8. КВАДРАТИЧНІ ОБРАЗИ В E_2 І E_3

8.1. Квадратичні образи в E_2, задані канонічними рівняннями

8.1.1. Еліпс

Означення 8.1. Еліпсом називається множина точок, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є стале число $2a$, яке більше за відстань $2c$ між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси еліпса розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c, 0)$ і $F_2(-c, 0)$, то в цій системі координат рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (8.1)$$

де $b^2=a^2-c^2$.

Рівняння (8.1) називається канонічним рівнянням еліпса.

При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії еліпса, а початок координат - з центром симетрії еліпса (рис.8.1). Точки перетину еліпса з осями координат $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ називаються вершинами еліпса. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, що з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини $2a$ і $2b$, називаються відповідно великою (фокальною) та малою осями еліпса. Параметри a та b, які входять у рівняння еліпса (8.1), дорівнюють його півосям.

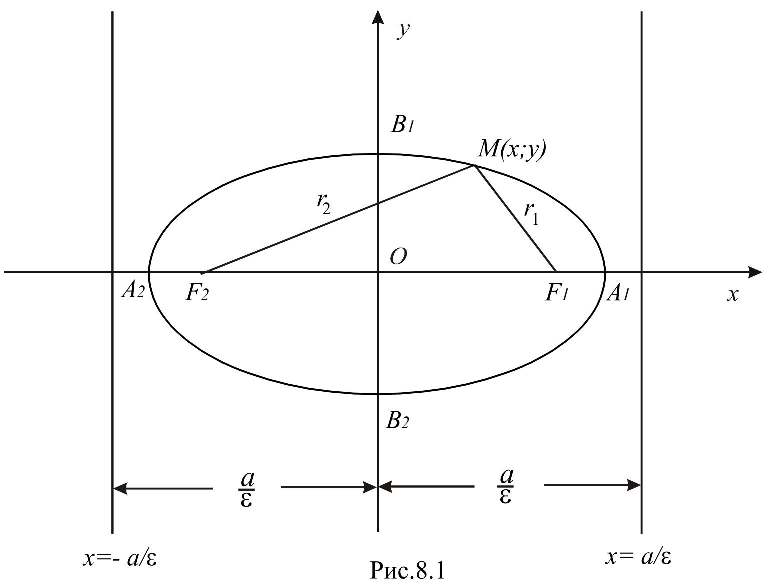


Рис.8.1

Форма еліпса (міра його стиску) характеризується його ексцентриситетом $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Оскільки $c<a$, то $0\le\varepsilon<1$. У частинному випад-ку, коли $a=b$ ($c=0$, $\varepsilon=0$), еліпс перетво-рюється в коло, рівняння якого має вигляд

$$x^2+y^2=a^2.$$

Відстані $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються фокальними радіусами точки M. З означення еліпса випливає, що $r_1+r_2=2a$. Фокальні радіуси можуть бути обчислені за формулами

$$r_1 = a - \varepsilon x; \quad r_2 = a + \varepsilon x,$$

де x - абсциса точки M.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, паралельні малій осі, які віддалені від неї на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$ (коло директрис не має).

Рівняння директрис мають вигляд $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Теорема 8.1. Якщо r - відстань від довільної точки еліпса до деякого фокуса, d - відстань цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε еліпса, тобто $r/d=\varepsilon$.

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M(x_1, y_1)$ еліпса має вигляд

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Якщо в декартовій прямокутній системі координат фокуси еліпса розташовані на прямій $y=y_0$, симетрично відносно прямої $x=x_0$, в точках $F_1(x_0+c; y_0)$ і $F_2(x_0-c; y_0)$, то рівняння еліпса набуде вигляду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Задача з розв'язком

Задача. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M(-2\sqrt{5}; 2)$ і відстань між його фокусами $2c=6\sqrt{3}$.

Розв'язок. Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - шукане рівняння еліпса. Координати точки M повинні задовольняти це рівняння. Отже, $\frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$. Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то $a^2-b^2=27$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \\ a^2-b^2=27, \end{cases}$$

знаходимо $a^2=36$, $b^2=9$.

Таким чином, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задачі для розв'язування

778. Знайти геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох даних точок $F_1(-3, 0)$ та $F_2(3, 0)$ є величина стала, яка дорівнює 10.
779. Знайти геометричне місце точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-4, 0)$ і даної прямої $4x+25=0$ дорівнює $4/5$.
780. Знайти геометричне місце точок, які розміщені від точки $A(3, 0)$ вдвічі ближче, ніж від прямої $x=12$.
781. Скласти рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $M_1(-3, 0)$ та $M_2(3, 0)$ дорівнює 50.
782. Скласти рівняння еліпса , фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що:
   1) його півосі дорівнюють 5 та 2;
   2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c=8$;
   3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10$;
   4) відстань між фокусами $2c=6$ та ексцентриситет $\varepsilon=3/5;$
   5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=3/5$;
   6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon=12/13$;
   7) відстань між його директрисами дорівнює 5 та відстань між фокусами $2c=4$;
   8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;
   9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;
   10) відстань між його директрисами дорівнює 32 та $\varepsilon=1/2$.
783. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що:
   1) півосі його відповідно дорівнюють 4 та 2;
   2) відстань між фокусами дорівнює 6 і велика піввісь дорівнює 5;
   3) велика піввісь дорівнює 10 та ексцентриситет $\varepsilon=0{,}8$;
   4) мала піввісь дорівнює 3 та ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}/2$;
   5) сума півосей дорівнює 8 і відстань між фокусами дорівнює 8.
784. Дано рівняння еліпса: $9x^2+25y^2=225$. Обчислити довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет еліпса. Скласти рівняння директрис.
785. Дано рівняння еліпса: $25x^2+169y^2=4225$. Обчислити довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет еліпса.
786. Дано еліпс $9x^2+5y^2=45$. Знайти його півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.

787. Відстані одного з фокусів еліпса до кінців його великої осі відповідно дорівнюють 7 та 1. Скласти рівняння цього еліпса.

788. Еліпс проходить через точки $M(\sqrt{3},-2)$ і $N(-2\sqrt{3},1)$. Скласти рівняння еліпса, прийнявши його осі за осі координат.

789. Дано еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написати рівняння його директрис.

790. Мала вісь еліпса дорівнює 8, його директриси задані рівняннями $x=\pm 8$. Знайти рівняння цього еліпса.

791. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його малу вісь видно з фокуса під прямим кутом.

792. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо відстань між директрисами в 4 рази більша за відстань між фокусами.

793. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=2/3$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

794. Еліпс, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, проходить через точку $M(1, 1)$ та має ексцентриситет $\varepsilon=3/5$. Скласти рівняння еліпса.

795. На еліпсі $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ дано точку $M(2, -5/3)$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.

796. Визначити фокальні радіуси точки $M(-4; 2,4)$, яка належить еліпсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

797. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=1/3$, центр його збігається з початком координат, один з фокусів (-2, 0). Обчислити відстань від точки M_1 еліпса з абсцисою, яка дорівнює 2, до однобічної з цим фокусом директриси.

798. На еліпсі $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в 4 рази більша за відстань від її лівого фокуса.

799. На еліпсі $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, для якої добуток фокальних радіусів дорівнює квадрату малої півосі.

800. На еліпсі $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ знайти точку, відстань якої до малої осі дорівнює 5.

801. На еліпсі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, різниця фокальних радіусів якої дорівнює 6,4.

802. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, відстань яких до правого фокуса дорівнює 14.

803. В еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписано правильний трикутник, одна з вершин якого збігається з правою вершиною великої осі. Визначити координати двох інших вершин трикутника.

804. Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ з прямою $2x-y-9=0$.

805. Знайти точки перетину прямої $x+2y-7=0$ та еліпса $x^2+4y^2=25$.

806. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точці (2, -3).

807. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, проведених з точки $A(-6, 3)$.

808. Знайти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, паралельних прямій $2x-y+17=0$.

809. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2+4y^2=20$, які перпендикулярні до прямої $2x-2y-13=0$.

810. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=2/3$, фокус $F(2,1)$ та рівняння відповідної директриси $x-5=0$.

811. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=1/2$, фокус $F(-4, 1)$ та рівняння відповідної директриси $y+3=0$.

812. Скласти рівняння еліпса, знаючи що:

1) його велика вісь дорівнює 26 та фокуси $F_1(-10,0)$, $F_2(14,0)$;

2) його мала вісь дорівнює 2 та фокуси $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$;

3) його фокуси $F_1(1, 3)$, $F_2(3, 1)$ та відстань між директрисами дорівнює $12\sqrt{2}$;

4) його фокуси $F_1(-2, 3/2)$, $F_2(2, -3/2)$ та ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}/2$.

8.1.2. Гіпербола

Означення 8.2. Гіперболою називається множина точок, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є стале додатне число $2a$, яке менше за відстань $2c$ між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси даної гіперболи розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c, 0)$ і $F_2(-c, 0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (8.2)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (8.2) називається канонічним рівнянням гіперболи.

При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи, а початок координат - з її центром симетрії (рис.8.2). Точки $A_1(a, 0)$ і $A_2(-a, 0)$ називаються вершинами гіперболи, а точки $B_1(0, b)$ і $B_2(0, -b)$ - уявними вершинами гіперболи. Відрізок A_1A_2 і його довжина $2a$ називається дійсною віссю, а відрізок B_1B_2 і його довжина $2b$ - уявною віссю гіперболи. Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між фокусами до дійсної осі

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\text{оскільки } c > a, \text{ то } \varepsilon > 1).$$

Відстані $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ від будь-якої точки гіперболи $M(x; y)$ до фокусів називаються фокальними радіусами точки M. З означення гіперболи випливає, що $|r_1 - r_2| = 2a$.

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ правої вітки гіперболи обчислюються за формулами

$$r_1 = MF_1 = \varepsilon x - a; \quad r_2 = MF_2 = \varepsilon x + a.$$

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ лівої вітки гіперболи обчислюються за формулами

$$r_1 = MF_1 = -\varepsilon x + a; \quad r_2 = MF_2 = -\varepsilon x - a.$$

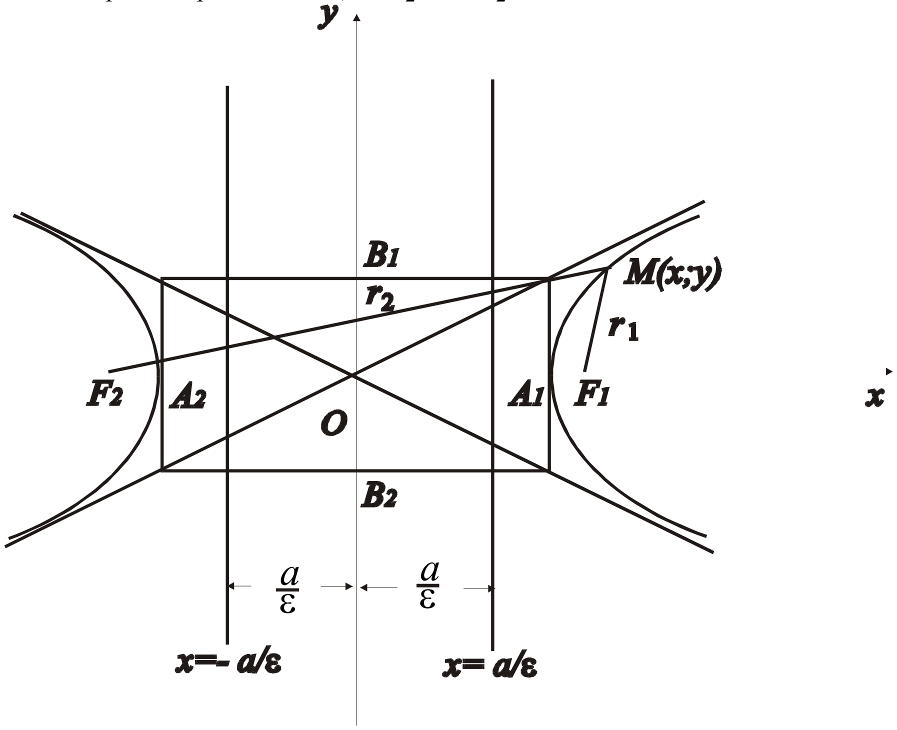


Рис.8.2

Директрисами гіперболи називаються прямі, перпендикулярні до фокальної осі, які віддалені від центра на відстань a/ε. Директриси мають рівняння $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Теорема 8.2. Якщо r - відстань від довільної точки гіперболи до деякого фокуса, d - відстань від цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи $r/d=\varepsilon$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Асимптоти містять діагоналі прямокутника, центр якого збігається з центром гіперболи, а сторони рівні і паралельні осям гіперболи.

Якщо $a=b$, то рівняння гіперболи має вигляд

$$x^2-y^2=a^2.$$

Така гіпербола називається рівнобічною.

Дві гіперболи, визначені в одній системі координат рівняннями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, називаються спряженими. Такі гіперболи мають спільні осі і асимптоти, але дійсна вісь однієї є уявною віссю другої, і навпаки.

Рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M(x_1;y_1)$ гіперболи має вигляд $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Якщо осі декартової системи координат вибрані так, що фокуси гіперболи розташовані на прямій $y=y_0$ симетрично відносно точки $M_0(x_0; y_0)$ в точках $F_1(x_0+c; y_0)$ і $F_2(x_0-c; y_0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Задача з розв'язком

Задача. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, що відстань між її вершинами дорівнює 48 та рівняння асимптот мають вигляд $y=\pm\frac{5}{12}x$.

Розв'язок. Так як відстань між вершинами гіперболи дорівнює $2a$, то $2a=48$ або $a=24$.

Асимптоти гіперболи мають рівняння $y=\pm\frac{b}{a}x$. Отже, $b/a=5/12$, звідки $b=\frac{24\cdot 5}{12}$ або $b=10$. Таким чином, рівняння шуканої гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1.$$

Задачі для розв'язування

813. Знайти геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней від двох даних точок $F_1(-5,\ 0)$ і $F_2(5,\ 0)$ є величина стала, яка дорівнює 6.
814. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-5,\ 0)$ і даної прямої $5x+16=0$ дорівнює $5/4$.
815. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відстань від точки $F(0,\ 6)$ в півтора рази більша за відстань від прямої $y=8/3$.
816. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від кола $x^2+4x+y^2=0$ та від точки $M(2,\ 0)$.
817. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:
    1) відстань між фокусами $2c=6$, ексцентриситет $\varepsilon=3/2$;
    2) рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ та відстань між фокусами $2c=20$;
    3) відстань між директрисами дорівнює $22\frac{2}{13}$ та відстань між фокусами $2c=26$;
    4) ексцентриситет $\varepsilon=3/2$ та відстань між директрисами дорівнює $8/3$.
818. Дано гіперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Знайти:
    1) координати фокусів;
    2) ексцентриситет;
    3) написати рівняння асимптот і директрис;
    4) скласти рівняння спряженої гіперболи та обчислити її ексцентриситет.
819. Дано гіперболу $16x^2-9y^2=144$. Знайти півосі a та b, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.
820. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:
    1) ексцентриситет гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$ та графік гіперболи проходить через точку $M(-5,\ 3)$;
    2) рівняння асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$ та графік гіперболи проходить через точку $M(9/2,\ -1)$;
    3) рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{3}{4}x$ та рівняння директрис $x=\pm\frac{16}{5}$.

821. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо:

1) відстань між фокусами *2c=10* та ексцентриситет $\varepsilon=5/3$;

2) рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ та відстань між вершинами дорівнює 48.

822. Дано гіперболу $16x^2-9y^2=-144$. Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет та рівняння асимптот і директрис.

823. Написати рівняння двох спряжених гіпербол, знаючи, що відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2, а відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

824. Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$, за умови, що ексцентриситет її $\varepsilon=1,25$.

825. Написати рівняння гіперболи, яка проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ та має фокуси у вершинах цього еліпса.

826. Фокуси гіперболи збігаються з вершинами еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директриси гіперболи проходять через фокуси цього еліпса. Скласти рівняння гіперболи.

827. Обчислити півосі гіперболи, знаючи, що кут між асимптотами прямий та рівняння директрис $x=\pm3\sqrt{2}$.

828. Визначити кут між асимптотами гіперболи, якщо відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

829. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60°.

830. Довести, що відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до її асимптоти дорівнює *b*.

831. Довести, що добуток відстаней від будь-якої точки гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до її двох асимптот є величина стала, яка дорівнює $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

832. На гіперболі $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ взято точку, абсциса якої дорівнює 10, ордината додатна. Обчислити фокальні радіуси цієї точки та кут між ними.

833. На гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, для якої фокальні радіуси перпендикулярні один одному.

834. На гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, для якої відстань від лівого фокуса вдвічі більша за відстань від правого фокуса.

835. На гіперболі $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ знайти точку, яка була б в 3 рази ближча від однієї асимптоти, ніж від другої.

836. Гіпербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ проходить через точку $M(-5,\ 9/4)$. Знайти фокальні радіуси точки M.

837. Переконавшись, що точка $M(10,-\sqrt{5})$ належить гіперболі $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$, скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.

838. На лівій вітці гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, правий фокальний радіус якої дорівнює 18.

839. Знайти фокальні радіуси гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ у точках перетину її з колом $x^2+y^2=91$.

840. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=2$, фокальний радіус її точки M, проведений з деякого фокуса, дорівнює 16. Обчислити відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

841. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=3$, відстань від точки M гіперболи до директриси дорівнює 4. Обчислити відстань від точки M до фокуса, однобічного з цією директрисою.

842. Знайти точки перетину прямої $x-5y=0$ і гіперболи $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$.

843. Знайти точки перетину прямої $4x-3y-16=0$ і гіперболи $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

844. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точці $A(5,\ -4)$.

845. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$, паралельних прямій $x+y=7$.

846. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярних до прямої $4x+3y-7=0$.

847. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$, проведених з точки $C(1,\ -10)$. Написати рівняння хорди, що з'єднує точки дотику.

848. Гіпербола проходить через точку $A(\sqrt{6}, 3)$ та дотикається прямої $9x+2y-15=0$. Скласти рівняння цієї гіперболи за умови, що її осі збігаються з осями координат.

849. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\varepsilon=5/4$, фокус $F(5, 0)$ та рівняння відповідної директриси $5x-16=0$.

850. Точка $A(-3, 5)$ належить гіперболі, фокус якої $F(-2, -3)$, а рівняння відповідної директриси $x+1=0$. Написати рівняння цієї гіперболи.

851. Скласти рівняння гіперболи, знаючи, що відстань між її вершинами дорівнює 24 і фокуси $F_1(-10, 2)$, $F_2(16, 2)$.

852. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої $F_1(3, 4)$, $F_2(-3, -4)$ та відстань між директрисами дорівнює 3,6.

853. Скласти рівняння гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 90^o та фокуси $F_1(4, -4)$, $F_2(-2, 2)$.

8.1.3. Парабола

Означення 8.3. Параболою називається множина точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою.

Відстань p від фокуса параболи до її директриси називається параметром параболи.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус знаходиться в точці $F(p/2, 0)$, а директриса перпендикулярна до осі OX і має рівняння $x=-\frac{p}{2}$, то рівняння параболи має вигляд

$$y^2=2px . \tag{8.3}$$

Рівняння (8.3) називається канонічним рівнянням параболи.

Парабола має одну вісь симетрії, вісь симетрії параболи називається віссю параболи. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається її вершиною. Для параболи, яка задана рівнянням (8.3), віссю є вісь OX, а вершиною - початок координат (рис.8.3).

Фокальний радіус r довільної точки $M(x, y)$ параболи (тобто довжина відрізка FM) може бути обчислений за формулою

$$r=x+p/2,$$

де x - абсциса точки M. Якщо директриса параболи - пряма $x=p/2$, а фокус - точка $F(-p/2, 0)$, рівняння параболи має вигляд $y^2=-2px$. У випадку, якщо директриса параболи - пряма $y=-p/2$, а фокус - точка $F(0, p/2)$ рівняння параболи має вигляд $x^2=2py$.

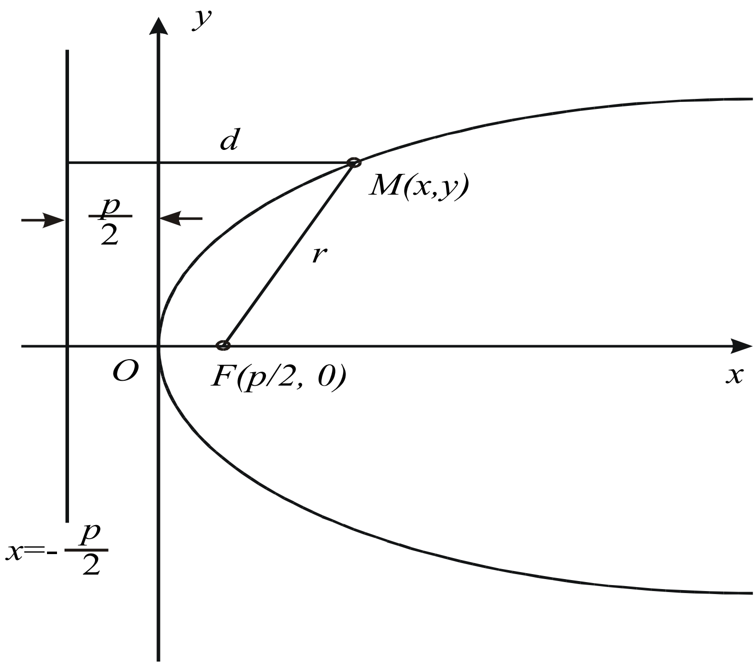


Рис.8. 3

Рівняння дотичної до параболи $y^2=2px$ в точці $M(x_1;y_1)$ параболи має вигляд

$$yy_1=p(x+x_1).$$

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус параболи знаходиться в точці $F(x_0+p/2;y_0)$, а директриса перпендикулярна до осі OX і має рівняння $x=x_0 -p/2$, то рівняння параболи має вигляд

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Зауваження 8.1. Нехай r - відстань від довільної точки параболи до фокуса (фокальний радіус), d - відстань від цієї ж точки до директриси. Тоді за означенням параболи $r=d$. Звідси згідно з твердженням теорем 8.1 та 8.2 вважають, що ексцентриситет параболи $\varepsilon =r/d=1$.

Задача з розв'язком

Задача. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі OX і відтинає від прямої $y=2\sqrt{2}x$ хорду довжиною $3/4$.

Розв'язок. Рівняння шуканої параболи має вигляд $y^2=\pm 2px$. Для визначення координат точок перетину прямої і параболи розв'яжемо систему рівнянь (для випадку $y^2=2px$)

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = 2\sqrt{2}x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2/2p, \\ y = 2\sqrt{2}\,y^2/2p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2/2p, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = p/\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = p/4, \\ y = p/\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, одержимо дві точки перетину прямої з параболою $O(0, 0)$ і $M(p/4, p/\sqrt{2})$.

Довжину хорди обчислимо як відстань між точками O і M

$$\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{p^2}{16} + \frac{p^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{9}{16}p^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}p.$$

Звідки $p=1$ або $2p=2$. Отже, шукане рівняння параболи має вигляд $y^2=2x$.

Аналогічно, у випадку параболи $y^2= -2px$, одержимо $y^2= -2x$.

Задачі для розв'язування

854. Знайти геометричне місце точок, для яких відстань до даної точки $F(3, 0)$ дорівнює відстані до даної прямої $x+3=0$.
855. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстані яких до даного кола $(x-5)^2+y^2=0$ і даної прямої $x+2=0$ рівні між собою.
856. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються осі OX і проходить через точку (3, 4).
857. Знайти геометричне місце точок, для кожної з яких відстані від осі OX та від точки $F(2, 2)$ рівні.
858. Визначити параметр та розташування відносно координатних осей таких парабол:
   1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2= -4x$; 4) $x^2= -y$.
859. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, знаючи, що:
   1) парабола розташована симетрично відносно осі OX і проходить через точку $A(9, 6)$;
   2) парабола розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $C(1, 1)$.
860. Скласти рівняння параболи, знаючи що вісь ординат є директрисою параболи, а фокус має координати (5, 0).
861. Знайти фокус F та рівняння директриси параболи $y^2=24x$.
862. На параболі $y^2=8x$ визначити точку, фокальний радіус якої дорівнює 20.
863. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2=20x$, якщо абсциса точки M дорівнює 7.
864. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2=12x$, якщо ордината точки M дорівнює 6.

865. На параболі $y^2=16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.
866. На параболі $y^2=4,5x$ взято точку $M(x, y)$, яка розміщена від директриси на відстані d=9,125. Обчислити відстань цієї точки від вершини параболи.
867. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(-7, 0)$ та рівняння директриси $x-7=0$.
868. Встановити, що кожне з таких рівнянь визначає параболу, знайти координати її вершин та параметр:

1) $y^2=4x-8$; 2) $x^2=2-y$; 3) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2;$

4) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$; 5) $x=2y^2-12y+14$.

869. Скласти рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(4, 3)$ та рівняння директриси $y+1=0$.
870. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(7, 2)$ та рівняння директриси $x-5=0$.
871. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, симетричної відносно осі OX, яка відтинає від прямої $y=x$ хорду довжиною $4\sqrt{2}$.
872. Парабола $y^2=2x$ відтинає від прямої, що проходить через початок координат, хорду, довжина якої дорівнює $3/4$. Скласти рівняння цієї прямої.
873. Через точку $A(2, 1)$ провести таку хорду параболи $y^2=4x$, яка б поділялася точкою A навпіл.
874. Знайти точки перетину прямої $x+y-3=0$ та параболи $x^2=4y$.
875. Знайти точки перетину прямої $3x+4y-12=0$ та параболи $y^2=-9x$.
876. Знайти точки перетину параболи $y^2=12x$ з еліпсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
877. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2=18x$ та кола $(x+6)^2+y^2=100$.
878. Через точку $P(5, -7)$ провести дотичну до параболи $y^2=8x$.
879. Дано рівняння параболи $y^2=4x$ та рівняння дотичної до неї $x+3y+9=0$. Знайти точку їх дотику.
880. До параболи $y^2=12x$ провести дотичну в точці з абсцисою $x=3$.
881. Скласти рівняння дотичної до параболи $x^2=16y$, яка перпендикулярна до прямої $2x+4y+7=0$.
882. Визначити умову, за якої пряма $y=kx+b$ дотикається параболи $y^2=2px$.
883. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2=64x$ від прямої

$4x+3y+46=0$.

884. Знайти спільні дотичні еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ та параболи $y^2=\frac{20}{3}x$.

885. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2=36x$, проведених з точки $A(2, 9)$.

886. З точки $A(5, 9)$ проведені дотичні до параболи $y^2=5x$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотику.

887. Довести, що будь-яка дотична параболи перетинає директрису і фокальну хорду, яка перпендикулярна до осі, у точках, рівновіддалених від фокуса.

888. Довести, що дві параболи, які мають спільну вісь та спільний фокус, що розташований між їх вершинами, перетинаються під прямим кутом.

889. Дано вершину параболи $A(6, -3)$ та рівняння її директриси $3x-5y+1=0$. Знайти фокус F цієї параболи.

890. Скласти рівняння параболи, якщо відома вершина параболи $A(-2, -1)$ та рівняння директриси $x+2y-1=0$.

8.2. Полярна система координат. Рівняння еліпса, гіперболи, параболи в полярній системі координат

8.2.1. Полярна система координат в E_2

Означення 8.4. Говорять, що в E_2 задано полярну систему координат, якщо:

1) в E_2 вибрано точку O (полюс), вісь $O\rho$ (полярна вісь), що виходить з цієї точки;

2) координатами (полярними) точки M є пара чисел (ρ, φ), де $\rho=\left|\overline{OM}\right|$, φ - кут між віссю $O\rho$ і вектором $\overline{OM}$ (рис.8.4).

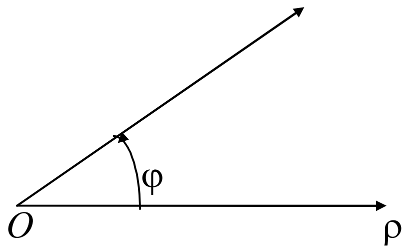


Рис.8.4

Означення 8.5. Число ρ називається полярним радіусом, φ - полярним кутом точки M. Запис $M(\rho, \varphi)$ означає, що точка M має координати ρ та φ.

Зауваження 8.2.1. Додатним поворотом у площині навколо точки O вважається поворот у напрямку проти руху годинникової стрілки.

2. Полярний кут точки має нескінченну множину значень, що відрізняються між собою на величину $2\pi n$, де $n \in Z$. Значення полярного кута, яке задовольняє нерівність $0 \le \varphi < 2\pi$, називається головним. У цьому випадку полярна система координат встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини і парами чисел $(\rho,\ \varphi)$. Винятком є тільки точка O, для якої $\rho=0$, а кут φ неозначений.

3. За означенням число ρ невід'ємне. Іноді припускають, що ρ може приймати від'ємні значення. В цьому випадку пара $(\rho,\ \varphi)$ визначає точку M, симетричну точці $M'(|\rho|,\ \varphi)$ відносно полюса O. Якщо координата ρ може приймати і від'ємні значення, систему координат називають узагальненою полярною системою координат.

<u>Приклад</u>. Пара $(-2;\ \pi/4)$ визначає точку C, симетричну точці $C'\ (2;\ \pi/4)$ відносно полюса O (рис.8.5).

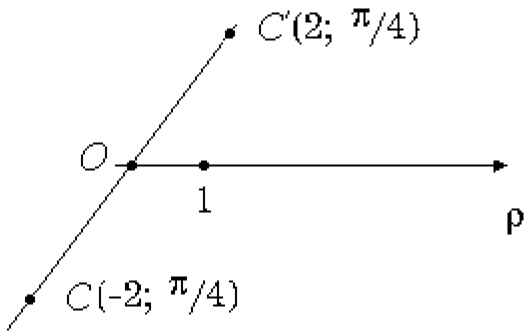


Рис.8.5

Задача з розв'язком

Задача. Які множини точок задаються умовами:
1) $\rho=a,\ (a\ge 0)$; 2) $a<\rho<b$ $(0<a<b)$; 3) $\varphi=\pi/6$; 4) $\alpha\le\varphi\le\beta$?

Розв'язок. 1) Точки, полярний радіус яких дорівнює a, лежать на колі радіуса a з центром в полюсі.

2) Умова $a<\rho<b$ задає кільце між концентричними колами радіусів a та b з центрами в полюсі, причому ці кола вилучаються (рис.8.6).

3) Точки, полярний кут яких дорівнює $\pi/6$, лежать на промені, що виходить з полюса під кутом $\pi/6$ до полярної осі, а тому умова $\varphi=\pi/6$ задає цей промінь.

4) Умова $\alpha \le \varphi \le \beta$ задає нескінченний сектор, що міститься між променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$, включаючи ці промені (рис.8.7).

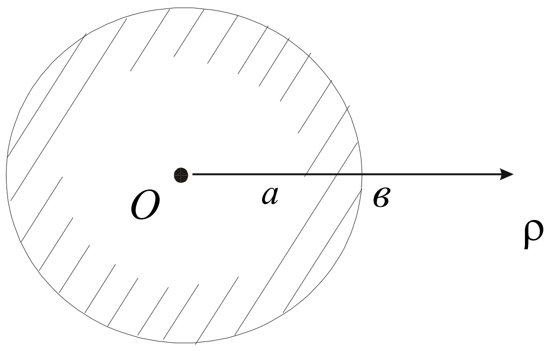


Рис.8.6

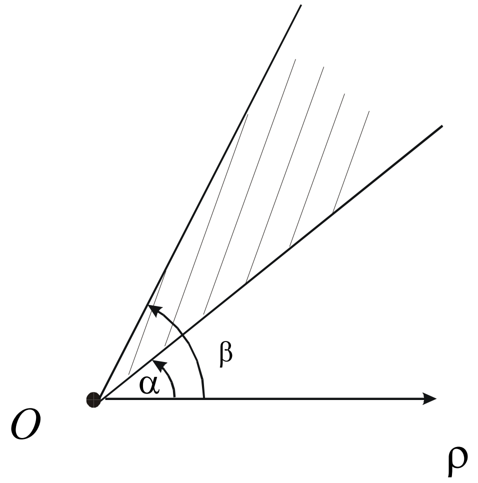


Рис.8.7

Задачі для розв'язування

891. Побудувати точки, полярні координати яких мають значення: $(1,\ \pi/6)$, $(3,\ \pi/2)$, $(2,\ 3\pi/4)$, $(1{,}5,\ 0)$, $(3,\ \pi)$, $(\sqrt{2},\ \pi/4)$.

892. Точка A має полярні координати $(5,\ 2\pi/3)$. Знайти:
   1) точку B, симетричну точці A відносно полюса;
   2) точку C, симетричну точці A відносно полярної осі.

893. У полярній системі координат дані точки $A(2,\ \pi/6)$, $B(3,\ 4\pi/3)$, $C(1,\ 3\pi/2)$, $D7$, $E(5,\ 0)$. Які координати будуть мати ці точки, якщо повернути полярну вісь у додатному напрямку на кут $3\pi/4$?

894. Які множини точок площини задаються умовами:
   1) $\rho=3$; 2) $\rho=1$; 3) $\rho=a$; 4) $\varphi=\pi/4$; 5) $\varphi=\pi/3$;
   6) $\varphi=const$; 7) $\frac{1}{2}\le\rho<2$; 8) $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$?

895. Обчислити площу трикутника OAB, одна з вершин якого збігається з полюсом, а дві інші мають полярні координати $A(\rho_1;\varphi_1)$, $B(\rho_2;\varphi_2)$.

896. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого збігається з полюсом, а дві інші мають полярні координати (5; $\pi/4$) та (4; $\pi/12$).

897. Обчислити площу трикутника з вершинами (в полярній системі координат): A(3; $\pi/8$), B(8; $7\pi/24$), C(6; $5\pi/8$). Вказівка: зробити рисунок та обчислити площу, комбінуючи площі трикутників, що мають одну вершину в полюсі.

898. Вивести формулу відстані між точками $M_1(\rho_1;\varphi_1)$ та $M_2(\rho_2;\varphi_2)$ в полярній системі координат.

899. Точка P має полярні координати $(5;\ \pi/4)$, а точка Q - координати $(8;\ -\pi/12)$. Знайти відстань між точками P і Q.

900. Точка P має полярні координати $(4;\ \pi/5)$, а точка Q - координати $(6;\ 6\pi/5)$. Знайти відстань між точками P і Q.

901. У полярній системі координат задано три точки: $A(5;\ \pi/2)$, $B(8;\ 5\pi/6)$, $C(3,\ 7\pi/6)$. Переконатись, що трикутник ABC - правильний.

В задачах №№ 902-909 необхідно зобразити лінію, яку задано рівнянням у полярній системі координат $(\rho,\ \varphi)$. Для полегшення побудови складіть таблицю тих задовольняючих рівнянню пар значень ρ та φ, які легко знайти.

902. $\rho=sin3\varphi$. 903. $\rho=1+cos\varphi$. 904. $\rho^2=sin\varphi$. 905. $\rho=3+2cos\varphi$. 906. $\rho=cos4\varphi$. 907. $\rho=2-sin\varphi$. 908. $\rho=2/sin\varphi$. 909. $\rho=1-2sin\varphi$.

8.2.2. Зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами точки в E_2

Нехай в E_2 задано прямокутну декартову систему координат OXY (праву) і полярну систему координат $O'\rho$. При цьому припускається, що початок O декартової системи є одночасно і полюсом O' полярної системи, а напрям полярної осі $O'\rho$ збігається з напрямом осі OX (рис.8.8).

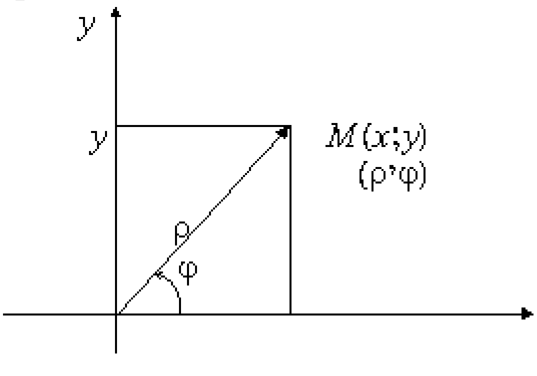


Рис.8.8

Тоді довільна точка M в E_2 має два набори координат $(x;\ y)$ та (ρ,φ). Зв'язок між цими координатами виражається у вигляді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{8.4}$$

і, навпаки,

$$\rho^2=x^2+y^2$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{8.5}$$

Формули (8.4) є формулами переходу від полярних координат до декартових прямокутних, формули (8.5) - від декартових до полярних координат.

Зауваження 8.3. Формули (8.4) та (8.5) дійсні і для узагальненої полярної системи координат.

Задача з розв'язком

Задача. Рівняння лінії в полярній системі координат має вигляд $\rho^2 cos\varphi\, sin\varphi=1$. Знайти її рівняння у відповідній прямокутній системі координат.

Розв'язок. Скориставшись формулами (8.5) перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)xy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=1, \quad \Leftrightarrow \quad xy=1.$$

Це рівняння гіперболи.

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 910-913 координати точок задані у деякій прямокутній системі координат. Знайти координати цих точок у відповідній полярній системі координат.

910. (3, -4). 911. (-1, 1). 912. (0, 2). 913. (5, 0).

В задачах №№ 914-917 рівняння лінії задано у прямокутній системі координат (x, y). Знайти рівняння цієї ж лінії у відповідній полярній системі координат $(\rho,\ \varphi)$.

914. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$. 915. $(x^2+y^2)^{3/2}=x+y$. 916. $x^2y^2=x^2+y^2$.

917. $x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}-3=0$.

В задачах №№ 918-921 рівняння лінії задано у полярній системі координат $(\rho,\ \varphi)$. Знайти її рівняння у відповідній декартовій системі координат (x, y).

918. $\rho=cos\varphi+sin\varphi$. 919. $\rho^2=sin\varphi$. 920. $\rho=2/(5cos\varphi-3sin\varphi)$.

921. $\rho^2-2psin\varphi-8=0$.

922. Знаючи полярні координати точки $\rho=10$, $\varphi=\pi/6$, знайти її прямокутні координати, якщо полюс знаходиться в точці (2, 3), а полярна вісь паралельна осі OX.

923. Полюс полярної системи координат знаходиться в точці (3,5), а додатний напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі OY. Знайти полярні координати точок: $M_1(9, -1)$ і $M_2(5, 5-2\sqrt{3})$.

8.2.3. Рівняння еліпса, гіперболи, параболи в полярній системі координат

Якщо полюс O' полярної системи координат збігається з фокусом F параболи (еліпса, гіперболи), полярна вісь перпендикулярна до директриси D (директрис) і напрямлена так, що не перетинає директрису D (однобічну директрису D) (рис.8.9), то рівняння параболи (еліпса, вітки гіперболи, відповідної фокусу F) має вигляд

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon \cos\varphi}, \qquad (8.6)$$

де p - відстань від фокуса до директриси (відповідної директриси); ε - ексцентриситет відповідної лінії другого порядку.

При такому виборі полярної системи координат рівняння вітки гіперболи, що не відповідає вибраному фокусу F, має вигляд

$$\rho = \frac{-\varepsilon p}{1+\varepsilon \cos\varphi}.$$

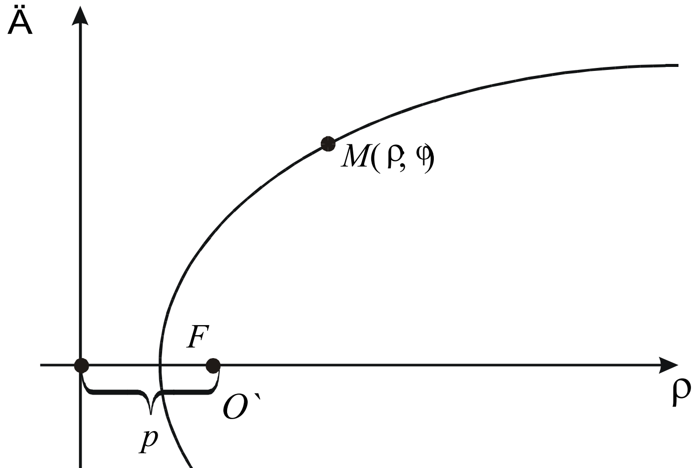


Рис.8.9

Якщо вибір полярної системи координат відмінний від попереднього випадку лише тим, що полярна вісь перетинає директрису D (відповідну директрису D) (рис.8.10), то рівняння параболи (еліпса, вітки гіперболи, відповідної F) має вигляд

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon \cos\varphi}. \qquad (8.7)$$

При такому виборі системи координат рівняння вітки гіперболи, що не відповідає вибраному фокусу F, має вигляд

$$\rho = \frac{-\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}.$$

Якщо полюс полярної системи збігається з центром еліпса (гіперболи), а полярна вісь ортогональна до директрис, то рівняння еліпса (гіперболи) матиме вигляд

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi} \qquad \left(\rho^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}\right).$$

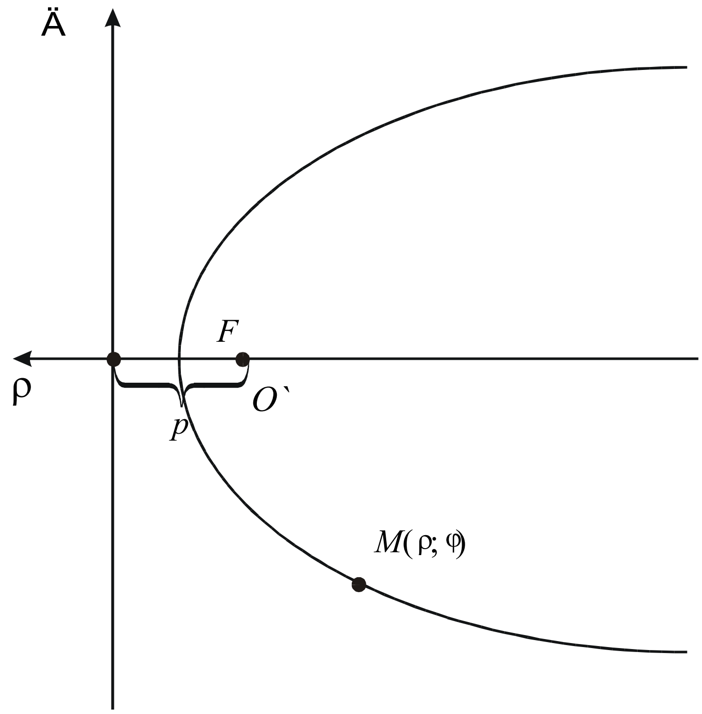


Рис.8.10

Зауваження 8.4. Якщо полюс збігається з центром кола радіуса a, а полярна вісь має довільний напрям, то рівняння кола в такій полярній системі має вигляд

$$\rho = a.$$

Якщо полюс полярної системи координат збігається з вершиною параболи, а полярна вісь перпендикулярна до директриси і не перетинає її, то рівняння параболи має вигляд

$$\rho = \frac{2p \cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

В цьому ж випадку, якщо полярна вісь перетинає директрису, то рівняння має вигляд

$$\rho = -\frac{2p \cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Задачі з розв'язком

Задача 1. Вивести полярне рівняння параболи (еліпса, вітки гіперболи), якщо полюс збігається з фокусом лінії, полярна вісь перпендикулярна до директриси (директрис) і напрямлена так, що не перетинає директрису (однобічну відповідну директрису).

Розв'язок. Нехай F - фокус цієї лінії, D - відповідна директриса (рис.8.11). Спільна властивість еліпса, гіперболи і параболи полягає в тому, що для довільної точки лінії відношення r/d фокального радіуса r цієї точки до відстані d між цією точкою і відповідною директрисою є величина стала, яка дорівнює ε, де ε - ексцентриситет кривої ($\varepsilon<1$ для еліпса, $\varepsilon>1$ для гіперболи, $\varepsilon=1$ для параболи).

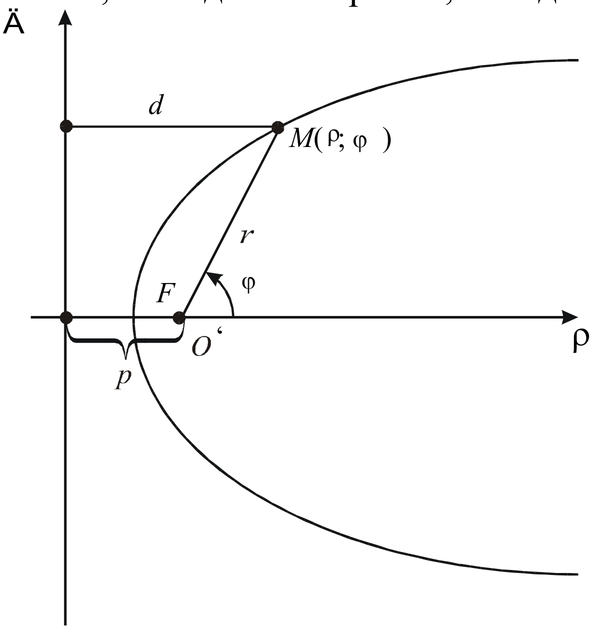


Рис.8.11

Крім того за умовою задачі полюс полярної системи збігається з фокусом лінії. В цьому випадку $r=\rho$. Оскільки полярна вісь перпендикулярна до директ-риси і не перетинає її, то $d=p+\rho\cos\varphi$, де p - відстань від фокуса F до директриси (p - параметр лінії). Тоді для довільної точки $M(\rho,\varphi)$ лінії маємо

$$\varepsilon=\frac{r}{d}=\frac{\rho}{d}=\frac{\rho}{p+\rho\cos\varphi}.$$

Звідки

$$\rho=\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Це рівняння збігається з (8.6).

Задача 2. Для еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ написати полярне рівняння, якщо полярна вісь співнапрямлена з віссю абсцис, а полюс знаходиться у правому фокусі.

Розв'язок. Оскільки полярна вісь перетинає однобічну директрису (рис.8.12), то рівняння еліпса може бути записано у вигляді (8.7). У нашому випадку з рівняння еліпса маємо $a=5$, $b=4$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3,\quad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5},\quad p=QF=\frac{a}{\varepsilon}-c=\frac{5}{3/5}-3=\frac{25}{3}-3=\frac{16}{3}$$

Підставимо значення p і ε у рівняння (8.7), дістанемо

$$\rho = \frac{\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}\cos\varphi} = \frac{16}{5+3\cos\varphi}.$$

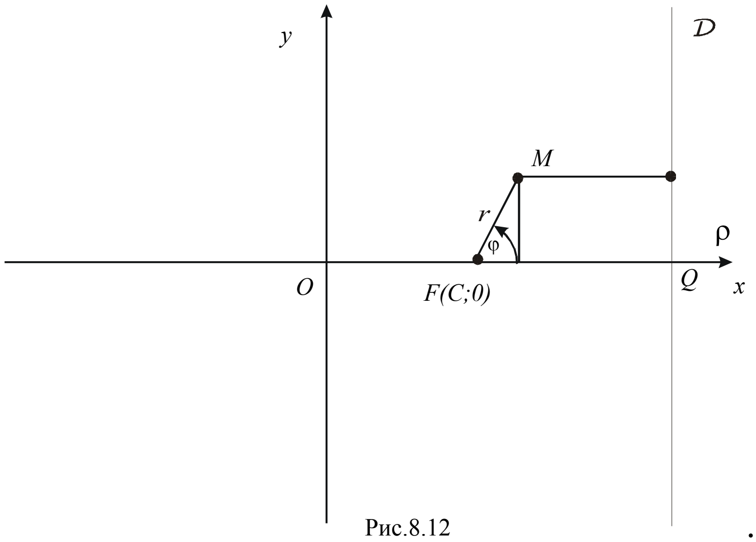


Рис.8.12

Задачі для розв’язування

924. Відносно полярної системи координат скласти рівняння кола, радіус якого дорівнює a і центр знаходиться:

1) у полюсі; 2) в точці $(a, 0)$; 3) в точці (ρ_1, φ_1).

925. Відносно полярної системи координат скласти рівняння еліпса, центр якого збігається з полюсом, а фокальна вісь - з полярною віссю.

926. Під яким кутом до фокальної осі нахилений той діаметр еліпса $\rho^2 = \frac{288}{16-7\cos^2\varphi}$, довжина якого дорівнює 10 одиницям?

927. Скласти рівняння еліпса, прийнявши його фокальну вісь за полярну вісь і помістивши полюс:

1) у лівому фокусі еліпса;

2) у правому фокусі еліпса.

928. Обчислити довжину півосей та відстань між двома фокусами еліпса:

$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}.$$

929. Установити, що рівняння $\rho = \frac{21}{5-2\cos\varphi}$ визначає еліпс, скласти полярні рівняння його директрис.

930. На еліпсі $\rho = \frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\varphi}$ знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 6.

931. Скласти рівняння гіперболи, центр якої збігається з полюсом і дійсна вісь з полярною віссю.

932. Обчислити кут між асимптотами гіперболи $\rho^2 = \dfrac{48}{4\cos^2\varphi - 1}$.

933. Скласти рівняння гіперболи, прийнявши її фокальну вісь за полярну вісь і помістивши полюс у правому фокусі гіперболи.

934. Скласти рівняння асимптот та директрис гіперболи $\rho = \dfrac{2}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$.

935. Скласти полярне рівняння для правої вітки гіперболи $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, якщо полярна вісь співнапрямлена з віссю абсцис, а полюс знаходиться в лівому фокусі.

936. Установити, що рівняння $\rho = \dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$ визначає праву вітку гіперболи, скласти полярні рівняння директрис і асимптот цієї гіперболи.

937. На гіперболі $\rho = \dfrac{15}{3-4\cos\varphi}$ знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 3.

938. Скласти рівняння параболи, прийнявши її вісь за полярну вісь і вершину за полюс.

939. На параболі $\rho = \dfrac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ знайти точку, радіус-вектор якої дорівнює відстані цієї точки від директриси параболи.

940. Скласти рівняння параболи, фокус якої збігається з полюсом і вісь - з полярною віссю.

941. На параболі $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ знайти точку:

1) з найменшим радіус-вектором;
2) з радіус-вектором, який дорівнює параметру параболи.

942. Довести, що добуток перпендикулярів, які проведені з кінців будь-якої фокальної хорди на вісь параболи, є величина стала.

943. Відносно прямокутної системи координат написати канонічні рівняння таких кривих:

1) $\rho = \dfrac{25}{13-12\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$;

3) $\rho = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$; 4) $\rho = \dfrac{4}{\sqrt{5}-\cos\varphi}$.

8.3. Зведення загальних рівнянь ліній другого порядку до канонічного вигляду

Нехай в E_2 введено декартову прямокутну систему координат XOY. Лінією другого порядку в E_2 називається лінія, рівняння якої є рівнянням другого степеня відносно змінних x та y.

Рівняння другого степеня відносно змінних x та y має загальний вигляд

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (8.8)$$

Покладається, що a_{11}, a_{12}, a_{22} одночасно не дорівнюють нулеві. Рівняння (8.8) називають загальним рівнянням лінії другого порядку.

Теорема 8.3. Загальне рівняння (8.8) лінії другого порядку за допомогою ортогонального перетворення базису та паралельного перенесення осей координат можна звести до одного з таких канонічних видів:

I. $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+D=0$, де $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2\neq 0$.

II. $\lambda_1 x^2+2a'_{20}y=0$, де $\lambda_1\neq 0,\ a'_{20}\neq 0$.

III. $\lambda_1 x^2+D=0$, де $\lambda_1\neq 0$.

Зведення загального рівняння лінії другого порядку (8.8) до канонічного виду виконується так:

а) знаходять те ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму старших членів до канонічного вигляду, і виконують в рівнянні відповідну заміну змінних. Внаслідок цього перетворення з рівняння зникає член, який містить добуток координат.

б) виконавши після цього паралельне перенесення осей нової системи координат, рівняння зводять до вигляду I, II або III.

Розглянемо загальне рівняння другого порядку (8.8). Тоді $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$ матриця квадратичної форми старших членів.

Нехай λ_1 та λ_2 - власні числа матриці A, $\vec{e}_1'$ та $\vec{e}_2'$ - одиничні ортогональні власні вектори, що відповідають числам λ_1 і λ_2. Якщо, не змінюючи початку координат, перейдемо до базису $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, в новій системі координат $X'OY'$ рівняння (8.8) має вигляд

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0 \qquad (8.9)$$

При цьому λ_1 та λ_2 одночасно не дорівнюють нулеві, оскільки A ненульова матриця. Далі будемо вважати, що $\lambda_1\neq 0$.

Можливі такі випадки.

I випадок. Якщо $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2\neq 0$, то рівняння (8.9) можна записати у вигляді

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2+\left(a_{00}-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}\right)=0.$$

Виконавши паралельне перенесення координатних осей системи $X'OY'$ за формулами

$$\dot{x}=x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1},\quad \dot{y}=y'+\frac{a'_{20}}{\lambda_2},$$

дістанемо в системі координат $\dot{X}O_1\dot{Y}$ для рівняння (8.9)

$$\lambda_1\dot{x}^2+\lambda_2\dot{y}^2+D=0,\ \text{де}\ O_1\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1};\ -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)\ \text{і}\ D=a_{00}-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}.$$

II випадок. Нехай $\lambda_2=0,\ a'_{20}\neq 0$. Тоді рівняння (8.9) буде мати вигляд $\lambda_1 x'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0$ або

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2+2a'_{20}\left(y'+\frac{a_{00}\lambda_1-a'^2_{10}}{2a'_{20}\lambda_1}\right)=0.$$

Виконавши паралельне перенесення за формулами

$$\dot{x}=x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1},\quad \dot{y}=y'+\frac{a_{00}\lambda_1-a'^2_{10}}{2a'_{20}\lambda_1}$$

одержимо в системі $\dot{X}O_1\dot{Y}$ для рівняння (8.9)

$$\lambda_1\dot{x}^2+2a'_{20}\dot{y}=0,$$

де $O_1\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1};\ -\frac{a_{00}\lambda_1-a'^2_{10}}{2a'_{20}\lambda_1}\right)$.

III випадок. Нехай $\lambda_2=a'_{20}=0$. Тоді рівняння (8.9) буде мати вигляд

$$\lambda_1 x'^2+2a'_{10}x'+a_{00}=0$$

або

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2+a_{00}-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}=0.$$

Виконавши паралельне перенесення за формулами

$$\dot{x}=x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1},\ \dot{y}=y',$$

дістанемо в системі $\dot{X}O_1\dot{Y}$ для рівняння (8.9)

$$\lambda_1\dot{x}^2+D=0,\ \text{де}\ O_1\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1};\ 0\right)\ \text{і}\ D=a_{00}-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}.$$

Означення 8.6. Якщо рівняння (8.8) визначає на площині порожню множину, точку, пряму, пару прямих, то відповідна лінія другого порядку називається виродженою.

Теорема 8.4. Існує лише три види невироджених ліній другого порядку: еліпс, гіпербола, парабола.

Зауваження 8.5. В умовах теореми 8.3 еліпс одержується, якщо $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ D \neq 0$ та $\lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_1 D < 0$; гіпербола - якщо $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ D \neq 0$ та $\lambda_1\lambda_2 < 0$; парабола - якщо $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ a'_{20} \neq 0$.

Задача з розв'язком

Задача. Знайти канонічне рівняння та визначити тип кривої другого порядку

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0 \qquad (8.10)$$

Записати відповідні формули перетворення координат. Виконати схематичний рисунок лінії у початковій системі координат.

Розв'язок. Виписуємо квадратичну форму старших членів

$$F=5x^2+4xy+8y^2.$$

Її матриця A має вигляд $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \Leftrightarrow\ \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0,\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

Отже, квадратична форма F має такий канонічний вигляд

$$F = 4x'^2 + 9y'^2.$$

Знаходимо базис, в якому квадратична форма має канонічний вигляд.

Підставимо $\lambda = \lambda_1 = 4$ в систему

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y = 0, \\ 2x + (8-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Одержимо $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$, звідки $\begin{cases} x = -2y, \\ y = y \end{cases}$ або $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y$, де $y \in (-\infty;\ +\infty)$.

Якщо покладемо y=-1, то дістанемо власний вектор $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тоді вектору $\vec{a}_1$ відповідає одиничний вектор $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Підставляючи $\lambda = \lambda_2 = 9$, отримаємо систему

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0, \\ 2x - y = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, маємо $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} y,\ y \in (-\infty;\ +\infty)$. Покладемо y=2.

Одержимо власний вектор $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Звідки $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Таким чином, $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ і $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ утворюють шуканий ортонормований базис. Перехід до нової системи координат відбувається поворотом осей на кут α такий, що $sin\,\alpha = -1/\sqrt{5}$ і $cos\,\alpha = 2/\sqrt{5}$.

Оскільки при переході до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ координати всіх векторів перетворюються за формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ де } C = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ або}$$

$$x = \left(2/\sqrt{5}\right)x' + \left(1/\sqrt{5}\right)y', \quad y = \left(-1/\sqrt{5}\right)x' + \left(2/\sqrt{5}\right)y',$$

то $-32x - 56y = \left(-8/\sqrt{5}\right)x' - \left(144/\sqrt{5}\right)y'$.

Тоді рівняння лінії другого порядку в базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ буде мати вигляд

$$4x'^2 - \left(8/\sqrt{5}\right)x' + 9y'^2 - \left(144/\sqrt{5}\right)y' + 80 = 0.$$

Виділимо повні квадрати в лівій частині останнього рівняння

$$4\left(x'^2 - \left(2/\sqrt{5}\right)x'\right) + 9\left(y'^2 - \left(16/\sqrt{5}\right)y'\right) = -80 \iff 4\left(x' - 1/\sqrt{5}\right)^2 + 9\left(y' - 8/\sqrt{5}\right)^2 = 36$$

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей. Покладемо

$$\dot{x} = x' - 1/\sqrt{5}, \quad \dot{y} = y' - 8/\sqrt{5}.$$

Новий початок координат O_1 в системі $X'OY'$ має координати $O_1(1/\sqrt{5};\ 8/\sqrt{5})$.

Рівняння лінії в системі координат $\dot{X}O_1\dot{Y}$ буде мати вигляд $4\dot{x}^2 + 9\dot{y}^2 = 36$ або $\dfrac{\dot{x}^2}{9} + \dfrac{\dot{y}^2}{4} = 1$, тобто крива є еліпсом з півосями a=3 та b=2.

Початкову систему координат XOY було повернуто на кут α $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$, тангенс якого дорівнює -1/2. У цій повернутій системі координат центр еліпса розміщено в точці $O_1(1/\sqrt{5};\ 8/\sqrt{5})$, а осі еліпса паралельні осям координат (рис.8.13).

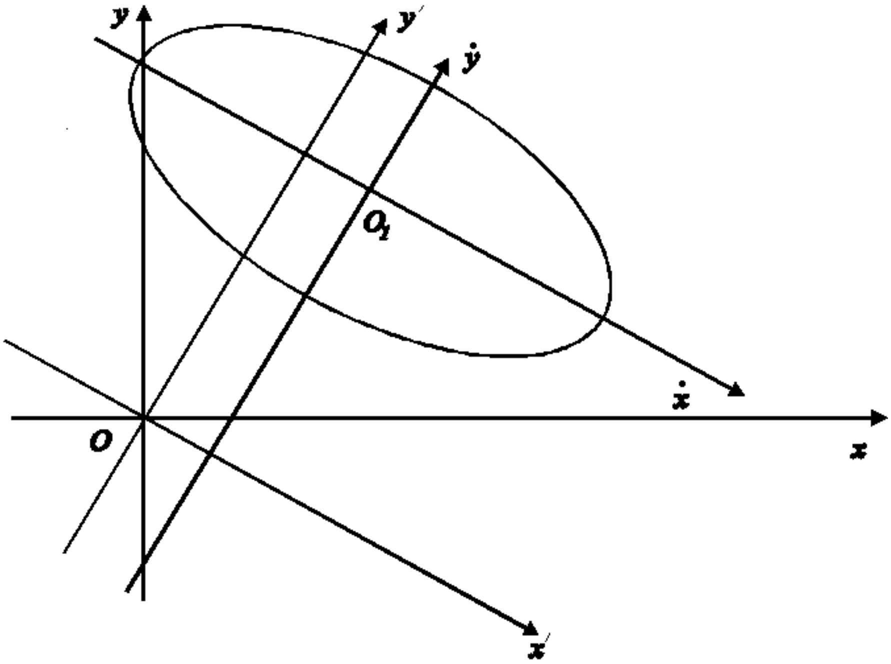


Рис.8.13

Зауваження 8.6. Рівняння (8.10) еліпса в умові задачі громіздке і не є канонічним. Ця обставина випливає з того, що відносно до еліпса початкову систему координат *XOY* було вибрано невдало.

Задачі для розв'язування

В задачах №№ 944-991 знайти канонічне рівняння та визначити тип лінії другого порядку. Виконати схематичний рисунок лінії в початковій системі координат.

944. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0.$
945. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0.$
946. $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0.$
947. $4x^2-y^2+8x-2y+3=0.$
948. $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0.$
949. $x^2+y^2-4x-6y=0.$
950. $2y^2+8x+12y-3=0.$
951. $x^2+4y^2+4x-16y-8=0.$
952. $x^2-4y+6x+5=0.$
953. $y^2-10x-2y-19=0.$
954. $x^2+4y^2-4x-8y+8=0.$
955. $x^2-6x+8=0.$
956. $x^2+4y^2+8y+5=0.$
957. $32x^2+52xy-7y^2+180=0.$
958. $5x^2-6xy+5y^2-32=0.$
959. $17x^2-12xy+8y^2=0.$
960. $5x^2+24xy-5y^2=0.$
968. $21x^2+xy-10y^2=0.$
969. $10x^2-7xy+y^2=0.$
970. $5x^2-4xy+y^2=0.$
971. $17x^2+12xy+8y^2+x+3y-19\frac{11}{16}=0.$
972. $5x^2+12xy-22x-12y=19.$
973. $x^2-2xy+y^2-12x+12y-14=0.$
974. $9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0.$
975. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0.$
976. $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0.$
977. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0.$
978. $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0.$
979. $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0.$
980. $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0.$
981. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0.$
982. $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0.$
983. $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0.$

961. $5x^2-6xy+5y^2+8=0.$
962. $5x^2+8xy+5y^2=9.$
963. $4x^2-4xy+y^2=5.$
964. $13x^2-48xy+26y^2=45.$
965. $x^2-4xy+4y^2=0.$
966. $9x^2+30xy+25y^2=0.$
967. $4x^2-12xy+9y^2-25=0.$
984. $50x^2-8xy+35y^2+100x-8y+67=0.$
985. $41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0.$
986. $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0.$
987. $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0.$
988. $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0.$
989. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0.$
990. $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0.$
991. $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0.$

8.4. Поверхні другого порядку в E_3

Нехай в E_3 задано декартову прямокутну систему координат $OXYZ$.

Поверхнею другого порядку в E_3 називається поверхня, рівняння якої є рівнянням другого степеня відносно змінних x, y, z. В загальному вигляді рівняння другого степеня відносно змінних x, y, z має вигляд

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0 \quad (8.11)$$

Теорема 8.4. Якщо рівняння (8.11) не визначає вироджену поверхню другого порядку (порожню множину, точку, площину, пару площин), воно визначає одну з таких поверхонь другого порядку: еліпсоїд, гіперболоїд (однополий або двополий), конус, параболоїд (еліптичний або гіперболічний), циліндр (еліптичний, гіперболічний або параболічний).

Зауваження 8.7. Зведення рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду здійснюється за допомогою ортогонального перетворення і паралельного перенесення способом, аналогічним способу зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.

В табл.8.1 наведено більш докладне пояснення змісту теореми.

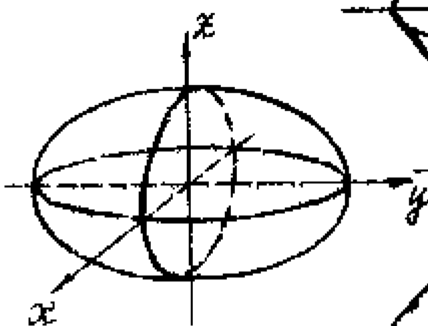
Табл.8.1.

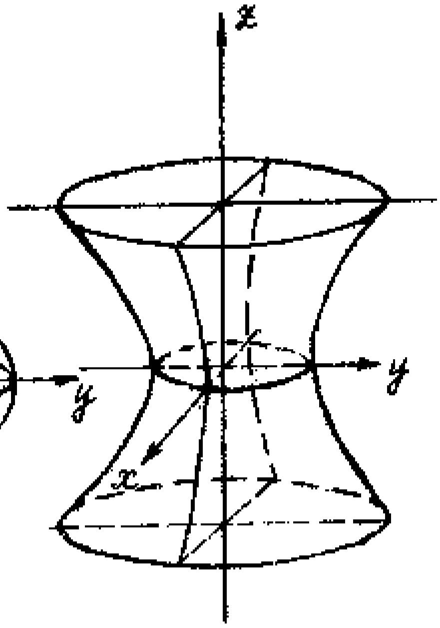
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
ТА ЇХ КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ

№	Поверхня	Канонічне рівняння	Рисунок
1.	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	8.14
2.	Однополий гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	8.15
3.	Двополий гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	8.16

4.	Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	8.17
5.	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	8.18
6.	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	8.19
7.	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	8.20
8.	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	8.21
9.	Параболічний циліндр	$y^2=2px$	8.22

Форму та розташування поверхонь другого порядку вивчають, як правило, методом паралельних перерізів, тобто розглядають перерізи поверхонь площинами, паралельними координатним площинам. Форма та розміри одержаних перерізів дозволяють з'ясувати форму самої поверхні.





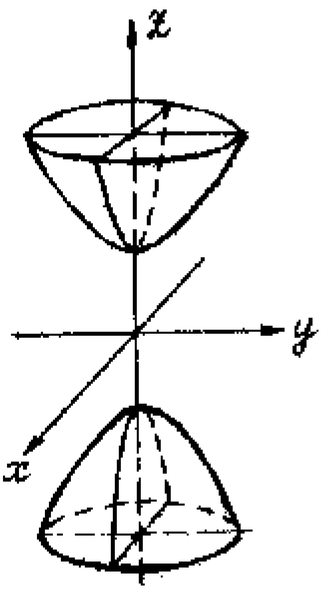


Рис.8.14 Рис.8.15 Рис.8.16

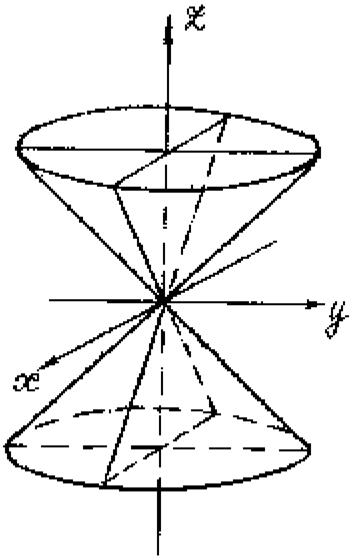


Рис.8.17

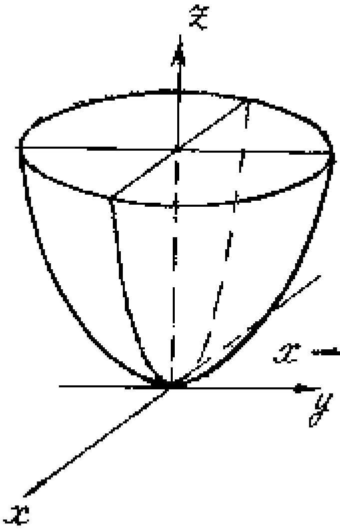


Рис.8.18

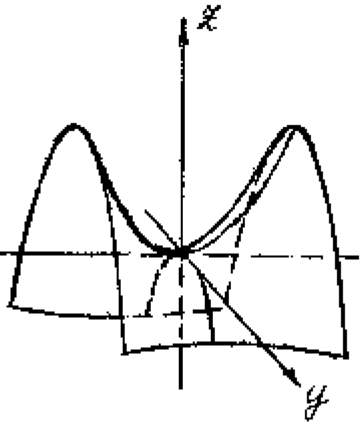


Рис.8.19

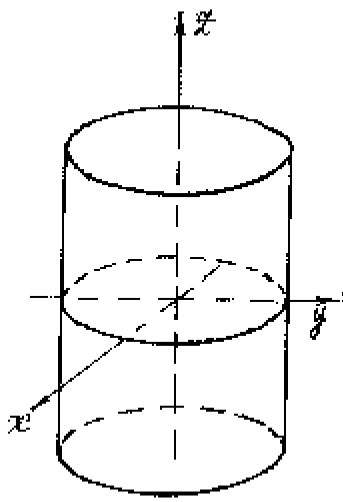


Рис.8.20

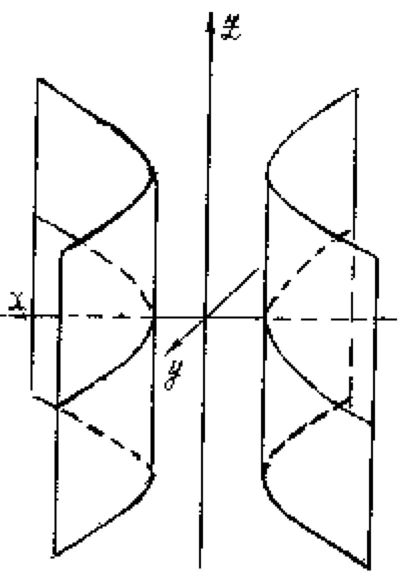


Рис.8.21

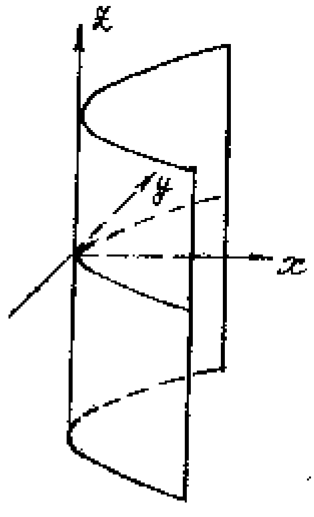


Рис.8.22

Задачі з розв’язком

Задача 1. Знайти лінії перерізу поверхні однополого гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.12)$$

площинами, паралельними координатним площинам.

Розв’язок. Розглянемо переріз однополого гіперболоїда (8.12) площинами, паралельними координатній площині *XOY*, тобто площинами *z=h*. Переріз гіперболоїда площиною *z=h* визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

Звідси випливає, що будь-яка площина *z=h* перерізає гіперболоїд по еліпсу з півосями $a'=a\sqrt{1+h^2/c^2}$, $b'=b\sqrt{1+h^2/c^2}$, причому a' та b' мають найменше значення при *h=0*, тобто еліпс найменших розмірів утворюється в перерізі площиною *z=0*; при нескінченному зростанні $|h|$ величини a' та b' нескінченно зростають (рис.8.23).

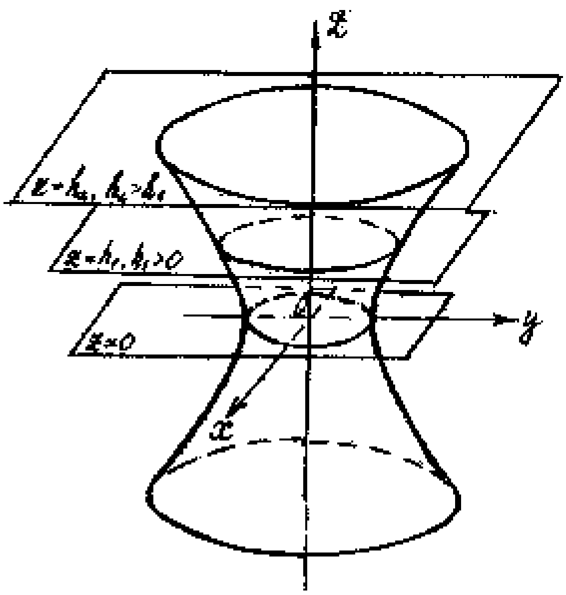


Рис.8.23

Площина *x=h*, паралельна площині *YOZ*, перерізає однополий гіперболоїд (8.12) по лінії, яка визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}, \\ x=h. \end{cases}$$

Якщо $|h|\neq a$, цими рівняннями визначаються гіперболи, при $|h|=a$ - дві прямі, що перетинаються.

Перерізи площинами *y=h,* паралельними площині *XOZ*, аналогічні перерізам гіперболоїда площинами *x=h* (рис.8.24).

Всі ці перерізи дають уявлення про форму поверхні однополого гіперболоїда.

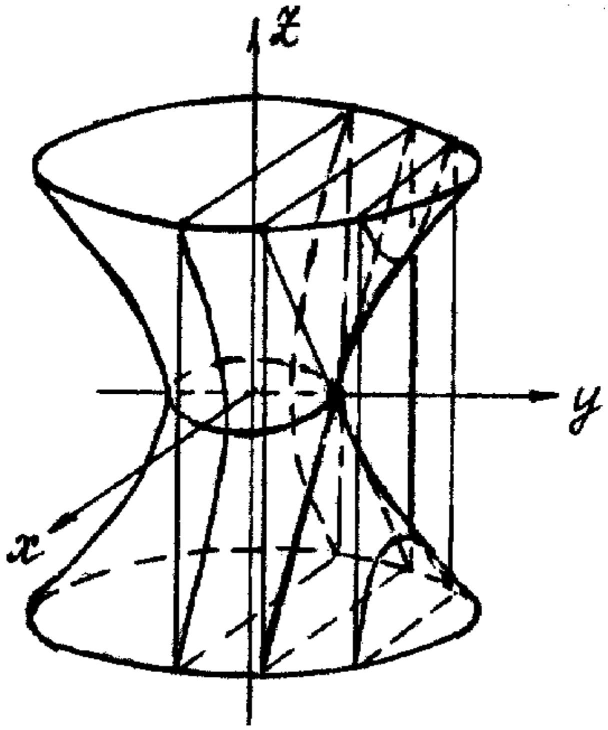


Рис.8.24

Задача 2. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку

$$2x^2+y^2-4xy-4yz+4x+2y-4z=16.$$

Записати відповідні формули перетворення координат. Визначити вид поверхні.

Розв’язок. Записуємо квадратичну форму старших членів:

$$F=2x^2+y^2-4xy-4yz.$$

Матриця A цієї форми має вигляд $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Складаємо та розв’язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=0, \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda=0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0, \Leftrightarrow \lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1=4, \\ \lambda_2=1, \\ \lambda_3=-2. \end{array}\right.$$

Квадратична форма F має такий канонічний вигляд

$$F=4x'^2+y'^2-2z'^2.$$

Щоб знайти базис, в якому квадратична форма має такий вигляд, треба знайти власні вектори лінійного оператора, що визначається матрицею A у системі координат $OXYZ$.

Записуємо систему рівнянь, що визначає шукані власні вектори:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x-2y+0z=0, \\ -2x+(1-\lambda)y-2z=0, \\ 0x-2y-\lambda z=0. \end{cases}$$

Підставляючи $\lambda=\lambda_1=4$, маємо

$$\begin{cases} -2x-2y+0z=0, \\ -2x-3y-2z=0, \\ 0x-2y-4z=0. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} x=2z, \\ y=-2z, \\ z=z \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z, \quad z\in(-\infty;+\infty).$$

Поклавши z=1, дістанемо $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - власний вектор, що відповідає значенню $\lambda_1=4$. Тоді одиничний вектор $\vec{e}_1'=\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}_1$. Аналогічно для значення $\lambda=\lambda_2=1$ одержимо $\vec{e}_2'=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, для $\lambda=\lambda_3=-2$ дістанемо $\vec{e}_3'=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. Вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ утворюють шуканий ортонормований базис.

Матриця переходу до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ буде мати вигляд

$$C=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

При переході до нового базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ координати векторів перетворюються за формулами

$$x=(2/3)x'+(2/3)y'+(1/3)z',$$
$$y=(-2/3)x'+(1/3)y'+(2/3)z',$$
$$z=(1/3)x'-(2/3)y'+(2/3)z'.$$

Підставляючи ці вирази для *x, y, z* в групу членів першого степеня рівняння поверхні, дістанемо

$$4x+2y-4z=(8/3)x'+(8/3)y'+(4/3)z'-(4/3)x'+$$
$$+(2/3)y'+(4/3)z'-(4/3)x'+(8/3)y'-(8/3)z'=6y'.$$

Отже, рівняння даної поверхні в базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ буде мати вигляд

$$4x'^2+y'^2-2z'^2+6y'=16 \quad \text{або} \quad 4x'^2+(y'+3)^2-2z'^2=25.$$

Звідси

$$\frac{x'^2}{25/4}+\frac{(y'+3)^2}{25}-\frac{z'^2}{25/2}=1.$$

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей. Покладемо

$$\dot{x}=x', \;\; \dot{y}=y'+3, \;\; \dot{z}=z'.$$

Новий початок координат $O_1(0, -3, 0)$ в системі $OX'Y'Z'$. Рівняння поверхні в системі координат $O_1\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$ буде мати вигляд

$$\frac{\dot{x}^2}{25/4}+\frac{\dot{y}^2}{25}-\frac{\dot{z}^2}{25/2}=1.$$

Таким чином, дана поверхня є однополим гіперболоїдом.

Задачі для розв'язування

992. Дослідити перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ площинами, паралельними координатним площинам.
993. Знайти перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ координатними площинами. Визначити його вершини та довжину осей.
994. Знайти відношення осей двох паралельних перерізів еліпсоїда $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, а саме: перерізу площиною *XOZ* та площиною, яка віддалена від неї на відстань двох одиниць.
995. Дослідити перерізи двополого гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ площинами, паралельними координатним площинам.
996. Дано однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Знайти лінії його перерізу з координатними площинами.

997. Накреслити головні перерізи еліптичного параболоїда $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ і проекції паралельних їм перерізів на відповідні координатні площини.

998. Методом перерізів дослідити форму і розташування відносно прямокутної системи координат таких поверхонь (накреслити рисунок).

1) $x^2+y^2=2(z-1)^2$. 2) $2y^2+z^2=1-x$.

3) $3x^2-y^2-z^2=3$. 4) $x^2-2y^2+z^2=1$.

999. Установити, що площина $x-2=0$ перерізає еліпсоїд $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по еліпсу; знайти його півосі і вершини.

1000. Установити, що площина $z+1=0$ перерізає однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гіперболі, знайти її півосі і вершини.

1001. Установити, що площина $y+6=0$ перерізає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболі, знайти її параметр та вершину.

1002. Знайти рівняння проекцій на координатні площини перерізу еліптичного параболоїда $y^2+z^2=x$ площиною $x+2y-z=0$.

1003. Установити, яка лінія є перерізом еліпсоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ площиною $2x-3y+4z-11=0$, знайти її центр.

1004. Установити, яка лінія є перерізом гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=y$ площиною $3x-3y+4z+2=0$, знайти її центр.

Установити, які лінії визначаються такими рівняння та знайти центр кожної з них.

1005. $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z,\\ 3x-y+6z-14=0.\end{cases}$ 1006. $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z,\\ x-2y+2=0.\end{cases}$

1007. $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1,\\ 9x-6y+2z-28=0.\end{cases}$

1008. Установити, при яких значеннях m площина $x+mz-1=0$ перерізає двополий гіперболоїд $x^2+y^2-z^2=-1$

1) по еліпсу; 2) по гіперболі.

1009. Установити, при яких значеннях m площина $x+my-2=0$ перерізає еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$

1) по еліпсу; 2) по параболі.

1010. Довести, що еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ має єдину спільну точку з площиною $2x-2y-z-10=0$, знайти її координати.

1011. Довести, що двополий гіперболоїд $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ має єдину спільну точку з площиною $5x+2z+5=0,$ знайти її координати.

1012. Довести, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ має єдину спільну точку з площиною $4x-3y+12z-54=0$, знайти її координати.

1013. Визначити, при якому значенні m площина $x-2y-2z+m=0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$.

1014. Знайти точки перетину поверхні та прямої:

1) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ і $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ і $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

3) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ і $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ і $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

1015. Довести, що площина $2x-12y-z+16=0$ перерізає гіперболічний параболоїд $x^2-4y^2=2z$ по прямолінійних твірних. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.

1016. Довести, що площина $4x-5y-10z-20=0$ перерізає однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ по прямолінійних твірних. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.

1017. Довести, що рівняння $z=xy$ визначає гіперболічний параболоїд.

1018. Довести, що рівняння $z^2=xy$ визначає конус з вершиною у початку координат.

1019. Назвати та побудувати поверхні:

1) $x^2=2yz$; 2) $z-a=xy$.

В задачах №№1020-1031 з'ясувати, які поверхні визначаються такими рівняннями:

1020. $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$

1021. $x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$

1022. $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$.
1023. $3x^2+4y^2+8y-12x+17z=0$.
1024. $x^2+z^2-4x-4z+4=0$.
1025. $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$.
1026. $x^2+2y^2+2z^2-4y+4z+4=0$.
1027. $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$.
1028. $x^2+2y^2-z^2+2x-4y+2z+1=0$.
1029. $2x^2+y^2+2z^2-4x+4y+4z+7=0$.
1030. $x^2-6y^2+3z^2+8x+12y+1=0$.
1031. $x^2+y^2+2x-2y-2z-2=0$.

В задачах №№1032-1041 привести до канонічного вигляду рівняння поверхонь другого порядку. Визначити вид кожної з поверхонь. Знайти відповідні формули перетворення координат.

1032. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz=18$.
1033. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy=15$.
1034. $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4xz=36$.
1035. $x^2+4xy-8xz-2y^2-4yz+z^2=6$.
1036. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz=3$.
1037. $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+12yz=0$.
1038. $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$.
1039. $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-10x+8y+14z=6$.
1040. $2x^2+y^2+2z^2+2xy+2yz+4x+2y-4=0$.
1041. $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz+9z+\frac{1}{4}=0$.