7. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

7.1. Квадратична форма. Матриця квадратичної форми. Перетворення матриці квадратичної форми при переході до нового базису

Означення 7.1. Квадратичною формою від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен другого степеня відносно цих змінних

$$F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{7.1}$$

або в розгорнутому вигляді

$$F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2.$$

Зауваження 7.1. Надалі будемо вважати, що змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є координатами вектора $\vec{x}$ простору L^n, в якому зафіксовано деякий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Тоді квадратична форма буде функцією $F(\vec{x})$, що задана на L^n з значеннями в R.

Означення 7.2. Симетрична матриця, складена з коефіцієнтів квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

називається матрицею квадратичної форми.

За допомогою матриці A квадратичну форму можна записати в матричному вигляді

$$F(\vec{x}) = X^T A X,$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$.

<u>*Твердження 7.1.*</u> Якщо A - матриця квадратичної форми $F(\vec{x})$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ простору L^n, то в базисі $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n$ простору L^n матриця $\dot{A}$ квадратичної форми $F(\vec{x})$ має вигляд

$$\dot{A} = C^T A C, \tag{7.2}$$

де C - матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ (п.2.2.3). При цьому

$$F(\vec{x}) = \dot{X}^T \dot{A} \dot{X}, \; X = C\dot{X}, \; \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{pmatrix},$$

де $\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n$ - координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$.

Зауваження 7.2. Нехай змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ у квадратичній формі $F(\vec{x})$ є координатами вектора $\vec{x}$ в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ простору E^n і нехай матриця C є ортогональною матрицею переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до ортонормованого базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$. Тоді, якщо A - матриця лінійного симетричного оператора A в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, то матриця $\dot{A}$ того ж оператора A в базисі $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ має вигляд $\dot{A} = C^T AC$, оскільки $C^T = C^{-1}$. В цьому випадку перетворення матриці A лінійного симетричного оператора A збігається з перетворенням матриці A квадратичної форми $F(\vec{x})$. Тому, якщо в деякій ортонормованій системі координат простору E^n матриця лінійного симетричного оператора A дорівнює матриці квадратичної форми $F(\vec{x})$, то ця рівність має місце в будь-якій іншій ортонормованій системі координат E^n.

Задачі з розв'язком

Задача 1. Записати матрицю квадратичної форми

$$F(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_2^2 + x_3^2, \quad \vec{x} \in L^3.$$

Розв'язок. Оскільки a_{11}=1, $2a_{12}$=-2, $2a_{13}$=-1, a_{22}=3, $2a_{23}$=0, a_{33}=1, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. В деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ простору L^2 квадратична форма має вигляд $F(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 56x_2^2$. Знайти вигляд $F(\vec{x})$ в базисі $\dot{\vec{e}}_1$ і $\dot{\vec{e}}_2$, якщо $\dot{\vec{e}}_1 = \vec{e}_1$, $\dot{\vec{e}}_2 = -5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Розв'язок. Складемо матрицю A квадратичної форми в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та матрицю C переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2$. Маємо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 56 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $\dot{A}$ квадратичної форми в базисі $\dot{\vec{e}}_1$ і $\dot{\vec{e}}_2$ знайдемо з співвідношення (7.2)

$$\dot{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 41 \end{pmatrix}.$$

Тоді квадратична форма $F(\vec{x})$ в базисі $\dot{\vec{e}}_1$, $\dot{\vec{e}}_2$ має вигляд

$$F(\vec{x})=\dot{x}_1^2-2\dot{x}_1\dot{x}_2+41\dot{x}_2^2.$$

Задача 3. В ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ простору E^3 дано квадратичну форму $F(\vec{x})=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$. Знайти матрицю $F(\vec{x})$ в ортонормованому базисі $\dot{\vec{i}},\ \dot{\vec{j}},\ \dot{\vec{k}}$, якщо

$$\dot{\vec{i}}=1/\sqrt{3}\,\vec{i}-1/\sqrt{3}\,\vec{j}+1/\sqrt{3}\,\vec{k},$$

$$\dot{\vec{j}}=1/\sqrt{6}\,\vec{i}-1/\sqrt{6}\,\vec{j}-2/\sqrt{6}\,\vec{k},$$

$$\dot{\vec{k}}=1/\sqrt{2}\,\vec{i}+1/\sqrt{2}\,\vec{j}.$$

Розв’язок. Запишемо матрицю A квадратичної форми $F(\vec{x})$ та матрицю C переходу від одного базису до іншого.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді за допомогою (7.2)

$$\dot{A}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 7.3. Матриця $\dot{A}$ має діагональний вигляд. Отже, базис $\dot{\vec{i}},\ \dot{\vec{j}},\ \dot{\vec{k}}$ складений з власних векторів симетричного лінійного оператора, якому відповідає матриця A .

Задачі для розв'язування

У задачах №№ 716-721 знайти матриці даних квадратичних форм в новому базисі.

716. $F(\vec{x})=2x_1^2-6x_1x_2+x_2^2$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_1=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_2=\vec{e}_1+4\vec{e}_2$.

717. $F(\vec{x})=x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2$

$\overset{\bullet}{\vec{i}}=1/\sqrt{5}\,\vec{i}+2/\sqrt{5}\,\vec{j}$,

$\overset{\bullet}{\vec{j}}=-2/\sqrt{5}\,\vec{i}+1/\sqrt{5}\,\vec{j}$

718. $F(\vec{x})=6x_1x_2-x_2^2$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_1=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_2=-\vec{e}_1$.

719. $F(\vec{x})=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-x_3^2$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_3$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\quad \overset{\bullet}{\vec{e}}_3=-\vec{e}_2$.

720. $F(\vec{x})=x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$,

$\overset{\bullet}{\vec{e}}_2=\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\quad \overset{\bullet}{\vec{e}}_3=\vec{e}_2$.

721. $F(\vec{x})=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$,

$\overset{\bullet}{\vec{i}}=1/3\,\vec{i}+2/3\,\vec{j}+2/3\,\vec{k}$,

$\overset{\bullet}{\vec{j}}=-2/3\,\vec{i}-1/3\,\vec{j}+2/3\,\vec{k}$,

$\overset{\bullet}{\vec{k}}=2/3\,\vec{i}-2/3\,\vec{j}+1/3\,\vec{k}$.

7.2. Канонічний вигляд квадратичної форми. Метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Означення 7.3. Квадратична форма (7.1) має канонічний вигляд, якщо $a_{ij}=0$ при $i\neq j$.

<u>*Приклад*</u>. При $n=4$ квадратична форма $F(\vec{x})=2x_1^2-x_3^2+5x_4^2$ має канонічний вигляд.

Метод Лагранжа дозволяє за допомогою невиродженого лінійного перетворення координат n-вимірного лінійного простору L^n привести квадратичну форму (7.1) до канонічного вигляду

$$F(\vec{x})=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+\ldots+\lambda_n\eta_n^2$$

в якому $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ - координати вектора $\vec{x}$ в новому базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$.

Пояснимо ідею методу Лагранжа.

Нехай коефіцієнт при квадраті однієї з координат вектора $\vec{x}$ у формі (7.1) відмінний від нуля. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_{11}\neq 0$.

Доповнимо члени, що містять x_1 у (7.1) до повного квадрату. Тоді (7.1) набуде вигляду

$$F(\vec{x})=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}^{*}x_i x_j\,.$$

За допомогою невиродженого лінійного перетворення координат в L^n

$$x_1'=x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,\;\; x_2'=x_2,\;\ldots,\; x_n'=x_n$$

форма (7.1) запишеться у вигляді

$$F(\vec{x})=a_{11}x_1'^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}^{*}x_i'x_j'\,.$$

Тепер задача спрощується і зводиться до зведення квадратичної форми $\sum\limits_{i,j=2}^{n}a_{ij}^{*}x_i'x_j'$, що залежить вже від ($n$-1) змінних $x_2', x_3', \ldots, x_n'$ до канонічного вигляду.

Якщо усі коефіцієнти при квадратах координат у (7.1) дорівнюють нулеві і, наприклад, $a_{12}\neq 0$, то після лінійного невиродженого перетворення в L^n

$$x_1'=x_1-x_2,\quad x_2'=x_1+x_2,\quad x_i'=x_i,\quad i=\overline{3,\,n}$$

коефіцієнт при $x_2'^2$ буде дорівнювати $a_{12}/2$ і відмінний від нуля.

Задача з розв'язком

Задача. Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду такі квадратичні форми:

1) $F(\vec{x})=2x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$,

2) $F(\vec{x})=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

Розв'язок. 1) Нехай $F(\vec{x})=2x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$. Зауважимо, що коефіцієнт при x_1^2 не дорівнює 0. Доповнимо члени, що містять x_1 до повного квадрата. Одержимо

$$F(\vec{x})=2\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)-2x_2^2+3x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2=$$
$$=2(x_1+x_2)^2+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2=2(x_1+x_2)^2+F_1(\vec{x})$$

де $F_1(\vec{x})=x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$.

Застосуємо до $F_1(\vec{x})$ той же прийом. Одержимо

$$F_1(\vec{x})=(x_2+2x_3)^2+x_3^2\,.$$

Після цього $F(\vec{x})$ приймає канонічний вигляд

$$F(\vec{x})=2x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2,$$

де $x_1'=x_1+x_2,\quad x_2'=x_2+2x_3,\quad x_3'=x_3$.

Останні формули задають невироджене лінійне перетворення координат вектора в L^3 при переході до нового базису, в якому квадратична форма $F(\vec{x})$ має канонічний вигляд

$$F(\vec{x})=2x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2.$$

<u>*Перевірка:*</u> $2x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=2(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2=$

$$=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3=F(\vec{x}).$$

2) Нехай тепер $F(\vec{x})=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

У цьому випадку всі коефіцієнти $F(\vec{x})$ при квадратах координат дорівнюють нулеві. Тому розглянемо таке невироджене перетворення координат в L^3

$$x_1'=x_1-x_2,\quad x_2'=x_1+x_2,\quad x_3'=x_3.$$

Виразимо x_1 та x_2 через x_1' та x_2' і підставимо в $F(\vec{x})$. Одержимо

$$x_1=\frac{x_1'+x_2'}{2},\quad x_2=\frac{x_2'-x_1'}{2}.$$

$$F(\vec{x})=\frac{1}{4}\left(x_1'+x_2'\right)\left(x_2'-x_1'\right)+\frac{1}{2}x_3'\left(x_1'+x_2'\right)+\frac{1}{2}x_3'\left(x_2'-x_1'\right)=$$

$$=\frac{1}{4}x_2'^2-\frac{1}{4}x_1'^2+\frac{1}{2}x_1'x_3'+\frac{1}{2}x_2'x_3'+\frac{1}{2}x_2'x_3'-\frac{1}{2}x_1'x_3'=\frac{1}{4}x_2'^2-\frac{1}{4}x_1'^2+x_2'x_3'.$$

Після цього перетворення коефіцієнт при $x_2'^2$ відмінний від нуля. Доповнимо до повного квадрата члени, що містять x_2'. Тоді

$$F(\vec{x})=\frac{1}{4}\left(x_2'^2+4x_2'x_3'+4x_3'^2\right)-x_3'^2-\frac{1}{4}x_1'^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x_2'+2x_3'\right)^2-x_3'^2-\frac{1}{4}x_1'^2=\frac{1}{4}x_2''^2-\frac{1}{4}x_1''^2-x_3''^2$$

де $x_1''=x_1'=x_1-x_2,\quad x_2''=x_2'+2x_3'=x_1+x_2+2x_3,\quad x_3''=x_3'=x_3.$

<u>*Перевірка*</u>: $\frac{1}{4}x_2''^2-\frac{1}{4}x_1''^2-x_3''^2=\frac{1}{4}\left(x_1+x_2+2x_3\right)^2-\frac{1}{4}\left(x_1-x_2\right)^2-x_3^2=$

$$=\frac{1}{4}\left(x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_1x_2\right)-\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{4}x_2^2-x_3^2=$$

$$=\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+x_3^2+x_1x_3+x_2x_3+\frac{1}{2}x_1x_2-x_3^2-\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{4}x_2^2=$$

$$=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=F(\vec{x}).$$

Задачі для розв'язування

В задачах №722-731 методом Лагранжа знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду такі квадратичні форми (лінійне перетворення визначено не однозначно).

722. $F(\vec{x})=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

723. $F(\vec{x})=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

724. $F(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

725. $F(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2$.

726. $F(\vec{x}) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

727. $F(\vec{x}) = -4x_1x_2$.

728. $F(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$.

729. $F(\vec{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

730. $F(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

731. $F(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

7.3. Метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Нехай $A=(a_{ij})$ - матриця квадратичної форми (7.1) в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ n-вимірного лінійного простору L^n.

Позначимо через $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$ кутові мінори матриці A, тобто покладемо

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ . \ . \ . \ , \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Припустимо, що мінори $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$ відмінні від нуля. Тоді існує невироджене трикутне перетворення базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ виду

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1,$$
$$\vec{f}_2 = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$
$$..................$$
$$\vec{f}_n = \alpha_{n1}\vec{e}_1 + \alpha_{n2}\vec{e}_2 + ... + \alpha_{nn-1}\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n,$$

що переводить базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n$, таке, що квадратична форма $F(\vec{x})$ приймає в базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n$ канонічний вигляд

$$F(\vec{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + ... + \lambda_n\eta_n^2.$$

При цьому коефіцієнти α_{ji} перетворення базисних векторів визначаються за формулами

$$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i}\frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}},$$

де $\Delta_{j-1,i}$ - мінор матриці A, розташований на перетині рядків цієї матриці з номерами 1, 2, ..., j-1 та стовпців з номерами 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., j, а канонічні коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ визначаються за формулами

$$\lambda_1 = \Delta_1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ \ldots, \ \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

де Δ_n - визначник матриці A.

Задача з розв’язком

Задача. Методом Якобі звести квадратичну форму $F(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2$ до канонічного вигляду.

Розв’язок. Складемо матрицю квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори та визначник матриці A

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Визначимо канонічні коефіцієнти

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 4, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 1.$$

Тоді квадратична форма $F(\vec{x})$ буде мати канонічний вигляд

$$F(\vec{x}) = \eta_1^2 + 4\eta_2^2 + \eta_3^2.$$

Визначимо коефіцієнти α_{ji} перетворення базисних векторів

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{0}{1} = 0,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^5 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

Трикутне перетворення базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, що зводить $F(\vec{x})$ до канонічного вигляду, має вигляд

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Виразимо нові координати η_1, η_2, η_3 через старі x_1, x_2, x_3.

Запишемо матрицю C переходу від старого базису до нового

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\vec{x}$ в новому базисі знайдуться за допомогою формули

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \eta_1 - \eta_3, \\ x_2 = \eta_2, \\ x_3 = \eta_3. \end{cases}$$

Звідки $\eta_1 = x_1 + x_3$,

$\eta_2 = x_2$,

$\eta_3 = x_3$.

Задачі для розв'язування

В задачах №732-734 методом Якобі звести до канонічного вигляду квадратичні форми, не знаходячи самого трикутного перетворення.

732. $F(\vec{x})=9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3$.

733. $F(\vec{x})=11x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-12x_1x_2+12x_1x_3-6x_2x_3$.

734. $F(\vec{x})=x_1^2+2x_2^2+2x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

В задачах №735-737 знайти трикутне перетворення, що зводить квадратичні форми до канонічного вигляду, записати цей канонічний вигляд та виразити нові невідомі через старі.

735. $F(\vec{x})=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

736. $F(\vec{x})=5x_1^2+5x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$.

737. $F(\vec{x})=3x_1^2+3x_2^2-x_3^2-6x_1x_3+4x_2x_3$.

7.4. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення

Будемо вважати, що квадратична форма (7.1) визначена в E^n і змінні x_i - координати вектора $\vec{x}$ в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Тоді квадратична форма (7.1) може бути зведена до канонічного вигляду за допомогою переходу до ортонормованого базису, складеного з одиничних власних векторів симетричного лінійного оператора A, що відповідає формі (7.1). В такому базисі матриця оператора A стане діагональною

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - власні значення, що відповідають векторам базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$. Квадратична форма в новому базисі набере вигляду

$$F(\vec{x}) = \dot{X}^T \dot{A} \dot{X} = \lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n \dot{x}_n^2 .$$

Задача з розв'язком

Задача. Знайти ортогональне перетворення ортонормованого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ площини E^2, що зводить квадратичну форму $F(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ до канонічного вигляду і записати цей канонічний вигляд.

Розв'язок. Виписуємо матрицю квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda = 0, \\ \lambda = 5. \end{array}\right.$$

Дана квадратична форма має такий канонічний вигляд:

$$F(\vec{x}) = 5\dot{x}_2^2 .$$

Щоб знайти базис, в якому квадратична форма має такий вигляд, треба знайти власні вектори лінійного оператора A, якому відповідає матриця A. Записуємо систему рівнянь, що визначають шукані власні вектори

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи $\lambda = \lambda_1 = 0$, одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases}$ або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$, де $x_2 \in (-\infty, +\infty)$.

Якщо покласти x_2=1, то дістанемо $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - власний вектор A. Відповідний вектору $\vec{a}_1$ одиничний вектор буде $\dot{\vec{e}}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Підставляючи $\lambda = \lambda_2 = 5$, одержимо

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x_1 = 1/2\, x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases}$ або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2, \quad x_2 \in (-\infty, +\infty)$.

Покладемо x_2=2. Одержимо $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ - другий власний вектор A. Нормуючи його, знаходимо одиничний власний вектор $\dot{\vec{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Вектори $\dot{\vec{e}}_1,\ \dot{\vec{e}}_2$ становлять шуканий ортонормований базис. При переході до нового базису $\dot{\vec{e}}_1,\ \dot{\vec{e}}_2$ координати всіх векторів перетворюються за формулами

$$x_1 = -2/\sqrt{5}\,\dot{x}_1 + 1/\sqrt{5}\,\dot{x}_2,$$
$$x_2 = 1/\sqrt{5}\,\dot{x}_1 + 2/\sqrt{5}\,\dot{x}_2.$$

Або в матричній формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \text{ де } C = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

В задачах №№738-744 знайти канонічний вигляд, до якого зводяться такі квадратичні форми за допомогою ортогонального перетворення, не відшукуючи самого перетворення.

738. $F(\vec{x}) = x_1x_2$.
739. $F(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
740. $F(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.
741. $F(\vec{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
742. $F(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
743. $F(\vec{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
744. $F(\vec{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В задачах №№745-752 знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичні форми до канонічного вигляду, записати цей канонічний вигляд.

745. $F(\vec{x}) = 4x_1x_2 + 3x_2^2$.
746. $F(\vec{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.
747. $F(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.
748. $F(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
749. $F(\vec{x}) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$.
750. $F(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
751. $F(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
752. $F(\vec{x}) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

7.5. Закон інерції квадратичних форм. Класифікація квадратичних форм. Критерій Сільвестра знакоозначеності квадратичної форми

Твердження 7.2. (Закон інерції квадратичних форм). Число додатних (від'ємних) коефіцієнтів в канонічному вигляді квадратичної форми не залежить від невиродженого лінійного перетворення, що зводить її до канонічного вигляду.

Означення 7.4. Індексом інерції k квадратичної форми називається число відмінних від нуля коефіцієнтів її канонічного вигляду. Додатним індексом p - число додатних, від'ємним індексом q - число від'ємних коефіцієнтів її канонічного вигляду.

Означення 7.5. Квадратична форма $F(\vec{x})$ називається додатно (від'ємно) означеною на L^n, якщо $F(\vec{x})>0$ ($F(\vec{x})<0$) для довільного $\vec{x}\neq 0,\ \ \vec{x}\in L^n$.

Означення 7.6. Квадратична форма $F(\vec{x})$ називається квазідодатно (квазівід'ємно) означеною на L^n, якщо $F(\vec{x})\geq 0$ $(F(\vec{x})\leq 0)$ при довільному $\vec{x}\in L^n$ та існує $\vec{x}\neq 0$ такий, що $F(\vec{x})=0$.

Твердження 7.3. $F(\vec{x})$ тоді і тільки тоді є додатно (від'ємно) означеною на L^n, коли $p=n$ ($q=n$).

Твердження 7.4. $F(\vec{x})$ тоді і тільки тоді є квазідодатно (квазівід'ємно) означеною, коли $p<n$ і $q=0$ ($p=0$ і $q<n$).

Твердження 7.5. $F(\vec{x})$ тоді і тільки тоді є знакозмінною, коли $p\neq 0$ і $q\neq 0$.

Твердження 7.6. (Критерій Сільвестра). Для того, щоб квадратична форма $F(\vec{x})$ була додатно означеною, необхідно і досить виконання нерівностей $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_n>0$, де Δ_i, $i=\overline{1,\,n}$ - кутові мінори та визначник квадратичної форми.

Для того, щоб квадратична форма $F(\vec{x})$ була від'ємно означеною, необхідно і досить, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, причому $\Delta_1<0$.

Приклад 1. Квадратична форма

$$F(\vec{x})=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

додатно означена, оскільки кутові мінори та визначник її матриці

$$\Delta_1=5,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1$$

додатні.

<u>Приклад</u> 2. Квадратична форма

$$F(\vec{x})=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

не буде ні додатно ні від'ємно означеною, тобто буде знакозмінною, оскільки її другий кутовий мінор від'ємний:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

Задача з розв'язком

Задача. Знайти всі значення параметра λ, при яких квадратична форма

$$F(\vec{x})=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

додатно означена.

Розв'язок. Матриця A квадратичної форми має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Її кутові мінори та визначник

$$\Delta_1=5,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}.$$

Бачимо, що $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0$. Вимагатимемо, щоб і Δ_3 був більше нуля.

Одержимо

$$\Delta_3=5\lambda+2+2-1-5-4\lambda \Leftrightarrow \lambda-2>0 \Leftrightarrow \lambda>2.$$

Відповідь: $\lambda>2$.

Задачі для розв'язування

В задачах №№753-756 знайти всі значення параметра λ, при яких додатно означені такі квадратичні форми:

753. $F(\vec{x})=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$

754. $F(\vec{x})=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

755. $F(\vec{x})=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

756. $F(\vec{x})=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.

757. Довести, що якщо квадратична форма з матрицею A додатно означена, то і квадратична форма з оберненою матрицею A^{-1} додатно означена.

В задачах №№758-764 визначити, які квадратичні форми є додатно і від'ємно означені, а які ні.

758. $F(\vec{x})=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2$.

759. $F(\vec{x})=-x_1^2+2x_1x_2-4x_2^2$.

760. $F(\vec{x})=x_1^2-15x_2^2+14x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$.

761. $F(\vec{x})=12\,x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2$.

762. $F(\vec{x})=4x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$.

763. $F(\vec{x})=2x_4^2+x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3+2x_2x_4$.

764. $F(\vec{x})=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+8x_4^2+8x_2x_4$.

765. Довести, що квадрат довжини вектора $|\vec{x}|^2$ в E^n є додатно означеною квадратичною формою.

В задачах №№766-772 за канонічним виглядом квадратичної форми $F(\vec{x})$ в E^n визначити індекси p та q та її знакоозначенність.

766. $F(\vec{x})=x_1^2+\frac{1}{5}x_2^2+7x_3^2+x_4^2$, ($n$=4).

767. $F(\vec{x})=2x_1^2-5x_2^2+\frac{1}{6}x_3^2$, ($n$=3).

768. $F(\vec{x})=25x_1^2+13x_3^2+\frac{1}{8}x_4^2$, ($n$=4).

769. $F(\vec{x})=-2x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2-4x_4^2$, ($n$=4).

770. $F(\vec{x})=5x_1^2+9x_2^2-3x_3^2+x_4^2$, ($n$=4).

771. $F(\vec{x})=-x_1^2-3x_2^2-x_3^2$, ($n$=3).

772. $F(\vec{x})=9x_1^2+3x_3^2$, (n=3).

7.6. Одночасне зведення двох квадратичних форм до канонічного вигляду

Означення 7.7. Нормальним виглядом квадратичної форми (7.1) називається такий її канонічний вигляд, в якому коефіцієнти при квадратах невідомих (не враховуючи нульових) дорівнюють ± 1.

Твердження 7.7. Якщо $F(\vec{x})$ - довільна, а $G(\vec{x})$ - додатно означена форми на L^n, то існує лінійне невироджене перетворення L^n, що зводить обидві форми до канонічного вигляду (а форму $G(\vec{x})$ навіть до нормального вигляду).

Зауваження 7.5. На практиці для одночасного зведення $F(\vec{x})$ та $G(\vec{x})$ до канонічного вигляду, спочатку будують базис L^n, в якому $G(\vec{x})$ має нормальний вигляд і знаходять матрицю $\dot{A}$ форми $F(\vec{x})$ в цьому базисі. Вважаючи новий базис ортонормованим базисом E^n, знаходять ортогональне перетворення E^n, що зводить $F(\vec{x})$ до канонічного вигляду. Ортонормований базис в E^n з власних векторів форми $F(\vec{x})$ є шуканим. У ньому матриця форми $G(\vec{x})$ - одинична, а матриця форми $F(\vec{x})$ - діагональна.

Задача з розв'язком

Задача. Дані квадратичні форми

$$F(\vec{x}) = x_1^2 + 56x_2^2 + 16\,x_1x_2,$$
$$G(\vec{x}) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10\,x_1x_2.$$

Показати, що форма $G(\vec{x})$ додатно означена. Знайти невироджене лінійне перетворення, що зводить форму $G(\vec{x})$ до нормального, а форму $F(\vec{x})$ до канонічного вигляду. Записати цей канонічний вигляд.

Розв'язок. Складемо матрицю *B* квадратичної форми $G(\vec{x})$. Маємо

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори матриці *B*.

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Отже, квадратична форма $G(\vec{x})$ є додатно означеною. Зведемо її до нормального вигляду, застосовуючи метод Якобі. Визначимо канонічні коефіцієнти

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1}{1} = 1$$

Тоді квадратична форма $G(\vec{x})$ буде мати такий нормальний вигляд:

$$G(\vec{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Знайдемо трикутне перетворення, що зводить цю квадратичну форму до нормального вигляду

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{a_{12}}{\Delta_1} = -5,$$

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \qquad \vec{f}_2 = -5\vec{e}_1 + \vec{e}_2. \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виразимо старі координати через нові за допомогою матриці *C*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \xi_1 - 5\xi_2,$$
$$x_2 = \xi_2.$$

Знайдемо вигляд квадратичної форми $F(\vec{x})$ і її матриці $\grave{A}^{\bullet}$ в новому базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2$.

$$F(\vec{x}) = (\xi_1 - 5\xi_2)^2 + 56\xi_2^2 + 16(\xi_1 - 5\xi_2)\xi_2 =$$
$$= \xi_1^2 - 10\xi_1\xi_2 + 25\xi_2^2 + 56\xi_2^2 + 16\xi_1\xi_2 -$$
$$- 80\xi_2^2 = \xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + \xi_2^2.$$

$$A^{\bullet}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Вважаючи $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ ортонормованим базисом в E^2, знайдемо ортогональне перетворення E^2, що зводить форму $F(\vec{x})$ з матрицею $A^{\bullet}$ до канонічного вигляду. Для цього визначимо власні значення і власні одиничні вектори оператора A, матриця якого дорівнює $A^{\bullet}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1=-2,\\ \lambda_2=4.\end{array}\right.$$

Для $\lambda_1=-2$ візьмемо власний одиничний вектор $\vec{g}_1=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, для $\lambda_2=4$ візьмемо власний одиничний вектор $\vec{g}_2=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$.

Тоді квадратична форма $F(\vec{x})$ в базисі $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ має канонічний вигляд:

$$F(\vec{x})=-2\eta_1^2+4\eta_2^2.$$

Квадратична форма $G(\vec{x})$ в базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ мала одиничну матрицю. В базисі $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ матриця форми $G(\vec{x})$ залишається одиничною, тобто $G(\vec{x})=\eta_1^2+\eta_2^2$, а матриця C_1 переходу від базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ до базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ має вигляд

$$C_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

При переході від базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ до базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ координати векторів перетворюються за формулами

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \xi_1=-1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2,\ \ \xi_2=1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2.$$

Остаточно маємо $G(\vec{x})=\eta_1^2+\eta_2^2$, $F(\vec{x})=-2\eta_1^2+4\eta_2^2$,

де

$$x_1=\xi_1-5\xi_2=-1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2-5/\sqrt{2}\,\eta_1-5/\sqrt{2}\,\eta_2=-6/\sqrt{2}\,\eta_1-4/\sqrt{2}\,\eta_2,$$

$$x_2=\xi_2=1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2.$$

Перевірка:

$$F(\vec{x})=x_1^2+56x_2^2+16x_1x_2=(-6/\sqrt{2}\,\eta_1-4/\sqrt{2}\,\eta_2)^2+56(1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2)^2+$$
$$+16\left(-6/\sqrt{2}\eta_1-4/\sqrt{2}\,\eta_2\right)\left(1/\sqrt{2}\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2\right)=18\eta_1^2+8\eta_2^2+24\eta_1\eta_2+28\eta_1^2+$$
$$+56\eta_1\eta_2+28\eta_2^2+16(-3\eta_1^2-3\eta_1\eta_2-2\eta_1\eta_2-2\eta_2^2)=-2\eta_1^2+4\eta_2^2;$$

$$G(\vec{x})=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2=(-6/\sqrt{2}\,\eta_1-4/\sqrt{2}\,\eta_2)^2+26(1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2)^2+$$

$$+10(-6/\sqrt{2}\,\eta_1-4/\sqrt{2}\,\eta_2)(1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2)=$$

$$=18\eta_1^2+8\eta_2^2+24\eta_1\eta_2+13\eta_2^2+26\eta_1\eta_2-30\eta_1^2-20\eta_2^2-50\eta_1\eta_2=\eta_1^2+\eta_2^2;$$

Відповідь: $G(\vec{x})=\eta_1^2+\eta_2^2,\ F(\vec{x})=-2\eta_1^2+4\eta_2^2,$

$$x_1=-6/\sqrt{2}\,\eta_1-4/\sqrt{2}\,\eta_2,\quad x_2=1/\sqrt{2}\,\eta_1+1/\sqrt{2}\,\eta_2.$$

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 773-777 з'ясувати, що в парах квадратичних форм одна форма є додатно означеною; знайти невироджене лінійне перетворення, що зводить цю форму до нормального, а іншу форму цієї ж пари до канонічного вигляду, і написати цей канонічний вигляд (лінійне перетворення визначено неоднозначно).

773. $F(\vec{x})=-4x_1x_2;\ G(\vec{x})=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2.$

774. $F(\vec{x})=8x_1^2-28x_2^2+14x_3^2+16x_1x_2+14x_1x_3+32x_2x_3;$

$G(\vec{x})=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3.$

775. $F(\vec{x})=2x_4^2+x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3+2x_2x_4;$

$G(\vec{x})=(1/4)x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2+2x_2x_4.$

776. $F(\vec{x})=x_1^2+(3/2)x_2^2-2x_3^2+x_2^4+2\,x_1x_2+4x_1x_3;$

$G(\vec{x})=x_1^2+(5/4)x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_2x_3.$

777. $F(\vec{x})=x_1^2-15x_2^2+4\,x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3;$

$G(\vec{x})=x_1^2+17x_2^2+3x_3^2+4\,x_1x_2-2x_1x_3-14x_2x_3.$