діє із L в L, можна визначити натуральний степінь A^n як добуток n операторів, рівних A.

Задача з розв'язком

Задача. Оператор A проектує усі вектори площини на пряму $x=y$, а оператор B повертає їх навколо початку координат O на кут $\pi/4$. Як діє на вектор $\vec{x}$ оператор $A+B$? Знайти матрицю цього оператора.

Розв'язок. На рис.6.3 показано, як за даним вектором $\vec{x}$ побудувати вектор $(A+B)(\vec{x})$.

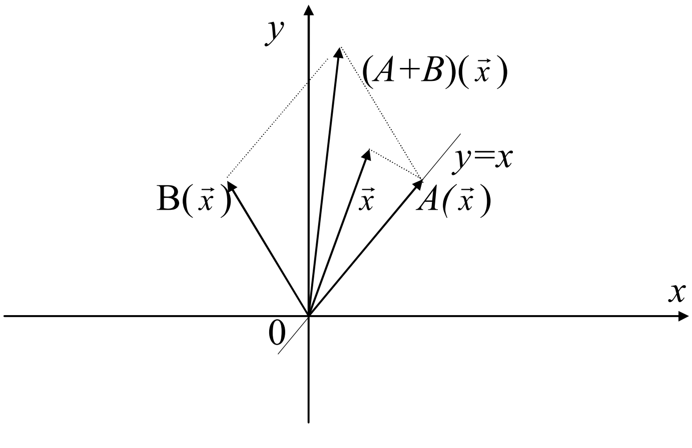

Рис. 6.3

Для того, щоб розв'язати задачу аналітично, запишемо матрицю A оператора проектування векторів площини на пряму $y=x$:

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ оскільки } \begin{array}{l} A(\vec{i}) = 1/2\vec{i} + 1/2\vec{j}, \\ A(\vec{j}) = 1/2\vec{i} + 1/2\vec{j} \end{array}$$

і матрицю B оператора повороту усіх векторів площини xOy навколо початку координат на кут $\pi/4$

$$B=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \text{ оскільки } \begin{array}{l} B(\vec{i}) = \sqrt{2}/2\vec{i} + \sqrt{2}/2\vec{j}, \\ B(\vec{j}) = -\sqrt{2}/2\vec{i} + \sqrt{2}/2\vec{j}. \end{array}$$

Тоді матриця оператора $A+B$ буде мати вигляд

$$A+B=\begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{2}\right)/2 & \left(1-\sqrt{2}\right)/2 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)/2 & \left(1+\sqrt{2}\right)/2 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб знайти координати вектора $(A+B)(\vec{x})$, потрібно помножити матрицю $A+B$ на вектор-стовпець $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, складений з координат вектора $\vec{x}$.

$$(A+B)(\vec{x})=\begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{2}\right)/2 & \left(1-\sqrt{2}\right)/2 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)/2 & \left(1+\sqrt{2}\right)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}y \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x+\frac{1-\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{i}+\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x+\frac{1+\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{j}.$$

Задачі для розв'язування

650. Дано два лінійних перетворення E^3:

$$\begin{matrix} x' = -x+4y+3z, & & & x' = -2x+6y+4{,}5z, & \\ y' = 4x+5y+z, & (A) & \text{і} & y' = 6x+7y+1{,}5z, & (B). \\ z' = 2x+8y+9z & & & z' = 3x+12y+13z & \end{matrix}$$

Знайти $3A$-$2B$.

651. Дано лінійні перетворення E^3:

$$\begin{matrix} x' = x+y, & & & x' = y+z, & \\ y' = y+z, & (A) & \text{і} & y' = x+z, & (B). \\ z' = x+z & & & z' = x+y & \end{matrix}$$

Знайти перетворення AB і BA.

652. Під дією оператора A кожний вектор площини xOy повертається на кут $\pi/3$. Знайти координатне представлення оператора $A+E$.
653. Оператор A кожний вектор площини xOy проектує на вісь Ox, а оператор B - відображає симетрично відносно бісектриси I та III координатних кутів. Знайти матриці операторів AB і BA.
654. Нехай A - оператор повороту площини xOy навколо початку координат O на кут $\pi/6$, а B - оператор проектування векторів на вісь Ox. Як діють оператори AB, BA, $A+B$? Зробити рисунок. Знайти матриці цих операторів.
655. Оператор A відображає усі вектори площини xOy симетрично відносно осі Oy і розтягує їх в два рази. Зробити рисунок. Записати матрицю цього оператора. Знайти $A\vec{x}$, де $\vec{x}=3\vec{i}+5\vec{j}$.
656. Оператор A проектує усі вектори площини xOy на пряму y=-x, а оператор B повертає їх навколо початку координат O на кут $\pi/6$. Як

діють на вектор $\vec{x}$ оператори $A+B$, $2A$, $2B$, $2A-B$? Виконати рисунок. Знайти матриці цих операторів.

657. Показати, що матриця $A=\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ визначає лінійний оператор, який повертає усі вектори площини xOy на кут $\pi/2$ і множить їх на число a.

658. В просторі усіх многочленів від t позначимо через A оператор диференціювання, а через B - оператор множення на незалежну змінну $A\left(p(t)\right)=p'(t)$, $B\left(p(t)\right)=tp(t)$. Знайти оператор AB-BA.

659. Під дією оператора A кожний вектор площини xOy повертається на кути α. Знайти матрицю оператора A^2.

660. Показати, що усякий оператор проектування задовольняє співвідношенню $P^2=P$.

6.4. **Власні числа і власні вектори лінійного оператора**

Нехай A - лінійний оператор, що діє із L^n в L^n.

Означення 6.7. Число λ називається власним числом або власним значенням оператора A, якщо існує ненульовий вектор $\vec{x}$ такий, що $A(\vec{x})=\lambda\vec{x}$.

При цьому вектор $\vec{x}$ називається власним вектором оператора A.

Надалі при розв'язуванні задач будемо розглядати лише дійсні власні числа оператора. Тоді власний вектор $\vec{x}$ характеризується тим, що даний оператор A ставить вектору $\vec{x}$ у відповідність вектор $\vec{y}$, колінеарний $\vec{x}$ (два вектори L^n називаються колінеарними, якщо їх координати пропорційні).

<u>Приклад 1</u>. Для тотожного оператора $E(\vec{x})=\vec{x}$ будь-який вектор $\vec{x}\neq 0$ є власним, власне число якого дорівнює одиниці.

<u>Приклад 2</u>. Для оператора розтягу простору E_n з коефіцієнтом розтягу λ будь-який вектор $\vec{x}\neq 0$ буде власним з власним числом λ.

<u>Приклад 3</u>. Поворот площини E_2 на кут α, відмінний від 0° і 180° дійсних власних векторів не має. Якщо ж $\alpha=0^\circ$ або 180°, то будь-який ненульовий вектор є власним. В першому випадку $\lambda=1$, в другому $\lambda=-1$.

Означення 6.8. Якщо A матриця оператора A в довільному базисі, то рівняння $|A-\lambda E|=0$ або в розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

називається характеристичним рівнянням оператора A.

Справедливі твердження.

Кожний корінь λ характеристичного рівняння є власним числом оператора A і навпаки.

Якщо λ - який-небудь із коренів характеристичного рівняння, то відповідний йому власний вектор $\vec{x}$ визначимо, розв'язавши матричне рівняння $(A\text{-}\lambda E)\vec{x}=0$, або, що теж саме, систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - координати вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$.

Означення 6.9. Якщо A - матриця оператора A в деякому базисі, то власні числа і вектори оператора A називаються власними числами і власними векторами матриці A в цьому базисі.

Задача з розв'язком

Задача. Знайти власні вектори і власні числа лінійного оператора, який в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ простору L^3 має вигляд

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= 6x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ y_3 &= \qquad 2x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 6(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 12\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1, \\ \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{23}i}{2}. \end{array}\right.$$

Власний вектор, відповідний єдиному дійсному значенню $\lambda=1$, знаходимо з системи

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

з останнього рівняння системи знаходимо $x_2=-x_3$, із другого рівняння маємо $6x_1=4x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_3$.

Таким чином, власному значенню $\lambda=1$ відповідають власні вектори $\vec{x} = \frac{2}{3}x_3\vec{e}_1 - x_3\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, де x_3 - довільне число, що не дорівнює нулю.

Задачі для розв'язування

661. Виходячи з геометричного змісту оператора, знайти власні вектори і власні числа таких лінійних операторів площини:
   1) $\vec{u} = A(\vec{x})$ - симетричне відображення відносно прямої a;
   2) $\vec{u} = A(\vec{x}) = \lambda x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ - геометричний розтяг площини в напрямку вектора $\vec{e}_1$;
   3) $\vec{u} = A(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1 + (x_2 + kx_1)\vec{e}_2$ - зсув площини в напрямку вектора $\vec{e}_2$.

   В задачах № 662, 663 знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, який в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має вигляд:

662. $y_1=3x_1+4x_2,$
$y_2=5x_1+2x_2.$

663. $y_1=x_1+x_2,$
$y_2=\quad x_2.$

   В задачах № 664, 665 знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, який в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ має вигляд:

664. $y_1=4x_1-5x_2+7x_3,$
$y_2=x_1-4x_2+9x_3,$
$y_3=-4x_1\quad +5x_3.$

665. $y_1=2x_1-x_2-x_3,$
$y_2=x_1+2x_2+x_3,$
$y_3=-2x_1+x_2+2x_3.$

   В задачах №№ 666-675 знайти власні вектори і власні значення лінійних операторів площини L^2 і простору L^3, яким в деякому базисі відповідають матриці.

666. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. 667. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 668. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 669. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. 670. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

671. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 672. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 673. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$. 674. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

675. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

676. Знайти власні значення і власні вектори оператора A, під дією якого кожний вектор площини xOy повертається на кут α проти годинникової стрілки.

677. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ простору L^4 матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

678. Знайти матрицю лінійного оператора, власними значеннями якого є числа 2, -3, 5, -1, а відповідні їм власні вектори (1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1).

6.5. **Перетворення матриці лінійного оператора при переході до нового базису**

Нехай в n-вимірному лінійному просторі L^n зафіксовано два базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ і матриця

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ (п.2.2.3).

Якщо A і $\dot{A}$ матриці оператора A відповідно у базисах $\{\vec{e}_k\}$ і $\{\dot{\vec{e}}_k\}$, то зв'язок між цими матрицями виражається такою рівністю

$$\dot{A} = C^{-1}AC.$$

Якщо $\{\vec{e}_k\}$ і $\{\dot{\vec{e}}_k\}$ - ортонормовані базиси E^n, то матриця C - ортогональна. Тоді $\dot{A} = C^{\mathrm{T}}AC$.

Задача з розв’язком

Задача. Дано координатне представлення деякого лінійного оператора в базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $u_1=x_1-x_2$, $u_2=2x_1+x_2$.

Знайти координатне представлення того ж оператора в базисі $\overset{\bullet}{\vec{e}}_1, \overset{\bullet}{\vec{e}}_2$, де

$$\overset{\bullet}{\vec{e}}_1 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,$$

$$\overset{\bullet}{\vec{e}}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

Розв’язок. Маємо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|C|=1\neq 0$, то $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ - дійсно утворюють базис і існує

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

За формулою

$$\overset{\bullet}{A}=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 & -11 \\ 33 & 20 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, даний лінійний оператор в новому базисі має координатне представлення

$$\overset{\bullet}{u}_1 = -18\overset{\bullet}{x}_1 - 11\overset{\bullet}{x}_2,$$

$$\overset{\bullet}{u}_2 = 33\overset{\bullet}{x}_1 + 20\overset{\bullet}{x}_2.$$

Задачі для розв’язування

679. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ лінійний оператор A має матрицю $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$.

680. Дано координатне представлення деякого лінійного оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $u_1=x_1+2x_2$, $u_2=3x_1+4x_2$. Знайти координатне представлення того ж оператора в базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, де

   1) $\vec{e}_1' = 11\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. 2) $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

681. Дано координатне представлення лінійного оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $u_1=x_1+x_2$, $u_2=x_1+x_3$, $u_3=x_2+x_3$.

   Знайти координатне представлення цього оператора в базисі

   1) $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

   2) $\vec{e}_1' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

682. Оператор A на площині xOy проектує усі вектори на вісь Oy і потім симетрично відображає їх відносно прямої $y=x$. Записати його матрицю в базисах $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{e}_1' = 5\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{e}_2' = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

683. Оператор A на площині xOy симетрично відображає усі вектори відносно осі Oy. Записати його матриці в базисах $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{e}_1' = \vec{i} + \vec{j},\ \vec{e}_2' = \vec{i} - \vec{j}$.

684. В базисі 1, t, t^2 простору P_2 оператор A заданий матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю цього оператора в базисі, утвореному з многочленів $3t^2+2t,\ 5t^2+3t+1,\ 7t^2+5t+3$.

685. Лінійний оператор A простору E_3 в базисі $\vec{b}_1$=(8,-6,7), $\vec{b}_2$=(-16,7,-13), $\vec{b}_3$=(9,-3,7) має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 25 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\vec{b}_1'$=(1,-2,1), $\vec{b}_2'$=(3,-1,2), $\vec{b}_3'$=(2,1,2).

6.6. **Матриця лінійного оператора в базисі з власних векторів**

Нехай A - лінійний оператор, що діє із L^n в L^n.

Теорема 6.5. Якщо матриця A лінійного оператора A в деякому базисі $\{\vec{p}_k\}$ діагональна і має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то вектори $\vec{p}_k$ є власними векторами оператора A, а числа λ_k - власними числами оператора A, що відповідають векторам $\vec{p}_k$.

Теорема 6.6. Якщо базисні вектори $\vec{p}_k$ базису $\{\vec{p}_k\}$ є власними векторами лінійного оператора A і λ_k - відповідні їм власні числа, то матриця A цього оператора в базисі $\{\vec{p}_k\}$ діагональна і має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.7. Якщо власні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ лінійного оператора A попарно різні, то відповідні їм власні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ - лінійно незалежні і матриця A оператора A в базисі векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Задача з розв'язком

Задача. Лінійний оператор A в площині L^2 в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має матрицю

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Шляхом переходу до нового базису привести цю матрицю до діагонального вигляду (якщо це можливо).

Розв'язок. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -3, \\ \lambda = 2. \end{array}\right.$$

Корені характеристичного рівняння різні, отже, матрицю можна привести до діагонального вигляду.

Визначимо власні вектори

1) λ=-3, $\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$

Звідки $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases}$. Тому $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ - власний вектор, відповідний власному числу λ=-3.

2) λ=2, $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 = 0. \end{cases}$

Звідки $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases}$. Тому $\vec{a}_2 = 7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ - власний вектор, відповідний власному числу λ=2.

Якщо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ прийняти за базис, то в цьому базисі матриця оператора A буде мати вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 686-689 лінійний оператор A площини L^2 в деякому базисі має матрицю A. Шляхом переходу до нового базису привести цю матрицю до діагонального вигляду (якщо це можливо).

686. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. 687. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 688. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 689. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 690-692 лінійному оператору A простору L^3 в деякому базисі відповідає матриця A. Шляхом переходу до нового базису привести цю матрицю до діагонального вигляду.

690. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 691. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. 692. $A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 693-696 виявити, які з матриць лінійних операторів можна привести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю.

693. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 694. $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 695. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

696. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

6.7. Самоспряжений (симетричний) оператор і його матриця. Власні числа і власні вектори самоспряженого оператора

Нехай A - лінійний оператор, що діє з E^n в E^n.

Означення 6.10. Оператор A^*, що діє з E^n в E^n називається спряженим до лінійного оператора A, якщо для будь-яких $\vec{x}$ і $\vec{y} \in E^n$ виконуються співвідношення

$$\langle A(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^*(\vec{y}) \rangle.$$

Твердження 6.1. Оператор A^*, спряжений до лінійного оператора A, сам є лінійним.

Означення 6.11. Лінійний оператор A називається самоспряженим, якщо $A^*=A$, тобто якщо $\langle A(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A(\vec{y}) \rangle$.

Приклад. Тотожний оператор E є самоспряженим оператором.

Теорема 6.8. В будь-якому ортонормованому базисі дійсного евклідового простору самоспряжений лінійний оператор, і тільки таий оператор, має симетричну матрицю.

Тому у випадку дійсного евклідового простору самоспряжений оператор називається також симетричним оператором.

Теорема 6.9. Усі власні числа симетричного лінійного оператора - дійсні числа.

Теорема 6.10. Власні вектори симетричного лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, взаємно ортогональні. Якщо деяке власне число в характеристичному рівнянні має кратність k, то можна указати k взаємно ортогональних власних векторів, що відповідають цьому власному значенню.

Теорема 6.11. Симетричний лінійний оператор простору E^n має n взаємно ортогональних власних векторів.

З теореми 6.11 випливає наявність в E^n базиса із n взаємно ортогональних власних векторів оператора A (отже, і ортонормованого базису). В цьому базисі матриця A оператора A має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - власні числа оператора A, повторені стільки раз, яка кратність кожного із них в характеристичному рівнянні.

Теорема 6.12. Матрицю симетричного лінійного оператора можна привести до діагонального вигляду шляхом ортогонального перетворення базису.

Приклад. Нехай A - симетричний лінійний оператор, що діє в просторі E^3. Тоді характеристичне рівняння буде рівнянням третього степеня і мати три дійсних корені.

а) Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - усі різні, то кожний вектор трійки взаємно ортогональних одиничних власних векторів визначається єдиним способом з точністю до знака. При цьому оператор A представляє собою сукупність трьох геометричних розтягів (стисків) в трьох взаємно перпендикулярних напрямках.

б) Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то існує визначений з точністю до знака одиничний власний вектор $\vec{e}_1'$, відповідний власному числу λ_1, двократному кореню λ відповідає нескінчена множина одиничних власних векторів, причому усі вони лежать в одній площині, перпендикулярній до $\vec{e}_1'$. При цьому симетричний лінійний оператор представляє собою добуток двох перетворень: подібності з коефіцієнтом

λ в площині перпендикулярній вектору $\vec{e}_1'$ і розтягу (стиску) с коефіцієнтом λ_1, вздовж цієї осі.

в) Якщо $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, то будь-який вектор простору буде власним. Оператор A є подібність в просторі з коефіцієнтом, що дорівнює λ. За базис можна узяти будь-яку трійку одиничних попарно ортогональних векторів.

Отже, для будь-якого симетричного оператора в просторі E^3 можна знійти базис, складений з одиничних взаємно перпендикулярних власних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Задача з розв'язком

Задача. В ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дано лінійний оператор $\vec{u} = A(\vec{x})$: $u_1=7x_1+4x_2$, $u_2=4x_1+x_2$.

Привести матрицю цього оператора до діагонального вигляду шляхом переходу до нового ортонормованого базису.

Розв'язок. Матриця $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ даного оператора симетрична, тому поставлена задача має розв'язок. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння матриці A.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0.$$

Корені цього рівняння λ_1=-1, λ_2=9.

Власні вектори знаходимо з системи

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При λ_1=-1 одержимо

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

За її розв'язок можна взяти x_1=1, x_2=-2.

Нормуючи цей розв'язок, знаходимо одиничний власний вектор, відповідний власному значенню λ_1=-1:

$$\vec{e}_1' = 1/\sqrt{5}\vec{e}_1 - 2/\sqrt{5}\vec{e}_2.$$

При λ_2=9 одержимо

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідки x_1=2, x_2=1 і $\vec{e}_2' = 2/\sqrt{5}\vec{e}_1 + 1/\sqrt{5}\vec{e}_2$.

В базисі $\vec{e}_1'$ і $\vec{e}_2'$ матриця даного лінійного оператора має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

697. В ортогональному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дано лінійний оператор $u_1=6x_1+2x_2$, $u_2=2x_1+3x_2$. Привести матрицю цього оператора до діагонального вигляду шляхом переходу до нового ортогонального базису.

698. В ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ лінійний оператор площини E^2 має матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти новий ортонормований базис, в якому матриця оператора буде діагональною. Знайти цю матрицю.

В задачах №№ 699-702 знайти новий ортонормований базис, в якому матриця оператора буде діагональною, знайти цю матрицю, якщо в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійний оператор A простору E^3 має матрицюA.

699. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 700. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. 701. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 702. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 703, 704 шляхом переходу до нового ортонормованого базису привести матрицю даного оператора до діагонального вигляду. Оператор заданий в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

703. $u_1=x_1+2x_2-4x_3$,
$u_2=2x_1-2x_2-2x_3$,
$u_3=-4x_1-2x_2+x_3$.

704. $u_1=2x_1 \quad +4x_3$,
$u_2= \quad 6x_2$,
$u_3=4x_1 \quad +2x_3$.

6.8. **Ядро і область значень лінійного оператора**

Нехай A - лінійний оператор, що діє з лінійного простору L в L.

Означення 6.12. Образом або областю значень лінійного оператора A називається множина усіх елементів $\vec{y}$ простору L, представлених у вигляді $\vec{y} = A(\vec{x})$.

Образ лінійного оператора позначають символом imA.

Означення 6.13. Ядром лінійного оператора A називається множина усіх тих елементів $\vec{x}$ простору L, для яких $A(\vec{x}) = 0$.

Ядро лінійного оператора позначають символом $kerA$.

Теорема 6.13. Ядро $kerA$ і образ imA - лінійні підпростори простору L.

Означення 6.14. Розмірність підпростору *imA* називається рангом оператора *A*; розмірність підпростору *kerA* називається дефектом оператора *A*.

Теорема 6.14. Нехай *A* лінійний оператор, що діє із L^n в L^n. Тоді розмірність *n* простору L^n дорівнює сумі рангу і дефекту лінійного оператора *A*.

Теорема 6.15. Ранг лінійного оператора *A* дорівнює рангу матриці *A* цього оператора.

Приклад. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Геометрично цю задачу можна тлумачити так.

Візьмемо довільний *n*-вимірний лінійний простір L^n і виберемо в ньому який-небудь базис. Умовимось невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ðîçóì³òè ÿê êîîðäèíàòè äåÿêîãî âåêòîðà $\vec{x} \in L^n$ ó âèáðàíîìó áàçèñ³. Ðîçãлянемо лінійний оператор *A* цього простору, який має своєю матрицею матрицю $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$. Тоді систему рівнянь (6.1) можна переписати у вигляді $A\vec{x}=0$ або в операторній формі $A(\vec{x})=0$.

Звідси видно, що розв'язками системи (6.1) є координати векторів, які належать ядру оператора *A*. Оскільки розмірність ядра є дефект оператора, а дефект оператора дорівнює дефекту його матриці, то приходимо до твердження:

Максимальне число лінійно незалежних розв'язків однорідної системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими дорівнює дефекту матриці цієї системи.

Зауваження 6.3. Дефектом матриці називається різниця між її порядком і рангом.

Нехай *A* - самоспряжений оператор, що діє в *n*-вимірному евклідовому просторі E^n і $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n$ - його власні значення, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - ортонормований базис, складений з власних векторів, відповідних $\{\lambda_i\}$.

Тоді оператор *A* можна представити у вигляді:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$$

або в розгорнутому вигляді

$$A=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\ldots+\lambda_n P_n, \tag{6.2}$$

де оператор P_k визначається співвідношенням $P_k(\vec{x}) = x_k\vec{e}_k$ і його матриця P має вигляд $P=(p_{ij})$, в якій елемент $p_{kk}=1$, а інші елементи дорівнюють нулю.

Рівність (6.2) називають спектральним розкладом самоспряженого вектора.

Сукупність коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ спектрального розкладу називається його спектром. Спектром лінійного оператора називається спектр його спектрального розкладу.

Для самоспряженого оператора спектр оператора збігається з сукупністю його власних значень.

Задача з розв'язком

Задача. Позначимо через A операцію ортогонального проектування вектора простору E^3 на площину xOy цього простору. Знайти ранг і дефект оператора A.

Розв'язок. Зауважимо, що A - лінійний оператор. Оператор A переводить простір E^3 в площину xOy. При цьому площина xOy є область значень оператора A. Отже, ранг A дорівнює двом. Ядро оператора A складається з векторів, які лежать на прямій, що проходять через початок координат перпендикулярно до площини xOy, так як ці і тільки ці вектори переводяться оператором A в нуль. Отже, дефект дорівнює одиниці. Сума рангу і дефекта оператора A дорівнює трьом.

Задачі для розв'язування

705. Знайти ядро лінійних функціоналів тривимірного евклідового простору:

    1) $A(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ 2) $A(\vec{x}) = \langle [\vec{a}\vec{x}], \vec{b} \rangle$,

    де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - фіксовані вектори простору E^3, $\vec{x}$ - довільний вектор простору E^3.

706. Знайти образ, ядро лінійного оператора в тривимірному евклідовому просторі, заданого формулою $A(\vec{x}) = [\vec{x}\vec{a}]$, де $\vec{a}$ - фіксований вектор E^3.

707. Описати образ і ядро оператора диференціювання в просторі P_n.

В задачах №№ 708-711 знайти ядро, область значень, ранг і дефект лінійних операторів простору E^2 і E^3, які в деякому прямокутному базисі мають матриці

708. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 709. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 710. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 711. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В задачах №№ 712-714 знайти ядро і область значень лінійних операторів, заданих матрицями A, якщо в просторі L_4 дано базис $\vec{e}_1$=(1,0,0,0), $\vec{e}_2$=(0,1,0,0), $\vec{e}_3$=(0,0,1,0). $\vec{e}_4$=(0,0,0,1).

712. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 713. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 714. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

715. Знайти ядро лінійного оператора, заданого матрицею $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, якщо в просторі L_4 дано базис $\vec{e}_1$=(1,0,0,0), $\vec{e}_2$=(0,1,0,0), $\vec{e}_3$=(0,0,1,0). $\vec{e}_4$=(0,0,0,1).