9. ФОРМИ І ТЕНЗОРИ В E_n

9.1. Лінійні форми і тензори рангу 1

Означення 9.1. Функція $y = A(\bar{x})$, аргумент якої $\bar{x} \in E_n$ $(n \geq 1)$, а значення $y \in R$, називається лінійною функцією на E_n, якщо для будь-яких векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \in E_n$ і довільного числа $\lambda \in R$ використовуються рівності

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A(\bar{x}_1) + A(x_2),$$
$$A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x}).$$

Нехай $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n) = e_H$ - фіксований базис в E_n, $(\bar{e}^1,\ldots,\bar{e}^n) = e^B$ - базис, взаємний до e_H, $\bar{x} = x^1\bar{e}_1+\ldots+x^n\bar{e}_n = x_1\bar{e}^1+\ldots+x_n\bar{e}^n$ - розклад вектора $\bar{x}$ за базисами e_H і e^B (п.4.5).

Твердження 9.1. В базисі e_H лінійна функція $A(\bar{x})$ має вигляд

$$A(\bar{x}) = a_1x^1+\ldots+a_nx^n, \qquad (9.1)$$

де

$$a_1 = A(\bar{e}_1),\ldots,a_n = A(\bar{e}_n).$$

Твердження 9.2. В базисі e^B лінійна функція $A(\bar{x})$ має вигляд

$$A(\bar{x}) = a^1x_1+\ldots+a^nx_n, \qquad (9.2)$$

де

$$a^1 = A(\bar{e}^1),\ldots,a^n = A(\bar{e}^n).$$

Означення 9.2. Лінійною формою від n змінних $x_1, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен першого степеня відносно сукупності цих змінних.

Зауваження 9.1. З (9.1) і (9.2) випливає, що лінійна функція $A(\bar{x})$ на E_n є лінійною формою як від сукупності контраваріантних, так і коваріантних координат вектора $\bar{x} \in E_n$. Надалі $A(\bar{x})$ будемо називати лінійною формою на E_n.

Твердження 9.3.

$$A(\bar{x}) = \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle$$

де $\bar{a} = a_1\bar{e}^1+\ldots+a_n\bar{e}^n = a^1\bar{e}_1+\ldots+a^n\bar{e}_n$, $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle$ - скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{x}$ в E_n.

Означення 9.3. Коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$ многочлена (9.1) ($a^1, \ldots, a^n$ многочлена (9.2)) називаються коваріантними (контраваріантними) коефіцієнтами лінійної форми $A(\bar{x})$, а матриця $(a_1 \ \ldots \ a_n)$ (матриця ($a^1 \ldots a^n$)) - коваріантною (контраваріантною) матрицею $A(\bar{x})$ на E_n.

Твердження 9.4. Між коваріантними і контраваріантними коефіцієнтами лінійної форми $A(\bar{x})$ має місце зв'язок

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = (a^1 \quad \dots \quad a^n)\, G \text{ або } a_i = \sum_{k=1}^{n} a^k g_{ki} \,,$$

$i = \overline{1,n}$, де $G = \|g_{ij}\|$ - метрична матриця в E_n (п.4.5).

Нехай $\dot{e}_H$ - новий базис в E_n, $\dot{e}^B$ - базис, взаємний до $\dot{e}_H$, C - матриця переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$. Тоді формули (4.12), (4.13) мають вигляд $\dot{e}_H = e_H C$ і $\dot{e}^B = e^B D$.

Нехай $A(\bar{x}) = \dot{a}_1 \dot{x}^1 + \ldots + \dot{a}_n \dot{x}^n = \dot{a}^1 \dot{x}_1 + .. + \dot{a}^n \dot{x}_n$.

Твердження 9.5. Коваріантні коефіцієнти $A(\bar{x})$ при переході до нового базису перетворюються за формулою

$$\dot{a}_i = \sum_{k=1}^{n} a_k c_i^k \,, \qquad (9.3)$$

а контраваріантні - за формулою

$$\dot{a}^i = \sum_{k=1}^{n} a^k d_k^i \,. \qquad (9.4)$$

Зауваження 9.2. Формула (9.3) збігається з формулою (4.14) перетворення коваріантних координат вектора $\bar{a}$, а формула (9.4) - з формулою (4.15) перетворення контраваріантних координат того ж вектора. Тим самим твердження 9.5 встановлює взаємно однозначну відповідність між $A(\bar{x})$ в E_n та вектором $\bar{a} \in E_n$.

Означення 9.4. Тензором рангу 1 типу (1, 0) (типу (0, 1)) в E_n називається геометричний об'єкт, який в кожному базисі $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ визначається заданням n координат $a_1, \ldots, a_n$ ($a^1, \ldots, a^n$), що змінюються при переході до нового базису $\dot{\bar{e}}, \ldots, \dot{\bar{e}}_n$ за формулою

$$\dot{a}_i = \sum_{k=1}^{n} a_k c_i^k \quad \left(\dot{a}^i = \sum_{k=1}^{n} a^k d_k^i \right). \qquad (9.5)$$

Зауваження 9.3. Тензор типу (1, 0) називають коваріантним, типу (0, 1) - контраваріантним тензором рангу 1.

Зауваження 9.4. Вектор $\bar{a}$ в E_n - це коваріантний тензор рангу 1, якщо $\bar{a}$ задано своїми коваріантними координатами, і контраваріантний тензор рангу 1, якщо $\bar{a}$ задано своїми контраваріантними координатами.

Зауваження 9.5. Формула (9.5) перетворення координат коваріантного (контраваріантного) тензора рангу 1 при зміні базису в E_n збігається з формулою (9.3) ((9.4)) перетворення коваріантних (контраваріантних) коефіцієнтів лінійної форми. Тим самим, задання лінійної форми $A(\bar{x})$ в E_n - можна ототожнювати з заданням коваріантного тензора рангу 1 в E_n, якщо $A(\bar{x})$ задано у вигляді (9.1), або контраваріантного тензора рангу 1, якщо $A(\bar{x})$ задано у вигляді (9.2). При цьому на значення $A(\bar{x})$ можна дивитися як на значення відповідного тензора на векторі $\bar{x}$.

Задачі для розв'язування

Задача 1. Довести формулу (9.1).

Доведення. Нехай $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)=e_H$ фіксований базис в E_n і $\bar{x}=x^1\bar{e}_1+\ldots+x^n\bar{e}_n$.

Тоді $A(\bar{x})=A\left(x^1\bar{e}_1+\ldots+x^n\bar{e}_n\right)=x^1A(\bar{e}_1)+\ldots+x^nA(\bar{e}_n)$. Оскільки $A(\bar{e}_1)=a_1,\ldots,A(\bar{e}_n)=a_n$, то

$$A(\bar{x})=a_1x^1+\ldots+a_nx^n$$

Задача 2. Довести формулу (9.3).

Доведення. Нехай $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n)=e_H$ фіксований базис в E_n, $(\dot{\bar{e}}_1\ldots,\dot{\bar{e}}_n)=\dot{e}_H$ - новий базис і $\dot{e}_H=e_HC$.

Оскільки $\dot{a}_i=A(\dot{\bar{e}}_i)$, а $\dot{\bar{e}}_i=c_i^1\bar{e}_1+\ldots+c_i^n\bar{e}_n$, то

$$\dot{a}_i=A\left(c_i^1\bar{e}_1+\ldots+c_i^n\bar{e}_n\right)=c_i^1A(\bar{e}_1)+\ldots+c_i^nA(\bar{e}_n)=c_i^1a_1+\ldots+c_i^na_n=\sum_{k=1}^{n}a_kc_i^k .$$

Задача 3. Нехай $A(\bar{x})$ - лінійна форма в E_3. Визначити вигляд $A(\bar{x})$ в деякому базисі e_H в E_3, якщо її значення на векторах $\bar{x}_1=(2,3,5)$, $\bar{x}_2=(3,7,4)$, $\bar{x}_3=(1,2,2)$ в e_H дорівнюють відповідно 10, 3, 3.

Розв'язок. За твердженням 9.1 лінійна форма $A(\bar{x})=a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3$.

За умовою задачі для коефіцієнтів лінійної форми a_1, a_2 і a_3 маємо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases}2a_1+3a_2+5a_3=10,\\3a_1+7a_2+4a_3=3,\\a_1+2a_2+2a_3=3.\end{cases}$$

Розв'язком даної системи є числа a_1=3, a_2=-2, a_3=2. Отже, лінійна форма має вигляд

$$A(\bar{x})=3x^1-2x^2+2x^3 .$$

Задача 4. Знайти перетворення змінних x^1, x^2, x^3, що зводить лінійну форму $A(\bar{x})=2x^1+3x^2+x^3$ в E_3 до канонічного вигляду $A(\bar{x})=\dot{x}^1$. Записати координати векторів нового базису.

Розв'язок. Знайдемо базис $\dot{\bar{e}}_1,\dot{\bar{e}}_2,\dot{\bar{e}}_3$, в якому $A(\bar{x})=\dot{x}^1$.

Для цього покладемо

$$\begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + x^3 = \dot{x}^1, \\ \quad\quad x^2 \quad\quad = \dot{x}^2, \\ \quad\quad\quad\quad x^3 = \dot{x}^3. \end{cases}$$

Зауважимо, що при такій заміні змінних x^1, x^2, x^3 на $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3$ форма $A(\bar{x})$ набере вигляду $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$. Крім того цю заміну можна розглядати як перетворення контраваріантних координат вектора $\vec{x}$ за формулою (4.1.5), так як $rang\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

Запишемо цю заміну у вигляді $\begin{cases} x^1 = \frac{1}{2}\dot{x}^1 - \frac{3}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{x}^3, \\ x^2 = \quad\quad \dot{x}^2, \\ x^3 = \quad\quad\quad\quad \dot{x}^3. \end{cases}$.

Бачимо, що матриця перетворення контраваріантних координат має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стовпчики цієї матриці і є координатами векторів $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3$ нового базису в e_H, тобто

$$\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\bar{e}}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. За формулою (9.3) знайти матрицю $\dot{A}$ коефіцієнтів лінійної форми $A(\bar{x}) = -2x^1 - x^2$ в базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$, якщо

$$\dot{\bar{e}}_1 = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \ \dot{\bar{e}}_2 = 4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2.$$

Результат перевірити безпосереднім знаходженням коефіцієнтів лінійної форми в новому базисі.

Розв'язок. Зауважимо, що (9.3) еквівалентна формулі $\dot{A} = AC$. За умовами задачі матриця A лінійної форми $A(\bar{x})$ у старому базисі має вигляд A=(-2 -1), а матриця C переходу від старого базису до нового $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} \dot{a}_1 & \dot{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -15 \end{pmatrix},$$

тобто $\dot{a}_1 = -11,\ \dot{a}_2 = -15$.

Лінійна форма у новому базисі має вигляд $A(\bar{x}) = -11\dot{x}^1 - 15\dot{x}^2$.

Перевіримо правильність результату безпосереднім знаходженням коефіцієнтів. Маємо

$$\dot{a}_1 = A\left(\dot{\bar{e}}_1\right) = A\left(3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2\right) = 3A\left(\bar{e}_1\right) + 5A\left(\bar{e}_2\right).$$

Так як $A\left(\bar{e}_1\right) = -2,\ A\left(\bar{e}_2\right) = -1$, то $\dot{a}_1 = 3(-2) + 5(-1) = -11$. Аналогічно, $\dot{a}_2 = A\left(\dot{\bar{e}}_2\right) = A\left(4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2\right) = 4A\left(\bar{e}_1\right) + 7A\left(\bar{e}_2\right) = 4(-2) + 7(-1) = -15$.

Задачі для розв'язування

1042. Довести формулу (9.2).
1043. Довести формулу (9.4).
1044. Довести твердження 9.3.
1045. Значення лінійної форми $A(\bar{x})$ на векторах $\bar{x}_1 = (2{,}5)$ і $\bar{x}_2 = (3{,}7)$ в деякому базисі e_H в E_2 відповідно дорівнюють 1, 2. Визначити вигляд $A(\bar{x})$ в e_H.
1046. Визначити вигляд лінійної форми $A(\bar{x})$ в базисі e_H простору E_2, якщо її значення на векторах $\bar{x}_1 = (2,-3)$, $\bar{x}_2 = (4,-5)$ в e_H дорівнюють відповідно 4 і 10.
1047. Визначити вигляд лінійної форми $A(\bar{x})$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ простору E_2, якщо її значення на векторах $\bar{a} = (4{,}7)$, $\bar{b} = (5{,}8)$ в цьому базисі дорівнюють відповідно -13 і -14.
1048. Визначити вигляд лінійної форми $A(\bar{x})$ в базисі e_H простору E_3, якщо її значення на векторах $\bar{x}_1 = (5,-6{,}4)$, $\bar{x}_2 = (3,-3{,}2)$, $\bar{x}_3 = (4,-5{,}2)$ дорівнюють відповідно 3, 2, 1.
1049. Визначити вигляд лінійної форми $A(\bar{x})$ в базисі e_H простору E_3, якщо її значення на векторах $\bar{x}_1$=(4,-3,2), $\bar{x}_2$=(6,-2,3), $\bar{x}_3$=(5,-3,2) в e_H дорівнюють відповідно -4, -1 і -3.
1050. Визначити вигляд лінійної форми $A(\bar{x})$ в базисі e_H простору E_3, якщо її значення на векторах $\bar{x}_1 = (5{,}2{,}3)$, $\bar{x}_2 = (2,-2{,}5)$, $\bar{x}_3 = (3{,}4{,}2)$ в e_H дорівнюють відповідно -2, 0 і -10.

1051. Лінійна форма $A(\bar{x})$ в базисі $\bar{e}^1, \bar{e}^2$ простору E_2 має вигляд $A(\bar{x})=x_1+2x_2$. Визначити вигляд $A(\bar{x})$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, якщо метрична матриця $G=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1052. В базисі $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ простору E_3 лінійна форма $A(\bar{x})=x_1+2x_3$. Визначити вигляд цієї форми з коваріантними коефіцієнтами, якщо метрична матриця $G=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1053. Знайти перетворення змінних x^1, x^2, x^3, що зводить лінійну форму $A(\bar{x}) = 3x^1 - x^2$ до канонічного вигляду $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$. Записати базис, в якому ця форма має канонічний вигляд.

1054. Визначити базис, в якому лінійна форма $A(\bar{x}) = x^1 + 2x^2 - x^3$ має канонічний вигляд $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$.

1055. Визначити базис простору E_4, в якому лінійна форма $A(\bar{x}) = 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4$ записується в канонічному вигляді $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$.

1056. Знайти формули перетворення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, що зводять лінійну форму $A(\bar{x}) = x_2 - 2x_3 + x_4$ до канонічного вигляду $A(\bar{x}) = \dot{x}_2$. Записати базис, в якому ця форма має канонічний вигляд.

1057. Довести, що для будь-якої невиродженої лінійної форми $A(\bar{x})$ у просторі E_n існує канонічний базис, в якому ця форма записується у канонічному вигляді $A(\bar{x}) = \dot{x}_1$, де $\dot{x}_1$ - перша координата вектора $\bar{x}$ у цьому базисі.

1058. Знайти матрицю лінійної форми $A(\bar{x}) = 5x^1 + 2x^2$, в базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$, якщо $\dot{\bar{e}}_1 = -\bar{e}_1, \ \dot{\bar{e}}_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$. Результат перевірити безпосереднім знаходженням коефіцієнтів.

1059. Знайти матрицю $\dot{A}$ лінійної форми $A(\bar{x}) = -4x^1 + x^2 - 2x^3$ у новому базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3$, знаючи матрицю $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ переходу від одного базису до іншого. Визначити безпосередньо коваріантні коефіцієнти лінійної форми у новому базисі.

1060. Визначити коваріантні коефіцієнти лінійної форми $A(\bar{x}) = x^1 - x^2 + 3x^3$ у новому базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3$ за допомогою формули

(9.3) та безпосередньо, якщо $\dot{\bar{e}}_1 = 5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\dot{\bar{e}}_2 = 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\dot{\bar{e}}_3 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.

1061. Записати лінійну форму $A(\bar{x}) = 2x^1 - x^2 + 3x^3 + x^4$ у новому базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3, \dot{\bar{e}}_4$, якщо задана матриця переходу $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ від одного базису до іншого. Результат перевірити безпосереднім знаходженням коефіцієнтів.

9.2. Білінійна форма і тензори рангу 2

Означення 9.5. Функція $z = A(\bar{x}, \bar{y})$, аргументи якої $\bar{x}, \bar{y} \in E_n$, а значення $z \in R$, називається білінійною функцією в E_n, якщо для будь-яких векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in E_n$ і довільного числа $\lambda \in R$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} &A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = A(\bar{x}_1, \bar{y}) + A(\bar{x}_2, \bar{y}), \\ &A(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = A(\bar{x}, \bar{y}_1) + A(\bar{x}, \bar{y}_2), \\ &A(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda A(\bar{x}, \bar{y}), \\ &A(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda A(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \tag{9.6}$$

Зауваження 9.6. Білінійна функція $A(\bar{x}, \bar{y})$ є лінійною функцією від кожного з своїх аргументів $\bar{x}$ та $\bar{y} \in E_n$.

<u>Приклад</u>. Скалярний добуток $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ в E_n - білінійна функція в E_n.

Дійсно, з перших трьох аксіом скалярного добутку в евклідовому просторі (п.4.2):

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle, \ \langle (\bar{x}_1 + \bar{x}_2), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}_2, \bar{y} \rangle, \ \langle (\lambda\bar{x}), \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

випливає виконання рівностей (9.6) в означенні білінійної функції в E_n.

Нехай e_H та e^B - пара взаємних базисів в E_n, $\bar{x}, \bar{y} \in E_n$, $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + ... + x^n\bar{e}_n = x_1\bar{e}^1 + ... + x_n\bar{e}^n$, $\bar{y} = y^1\bar{e}_1 + ... + y^n\bar{e}_n = y_1\bar{e}^1 + ... + y_n\bar{e}^n$ - розклад $\bar{x}$ та $\bar{y}$ за базисами e_H та e^B.

<u>**Твердження 9.6**</u>.

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = X^B A_{HH} (Y^B)^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j \tag{9.7}$$

де

$$A_{HH}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=A(\bar{e}_i,\bar{e}_j),\ \ X^B=(x^1\dots x^n).$$

Твердження 9.7.

$$A(\bar{x},\bar{y})=X^B A_H{}^B (Y_H)^T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^j x^i y_j\ , \tag{9.8}$$

де

$$A_H{}^B=\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ . & . & . \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix},\ a_i^j=A(\bar{e}_i,\bar{e}^j),\quad Y_H=\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}.$$

Зауваження 9.7. Представлення $A(\bar{x},\bar{y})$ у випадку, коли вектор $\bar{x}$ задано своїми коваріантними координатами, а вектор $\bar{y}$ - контраваріантними координатами, тут і надалі розглядатися не буде, так як він аналогічний випадку, який розглянуто у твердженні 9.7.

Твердження 9.8.

$$A(\bar{x},\bar{y})=X_H A^{BB}(Y_H)^T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{ij} x_i y_j\ , \tag{9.9}$$

де

$$A^{BB}=\begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n} \\ . & . & . \\ a^{n1} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix},\ a^{ij}=A(\bar{e}^i,\bar{e}^j).$$

Зауваження 9.8. Починаючи з цього місця будемо користуватися новим позначенням сумування. Якщо написано вираз, що складається з однієї букви або добутку декількох букв з індексами та при цьому будь-який індекс зустрічається двічі - один раз зверху, другий раз знизу, то цей вираз буде означати суму членів такого ж вигляду, що написані для всіх значень цього індексу, що повторюється. З урахуванням цієї згоди формули (9.7), (9.8), (9.9) запишуться відповідно у вигляді

$$A(\bar{x},\bar{y})=a_{ij}x^i y^j,\ A(\bar{x},\bar{y})=a_i^j x^i y_j,\ A(\bar{x},\bar{y})=a^{ij}x_i y_j.$$

Зауваження 9.9. Білінійною формою $2n$ змінних $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ називається однорідний многочлен другого степеня лінійний від кожної з сукупностей $x_1, \dots, x_n$ та $y_1, \dots, y_n$ по n змінних. З (9.7), (9.8), (9.9) випливає, що білінійна функція $A(\bar{x},\bar{y})$ в E_n є білінійною формою від координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Надалі $A(\bar{x},\bar{y})$ будемо також називати білінійною формою в E_n.

Означення 9.6. Матриця A_{HH} ($A_H{}^B$, A^{BB}) називається двічі коваріантною (один раз коваріантною та один раз контраваріантною, двічі контраваріантною) матрицею білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$.

Означення 9.7. Елементи a_{ij} матриці A_{HH} (a_i^j матриці $A_H{}^B$, a^{ij} матриці A^{BB}) називаються двічі коваріантними (один раз коваріатними та один раз контраваріантними, двічі контраваріантними) коефіцієнтами білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$.

<u>Приклад.</u> Для білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = \langle \bar{x},\bar{y} \rangle$ буде $a_{ij} = g_{ij}$, $a_i^j = \delta_i^j$, $a^{ij} = g^{ij}$.

Дійсно,

$$a_{ij} = A(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = \langle \bar{e}_i,\bar{e}_j \rangle = g_{ij},\ a_i^j = A(\bar{e}_i,\bar{e}^j) = \langle \bar{e}_i,\bar{e}^j \rangle = \delta_i^j,\ a^{ij} = A(\bar{e}^i,\bar{e}^j) = \langle \bar{e}^i,\bar{e}^j \rangle = g^{ij}$$

Отже, у цьому випадку $A_{HH} = \|g_{ij}\| = G$, $A_H{}^B = \|\delta_i^j\| = E$, $A^{BB} = \|g^{ij}\| =$ $= G^{-1}$ та $\langle \bar{x},\bar{y} \rangle = X^B G (Y^B)^T = X^B (Y_H)^T = X_H G^{-1} (Y_H)^T$ або $\langle \bar{x},\bar{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j =$ $= \delta_i^j x^i y_j = g^{ij} x_i y_j$.

Зауваження 9.10. Нехай $A(\bar{x},\bar{y})$ - симетрична білінійна форма, тобто форма, для якої $A(\bar{x},\bar{y}) = A(\bar{y},\bar{x})$, і квадратична форма $A(\bar{x},\bar{x})$ - додатно означена, тоді $A(\bar{x},\bar{y})$ задовольняє усім аксіомам скалярного добутку евклідового простору. Тому скалярний добуток в L_n можна задати за допомогою білінійної форми такого вигляду.

<u>**Твердження 9.9**</u>. Якщо A_{HH}, $A_H{}^B$, A^{BB} - матриці $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі e_H, то $A_{HH} = A_H{}^B G$, $A^{BB} = G^{-1} A_H{}^B$, де G - метрична матриця базису e_H в E_n.

<u>**Твердження 9.10**</u>. Якщо a_{ij}, a_i^j, a^{ij} - коефіцієнти $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі e_H, то $a_{ij} = a_i^k g_{kj}$, $a^{ij} = a_k^j g^{ki}$.

Нехай e_H, e^B, $\dot{e}_H$, $\dot{e}^B$ дві пари взаємних базисів в E_n, $\dot{e}_H = e_H C$, $\dot{e}^B = e^B D$ (п.9.1).

<u>**Твердження 9.11**</u>. Якщо $\dot{A}_{HH}$, $\dot{A}_H{}^B$, $\dot{A}^{BB}$ - матриці $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі $\dot{e}_H$, то $\dot{A}_{HH} = C^T A_{HH} C$, $\dot{A}_H{}^B = C^T A_H{}^B D$, $\dot{A}^{BB} = D^T A^{BB} D$.

<u>**Твердження 9.12**</u>. Якщо $\dot{a}_{ij}, \dot{a}_i^j, \dot{a}^{ij}$ - коефіцієнти $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі $\dot{e}_H$, то

$$\dot{a}_{ij} = a_{kl} c_i^k c_j^l = \begin{pmatrix} c_i^1 & \dots & c_i^n \end{pmatrix} A_{HH} \begin{pmatrix} c_j^1 \\ \dots \\ c_j^n \end{pmatrix} = C_i^T A_{HH} C_j = A(\overline{C}_i, \overline{C}_j),$$

$$\dot{a}_i^j = a_k^l c_i^k d_l^j = \begin{pmatrix} c_i^1 & \dots & c_i^n \end{pmatrix} A_H{}^B \begin{pmatrix} d_1^j \\ \dots \\ d_n^j \end{pmatrix} = C_i^T A_H{}^B D^j = A(\overline{C}_i, \overline{D}^j), \quad (9.10)$$

$$\dot{a}^{ij} = a^{kl} d_k^i d_l^j = \begin{pmatrix} d_1^i & \dots & d_n^i \end{pmatrix} A^{BB} \begin{pmatrix} d_1^j \\ \dots \\ d_n^j \end{pmatrix} = (D^i)^T A^{BB} D^j = A\left(\overline{D}^i, \overline{D}^j\right)$$

де матриця C_i - i-й стовпчик матриці C, D^j - j-й стовпчик матриці D, а $\overline{C}_i = c_i^1 \overline{e}_1 + \ldots + c_i^n \overline{e}_n, \overline{D}^j = d_1^j \overline{e}^1 + \ldots + d_n^j \overline{e}^n$.

Означення 9.8. Тензором рангу 2 типу (2,0) (типу (1,1), типу (0,2)) в E_n називається геометричний об'єкт, який в кожному базисі e_H визначається заданням n^2 чисел a_{ij} (a_i^j, a^{ij}), що називаються координатами тензора та змінюються при переході до нового базису $\dot{e}_H$ за формулами

$$\dot{a}_{ij} = a_{kl} c_i^k c_j^l \ \left(\dot{a}_i^{\,j} = a_k^l c_i^k d_l^j, \quad \dot{a}^{ij} = a^{kl} d_k^i d_l^j\right).$$

Зауваження 9.11. Тензор рангу 2 типу (2, 0) звичайно називають двічі коваріантним, типу (1, 1) - один раз коваріантним та один раз контраваріантним, типу (0, 2) - двічі контраваріантним тензором рангу 2.

Зауваження 9.12. Формули перетворення координат тензора рангу 2 при переході до нового базису збігаються з формулами (9.10) перетворення одноіменних коефіцієнтів білінійної форми $A(\overline{x}, \overline{y})$. Це дає можливість поставити у відповідність тензору рангу 2 даного типу білінійну форму з коефіцієнтами того ж типу, що дорівнюють відповідним координатам тензора в одному і тому ж базисі E_n. При цьому значення $A(\overline{x}, \overline{y})$ на парі векторів $\overline{x}$, $\overline{y}$ називають і значенням відповідного тензора на парі векторів $\overline{x}$, $\overline{y}$.

<u>Приклад</u>. Білінійній формі $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = X^B G_{HH} (Y^B)^T = X^B (Y_H)^T = \; = X_H G^{BB} (Y_H)^T$ відповідають три тензора рангу 2:

1) двічі коваріантний тензор G, координати якого в e_H дорівнюють $g_{ij} = \langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle$. Матриця координат цього тензора $G_{HH} = G = \|g_{ij}\|$. Цей тензор називається метричним тензором простору E_n.

2) один раз коваріантний та один раз контраваріантний тензор E, координати якого $g_i^j = \langle \overline{e}_i, \overline{e}^j \rangle = \delta_i^j$. Матриця координат цього тензора $G_H^B = E = \|\delta_i^j\|$.

3) двічі контраваріантний тензор G^{-1}, координати якого в e_H дорівнюють $g^{ij} = \langle \overline{e}^i, \overline{e}^j \rangle$. Матриця координат цього тензора $G^{BB} = \|g^{ij}\| = G^{-1}$. Цей тензор називається взаємним до метричного.

Задачі з розв'язком

Задача 1. У просторі E_2 задано білінійну форму $A(\overline{x}, \overline{y})$, яка приймає значення -3 на векторах $2\overline{e}^1 - \overline{e}^2, \overline{e}^1 - \overline{e}^2$; значення -1 на векторах

$\bar{e}^2, \bar{e}^1+\bar{e}^2$; значення -12 на векторах $-\bar{e}^1+\bar{e}^2, 2\bar{e}^1+\bar{e}^2$; значення -6 на векторах $3\bar{e}^2, \bar{e}^1$. Знайти вигляд цієї форми з двічі контраваріантними коефіцієнтами.

Розв'язок. Білінійна форма $A(\bar{x},\bar{y})$ з двічі контраваріантними коефіцієнтами має вигляд:

$$A(\bar{x},\bar{y}) = a^{11}x_1y_1 + a^{12}x_1y_2 + a^{21}x_2y_1 + a^{22}x_2y_2.$$

Для визначення коефіцієнтів a^{11}, a^{12}, a^{21},a^{22} білінійної форми складемо систему 4-х рівнянь, використавши значення білінійної форми на чотирьох парах векторів

$$\begin{cases} a^{11}\cdot 2\cdot 1 + a^{12}\cdot 2\cdot(-1) + a^{21}\cdot(-1)\cdot 1 + a^{22}\cdot(-1)\cdot(-1) = -3, \\ a^{11}\cdot 0\cdot 1 + a^{12}\cdot 0\cdot 1 + a^{21}\cdot 1\cdot 1 + a^{22}\cdot 1\cdot 1 = -1, \\ a^{11}\cdot(-1)\cdot 2 + a^{12}\cdot(-1)\cdot 1 + a^{21}\cdot 1\cdot 2 + a^{22}\cdot 1\cdot 1 = -12, \\ a^{11}\cdot 0\cdot 1 + a^{12}\cdot 0\cdot 0 + a^{21}\cdot 3\cdot 1 + a^{22}\cdot 3\cdot 0 = -6. \end{cases}$$

Остаточно система має вигляд

$$\begin{cases} 2a^{11} - 2a^{12} - a^{21} + a^{22} = -3, \\ a^{21} + a^{22} = -1, \\ -2a^{11} - a^{12} + 2a^{21} + a^{22} = -12, \\ 3a^{21} = -6. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо: $a^{11}=2$, $a^{12}=5$, $a^{21}=-2$, $a^{22}=1$. Шукана білінійна форма має вигляд:

$$A(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1+5x_1y_2-2x_2y_1+x_2y_2.$$

Задача 2. Довести першу з формул твердження 9.11.

Розв'язок. Нехай в E_n зафіксовано два базиси e_H та $\dot{e}_H$, і $\dot{e}_H = e_H C$, де C - матриця переходу від базису $\dot{e}_H$ до базису e_H.

Координати X^B, Y^B векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ в базисі e_H виражаються через координати $\dot{X}^B$, $\dot{Y}^B$ цих векторів в базисі $\dot{e}_H$ за формулами $X^B=\dot{X}^B C^T$, $Y^B=\dot{Y}^B C^T$. Тоді білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ можна записати у вигляді $A(\bar{x},\bar{y}) = \dot{X}^B \dot{A}_{HH} (\dot{Y}^B)^T = \quad = X^B A_{HH} (Y^B)^T = \dot{X}^B C^T A_{HH} C (\dot{Y}^B)^T$, оскільки $(Y^B)^T = C(\dot{Y}^B)^T$. Так як $\bar{x}$ і $\bar{y}$ - довільні вектори E_n, то із рівності $\dot{X}^B \dot{A}_{HH} (\dot{Y}^B)^T = = \dot{X}^B C^T A_{HH} C (\dot{Y}^B)^T$ маємо $\dot{A}_{HH}=C^T A_{HH} C$.

Задача 3. В евклідовому просторі E_3 дано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y_2-x^2y_3+2x^3y_1$ (з один раз коваріантними та один раз контраваріантними коефіцієнтами) та взаємний до метричного тензор G^-

^{1} з матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Визначити вигляд цієї форми з двічі контраваріантними та двічі коваріантними коефіцієнтами.

Розв'язок. За умовою задачі матриця $A_H{}^B$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$ має вигляд

$$A_H{}^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю G знайдем, як обернену до матриці $G^{-1}= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Маємо

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулами твердження 9.9

$$A_{HH}=A_H{}^B G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{BB}=G^{-1}A_H{}^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

і білінійна форма має вигляд

$$A(\bar{x},\bar{y})=x^1y^1+6x^1y^2+3x^1y^3-x^2y^1-3x^2y^2-2x^2y^3+2x^3y^1+2x^3y^2+2x^3y^3.$$

$$A(\bar{x},\bar{y})=-6x_1y_1+3x_1y_2-x_1y_3-4x_2y_1+x_2y_2-x_2y_3+10x_3y_1-3x_3y_2+2x_3y_3.$$

Задача 4. Нехай у просторі E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=2x_1y_1+4x_1y_2+5x_2y_1+6x_2y_2$ в базисі e^B. 1) Знайти матрицю $\dot{A}^{BB}$ форми $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі $\dot{e}^B$ за допомогою формули $\dot{A}^{BB}=D^{T}A^{BB}D$ твердження 9.11, якщо $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$; 2) переконатися в правильності знаходження елементів матриці $\dot{A}^{BB}$ за формулами (9.10) перетворення коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ при переході до нового базису $\dot{e}^B$.

Розв'язок. 1) Матриця A^{BB} білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$ має вигляд $A^{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Визначимо матрицю D.

$$D=(C^{-1})^T = \left(-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\dot{A}^{BB}=D^T A^{BB} D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 28 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}.$$

2) Переконаємося в правильності знаходження елементів матриці $\dot{A}^{BB}$ за формулою (9.10). Маємо

$$\dot{a}^{11} = D_1^T A^{BB} D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 + 32 = 44,$$

$$\dot{a}^{12} = D_1^T A^{BB} D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 + 16 = 28,$$

$$\dot{a}^{21} = D_2^T A^{BB} D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 + 20 = 27,$$

$$\dot{a}^{22} = D_2^T A^{BB} D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 + 10 = 17.$$

Запишемо нарешті формули перетворення коваріантних координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ при переході від базису e^B до $\dot{e}^B$. Оскільки $X_H=\dot{X}_H C^{-1}$, $Y_H=\dot{Y}_H C^{-1}$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2, & y_1 &= \dot{y}_1 + \dot{y}_2, \\ x_2 &= 2\dot{x}_1 + \dot{x}_2, & y_2 &= 2\dot{y}_1 + \dot{y}_2. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} A(\bar{x},\bar{y}) &= 2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 4(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 5(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \\ &+ 6(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2) = 44\dot{x}_1\dot{y}_1 + 28\dot{x}_1\dot{y}_2 + 27\dot{x}_2\dot{y}_1 + 17\dot{x}_2\dot{y}_2. \end{aligned}$$

Задачі для розв'язування

1062. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$, яка у площині E_2 приймає значення 6, 2, -23, -10 відповідно на парах векторів $2\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2$; $\bar{e}_1 + \bar{e}_2, -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$; $2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2, \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$; $-\bar{e}_2, 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

1063. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$, яка у площині E_2 на парі векторів $\bar{e}_1+2\bar{e}_2, \bar{e}_1-\bar{e}_2$ приймає значення 15, на парі векторів $2\bar{e}_1, 3\bar{e}_1+\bar{e}_2$ - значення 10, на парі векторів $7\bar{e}_2, 4\bar{e}_1+5\bar{e}_2$ - значення -147 та парі $\bar{e}_1-2\bar{e}_2, \bar{e}_1-\bar{e}_2$ - значення -9.

1064. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$, яка у площині E_2 приймає відповідно значення -1, 9, 5, 20 на парах векторів (1, 2), (1, 0); (-1, -2), (2, -1); (2, -3), (1, 2); (1, 1), (-1, 4), координати яких задано в базисі e^B.

1065. У площині E_2 білінійна форма $A(\bar{x},\bar{y})$ на парі векторів $\bar{e}^1+\bar{e}^2, 3\bar{e}^1-\bar{e}^2$ - приймає значення 15, на парі векторів $-\bar{e}^2, \bar{e}^1$ - значення -3, на парі векторів $\bar{e}^1+\bar{e}^2, -\bar{e}^1-\bar{e}^2$ приймає значення -5, на парі векторів $2\bar{e}^1, 2\bar{e}^2$ приймає значення -4. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$.

1066. В E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+2x_1y_2-x_2y_2$ та метричний тензор G з матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Визначити вигляд цієї білінійної форми з двічі коваріантними коефіцієнтами і один раз коваріантними та один раз контраваріантними коефіцієнтами.

1067. Метрика евклідового простору E_3 задана метричним тензором G з матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Записати білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y^1+x^1y^2+x^2y^1+x^2y^2+x^3y^1+2x^3y^3$ у вигляді форми з двічі контраваріантними коефіцієнтами.

1068. Білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y_1-x^2y_2+2x^3y_3$ задано в E_3 з взаємним до метричного тензором G^{-1}, матриця якого $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Який вигляд буде мати ця білінійна форма з двічі коваріантними і двічі контраваріантними коефіцієнтами.

1069. В E_3 задано метричний тензор G з матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ та білінійна форма $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y_1-2x^2y_1-4x^2y_2+4x^3y_3$. Записати цю форму у вигляді форми з двічі коваріантними і двічі контраваріантними коефіцієнтами.

1070. Нехай $A(\bar{x},\bar{y})$ - білінійна форма з двічі контраваріантною матрицею

$$A^{BB}=\begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n} \\ . & . & . \\ a^{n1} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}$$ в базисі e^B. Знайти закон зміни матриці A^{BB} при переході до нового базису $\dot{e}^B$.

1071. Знайти закон зміни матриці A_H^B білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$ при переході від базису e_H до нового базису $\dot{e}_H$ в E_n. Як зміниться закон, якщо розглянути координати вектора $\bar{x}$ в базисі e^B, а координати вектора $\bar{y}$ в базисі e_H?

1072. Нехай у площині E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2$ з двічі контраваріантними коефіцієнтами. Знайти її матрицю $\dot{A}^{BB}$, якщо матриця C переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$ має вигляд $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1073. В умовах задачі № 1072 визначити двічі контраваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$ за формулами перетворення цих коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ при переході до нового базису $\dot{e}_H$.

1074. Визначити двічі контраваріантну матрицю $\dot{A}^{BB}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})=2x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$ в базисі $\dot{e}^B$, якщо $\dot{\bar{e}}_1=\bar{e}_1+2\bar{e}_2$, $\dot{\bar{e}}_2=\bar{e}_1-\bar{e}_2$.

1075. В умовах задачі № 1074 визначити двічі контраваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}^B$, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів.

1076. Знайти двічі коваріантну матрицю $\dot{A}_{HH}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y^1+x^1y^2+x^2y^1-x^2y^2$, яка задана у площині E_2, якщо $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1077. В умовах задачі № 1076 переконатися в правильності знаходження елементів матриці $\dot{A}_{HH}$ за формулами перетворення коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ при переході до нового базису .

1078. Знайти двічі коваріантну матрицю $\dot{A}_{HH}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})=2x^1y^1+4x^1y^2+5x^2y^1+6x^2y^2$, яка задана у площині E_2, якщо $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1079. В умовах задачі № 1078 визначити коефіцієнти $\dot{a}_{11},\dot{a}_{12},\dot{a}_{21},\dot{a}_{22}$, як значення білінійної форми на базисних векторах $\dot{a}_{ij}=A\left(\dot{\bar{e}}_i,\dot{\bar{e}}_j\right)$, використовуючи формули перетворення базисних векторів.

1080. У площині E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=2x^1y_1+4x^1y_2+5x^2y_1+6x^2y_2$. Визначити матрицю $\dot{A}_H^B$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$, якщо $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1081. В умовах задачі № 1078 визначити коефіцієнти $\dot{a}_1^1,\dot{a}_1^2,\dot{a}_2^1,\dot{a}_2^2$, за формулами перетворення коефіцієнтів та безпосередньою підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат при переході до нового базису.

1082. Знайти матрицю $\dot{A}_H^B$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y_1+2x^1y_2+x^2y_1-2x^2y_2$ в новому базисі $\dot{e}_H$, якщо $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1083. В умовах задачі № 1082 знайти коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$ безпосередньою підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ при переході до нового базису .

1084. Нехай у просторі E_3 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y^1+2x^2y^2+3x^3y^3$ в базисі e_H. Знайти її матрицю $\dot{A}_{HH}$ в базисі $\dot{e}_H$, якщо $\dot{\bar{e}}_1=(1,1,1)$, $\dot{\bar{e}}_2=(1,1,-1)$, $\dot{\bar{e}}_3=(1,-1,-1)$.

1085. В умовах задачі № 1084 визначити двічі коваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$ користуючись формулами перетворення коефіцієнтів.

1086. Знайти матрицю $\dot{A}_{HH}$ двічі коваріантної білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y^2+x^2y^3+x^3y^1$ в базисі $\dot{\bar{e}}_1$, $\dot{\bar{e}}_2$, $\dot{\bar{e}}_3$, якщо $\dot{\bar{e}}_1=(1,0,0)$, $\dot{\bar{e}}_2=(1,1,0)$, $\dot{\bar{e}}_3=(1,1,1)$.

1087. В умовах задачі № 1086 визначити двічі коваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\overset{\bullet}{e}_H$ за формулами $\dot{a}_{ij} = A\left(\overset{\bullet}{\bar{e}}_i, \overset{\bullet}{\bar{e}}_j\right)$.

1088. Записати двічі контраваріантну матрицю $\overset{\bullet}{A}^{BB}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1-2x_2y_2+x_3y_1$ в новому базисі $\overset{\bullet}{e}_H$, якщо $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до базису $\overset{\bullet}{e}_H$.

1089. В умовах задачі № 1088 визначити двічі контраваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\overset{\bullet}{e}_H$, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат $\bar{x}$ та $\bar{y}$ при переході до нового базису.

1090. В E_3 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y_2+x^2y_3+x^3y_1$. Знайти матрицю $\overset{\bullet}{A}{}_H^B$ білінійної форми в новому базисі $\overset{\bullet}{e}_H$, якщо $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до базису $\overset{\bullet}{e}_H$.

1091. В умовах задачі № 1090 визначити коефіцієнти $\overset{\bullet}{a}{}_i^j,\ i,j=1,2,3$ білінійної форми, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів. Результати перевірити, розглядаючи коефіцієнти як значення білінійної форми на базисних векторах.

1092. В E_4 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})=x^1y^2+x^2y^3+x^3y^4$ в базисі e_H. Знайти її матрицю $\overset{\bullet}{A}_{HH}$ в новому базисі $\overset{\bullet}{e}_H$, якщо $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\overset{\bullet}{e}_H$.

1093. В умовах задачі № 1092 визначити коефіцієнти $\dot{a}_{23}$ та $\dot{a}_{42}$ користуючись формулами для перетворення коефіцієнтів. Результат перевірити, визначивши їх значеннями білінійної форми на базисних векторах $\dot{a}_{23} = A\left(\overset{\bullet}{\bar{e}}_2, \overset{\bullet}{\bar{e}}_3\right)$, $\dot{a}_{42} = A\left(\overset{\bullet}{\bar{e}}_4, \overset{\bullet}{\bar{e}}_2\right)$.

1094. Користуючись означенням тензора рангу 2 довести, що метричні коефіцієнти $g_{ij}\ \left(i,j=\overline{1,n}\right)$, є координатами двічі коваріантного тензора в E_n.

1095. Користуючись означенням тензора рангу 2 довести, що елементи матриці $G^{-1}=\|g^{ij}\|,\ i,j=\overline{1,n}$, є координатами двічі контраваріантного тензора в E_n.

1096. Користуючись означенням тензора рангу 2 довести, що числа δ_i^j (символ Кронекера), $i,j=\overline{1,n}$, є координатами один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора в E_n. Записати білінійну форму, яка відповідає цьому тензору.

1097. Довести, що елементи матриці лінійного оператора в E_n є координатами один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора рангу 2.

1098. Нехай $A(\bar{x})=a_1x^1+\ldots+a_nx^n$ - лінійна форма в E_n. Довести, що коефіцієнти a_ia_j $(i,j=\overline{1,n})$ квадрата цієї форми є координатами двічі коваріантного тензора.

1099. Нехай a_{ij} $(i,j=\overline{1,n})$ - координати двічі коваріантного тензора в базисі e_H простору E_n. Довести, що якщо матриця $A=\|a_{ij}\|$ вироджена, то і матриця $\dot{A}=\|\dot{a}_{ij}\|$, де $\dot{a}_{ij}$ - координати того ж тензора в базисі $\dot{e}_H$, теж вироджена.

1100. Нехай матриця $A=\|a_{ij}\|$ невироджена. Довести, що елементи матриці $A^{-1}=\|a^{ij}\|$, оберненої до A, є координатами двічі контраваріантного тензора, якщо елементи a_{ij} матриці A є координатами двічі коваріантного тензора.

9.3. Полілінійна форма та тензори довільного рангу. Основні операції над тензорами

Означення 9.9. Функція $z=A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k)$, аргументи якої $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k\in E_n$, а значення $z\in R$, називається полілінійною функцією в E_n, якщо вона є лінійною функцією від кожного з своїх аргументів окремо.

Нехай перші $p(0\le p\le k)$ з аргументів $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_p$ функції $A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k)$ задані своїми контраваріантними координатами в базисі e_H, а решта k-p=q аргументів $\bar{x}_{p+1}=\bar{y}^1,\ldots,\bar{x}_{p+q}=\bar{y}^q$ - коваріантними координатами в базисі e^B.

<u>*Твердження 9.13.*</u>

$$A\left(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_p,\bar{y}^1,\ldots,\bar{y}^q\right)=a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\,\underset{1}{x}^{i_1}\ldots\underset{p}{x}^{i_p}\,\overset{1}{y}_{j_1}\ldots\overset{q}{y}_{j_q}, \tag{9.11}$$

де $\underset{s}{x}^1,\dots,\underset{s}{x}^n$ - координати вектора $\bar{x}_s$ в базисі e_H, $\overset{t}{y}_1,\dots,\overset{t}{y}_n$ - координати вектора $\bar{y}^t$ в базисі e^B, $a_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q} = A\left(\bar{e}_{i_1},\dots,\bar{e}_{i_p},\bar{e}^{j_1},\dots,\bar{e}^{j_q}\right)$.

В правій частині (9.11) підсумовування проводиться за індексами i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q, кожний з яких незалежно від інших пробігає значення від 1 до n.

Зауваження 9.13. Полілінійною формою від kn змінних $\underset{1}{x}^1,\dots,\underset{1}{x}^n;\dots;\underset{p}{x}^1,\dots,\underset{p}{x}^n;\overset{1}{y}_1,\dots,\overset{1}{y}_n;\dots;.\overset{q}{y}_1,\dots,\overset{q}{y}_n$ називається однорідний многочлен степеня k лінійний окремо від кожної із сукупності n змінних-координат векторів $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_p,\bar{y}^1,\dots,\bar{y}^q$. З (9.11) випливає, що полілінійна функція в E_n є полілінійною формою від координат векторів-аргументів. Тому полілінійну функцію в E_n називають і полілінійною формою в E_n.

Означення 9.10. Коефіцієнти $a_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ в (9.11) називаються p-разів коваріантними та q-разів контраваріантними або типу (p,q) коефіцієнтами полілінійної форми $A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\vec{x}_k)$.

<u>*Твердження 9.14*</u>. Для коефіцієнтів полілінійної форми в фіксованому базисі e_H мають місце такі рівності:

Якщо p>0,

$$a_{i_1\dots i_{p-1}\alpha}^{j_1\dots j_q} g^{\alpha i_p} = a_{i_1\dots i_{p-1}}^{i_p j_1\dots j_q}.$$

Якщо q>0,

$$a_{i_1\dots i_p}^{\alpha j_2\dots j_q} g_{\alpha j_1} = a_{i_1\dots i_p j_1}^{j_2\dots j_q}.$$

<u>*Твердження 9.15*</u>. Якщо $\dot{a}_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ коефіцієнти полілінійної форми $A(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_k)$ в базисі $\dot{e}_H$, то

$$\dot{a}_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q} = a_{k_1\dots k_p}^{l_1\dots l_q} c_{i_1}^{k_1}\dots c_{i_p}^{k_p} d_{l_1}^{j_1}\dots d_{l_q}^{j_q} \qquad (9.12)$$

де $C=\left\|c_j^i\right\|$ - матриця переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$, $D=(C^{-1})^T=\left\|d_i^j\right\|$ (п.4.5).

Означення 9.11. Тензором рангу нуль в E_n називається геометричний об'єкт, який в кожному базисі e_H визначається заданням одного й того ж числа.

<u>Приклад</u>. Модуль вектора $\bar{a}$ - тензор рангу нуль.

Означення 9.12. Тензором A рангу k $(k\in N)$ типу $(p,\ q)$ в E_n $(p+q=k,\ p\geq 0, q\geq 0)$ називається геометричний об'єкт, який в кожному

базисі e_H визначається заданням n^k чисел $a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$, що називаються координатами тензора A та змінюються при переході до нового базису $\dot{e}_H$ за формулами

$$\dot{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = a_{k_1 \ldots k_p}^{l_1 \ldots l_q} c_{i_1}^{k_1} \ldots c_{i_p}^{k_p} d_{l_1}^{j_1} \ldots d_{l_q}^{j_q} \qquad (9.13)$$

<u>*Позначення*</u>. Будемо писати $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$.

Зауваження 9.14. Тензор рангу k типу (p, q) звичайно називають p разів коваріантним та q разів контраваріантним тензором рангу k ($k=p+q$).

Зауваження 9.15. Формули (9.13) перетворення координат тензора рангу k при переході до нового базису збігаються з формулами (9.12) перетворення одноіменних коефіцієнтів полілінійної форми. Це дає можливість тензору рангу k типу (p, q) поставити у відповідність полілінійну форму степеня k вигляду (9.11) з коефіцієнтами, що дорівнюють відповідним координатам тензора в одному і тому ж базисі e_H. При цьому значення полілінійної форми (9.11) на векторах $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^q$ називають і значеннями відповідного тензора на цих векторах.

Під основними операціями над тензорами розуміють операції множення тензора на число, додавання тензорів, множення тензорів, перестановки індексів тензора, згортання індексів тензора, підняття та опускання індексів тензора.

Рівність тензорів. Два тензори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли вони однакового типу і мають рівні відповідні координати в деякому базисі.

Множення тензора на число. Добутком αA тензора $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ на число α називається тензор $(\alpha A)_{e_H} = \left\{ \alpha\, a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$.

Зауваження 9.16. Якщо полілінійну форму помножити на число α, то коефіцієнти добутку визначаться за цією ж формулою.

Додавання тензорів. Сумою $A+B$ тензорів $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ та $B_{e_H} = \left\{ b_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ типу (p, q) називається тензор C, для якого $C_{e_H} = \left\{ c_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} + b_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$.

Зауваження 9.17. Якщо додати дві полілінійні форми з коефіцієнтами одного і того ж типу (p, q), то коефіцієнти полілінійної форми, що дорівнює їх сумі, визначаться за цією ж формулою.

Зауваження 9.18. Тензори A та B можна додати тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий тип.

Зауваження 9.19. Під різницею *A-B* тензорів *A* та *B* розуміють тензор $C=A+(-1)B$.

Множення тензорів. Нехай $A_{e_H}=\left\{a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\right\}$ - тензор типу (*p*, *q*), $B_{e_H}=\left\{b_{l_1\ldots l_r}^{m_1\ldots m_s}\right\}$ - тензор типу (*r*, *s*).

Покладемо $l_1=i_{p+1}, \ldots, l_r=i_{p+r}$, $m_1=j_{q+1}, \ldots, m_s=j_{q+s}$.

Добутком $C=AB$ тензорів *A* та *B* називається тензор типу $(p+r, q+s)$, для якого

$$C_{e_H}=\left\{c_{i_1\ldots i_{p+r}}^{j_1\ldots j_{q+s}}\right\}=\left\{a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}b_{l_1\ldots l_r}^{m_1\ldots m_s}\right\}.$$

Зауваження 9.20. Якщо перемножити дві довільні полілінійні форми з коефіцієнтами типів (*p, q*) та (*r, s*), то коефіцієнти полілінійної форми типу $(p+r, q+s)$, що дорівнює їх добутку, визначаться за цим же правилом.

Зауваження 9.21. Операція множення визначена для тензорів *A* та *B* довільних типів.

Перестановка індексів. Ця операція полягає в переході від даного тензора *A* до тензора *B* за таким правилом: верхні та нижні індекси кожної координати тензора *A* в будь-якому базисі підлягають одній і тій самій перестановці (перестановка верхніх індексів, взагалі, не збігається з перестановкою нижніх індексів).

Зауваження 9.22. За цим же правилом змінюються коефіцієнти полілінійної форми при перестановках її аргументів, що задані координатами одного і того ж типу.

Згортання тензора. Нехай *A* - тензор типу (*p, q*), для якого $p\neq 0$ та $q\neq 0$. Визначимо згортку тензора *A* за парою виділених індексів, один з яких верхній, а другий - нижній. В довільному базисі e_H зафіксуємо значення $(q$-1) верхніх та $(p$-1) нижніх індексів, крім двох виділених. Розглянемо координати тензора *A* в e_H з фіксованими значеннями $(q$-1) верхніх та $(p$-1) нижніх індексів та рівними виділеними індексами. Сума таких координат визначає координату тензора *B* в e_H з фіксованими $(q$-1) верхніми та $(p$-1) нижніми індексами. Тензор *B* і є результатом згортки тензора *A* за парою виділених індексів.

Зауваження 9.23. Крім операції "згортання тензора" розглядають операцію "згортання тензорів", що полягає в слідуючому: нехай *A* тензор типу (*p, q*), для якого $p\neq 0$, *B* - тензор типу (*r, s*), для якого $s\neq 0$. Під згортанням тензорів *A* та *B* будемо розуміти згортання тензора *AB* за одним з нижніх індексів *A* та одним з верхніх індексів тензора *B*.

Операція підняття та опускання індексів. Операція підняття індекса полягає у переході від тензора *A* типу (*p, q*) при $p>0$ до тензору *B* типу $(p-1, q+1)$ за правилом

$$B_{e_H} = \left\{ b^{i_p j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_{p-1}} \right\} = \left\{ g^{i_p \alpha} a^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_{p-1} \alpha} \right\}. \qquad (9.14)$$

Операція опускання індекса полягає у переході від тензора A типу (p, q) при $q>0$ до тензору C типу (p+1, q-1) за правилом

$$C_{e_H} = \left\{ c^{j_2 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p j_1} \right\} = \left\{ g_{j_1 \alpha} a^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \right\}. \qquad (9.15)$$

Зауваження 9.24. За цим же правилом змінюються коефіцієнти полілінійної форми в фіксованому базисі при зміні типу координат одного з аргументів.

Зауваження 9.25. Користуючись операціями підняття (опускання) індекса та перестановки індексів, можна довільний нижній (верхній) індекс підняти (опустити) на довільне місце серед верхніх (нижніх) індексів.

Задачі з розв'язком

Задача 1. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ евклідового простору E_2 дано трилінійну функцію $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = x^1 y^2 z_2 - 4x^2 y^1 z_1$ у вигляді трилінійної форми з двічі коваріантними і один раз контраваріантними коефіцієнтами. Визначити коефіцієнти трилінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ в базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$: 1) користуючись формулами (9.12) перетворення коефіцієнтів; 2) безпосередньою підстановкою в полілінійну форму формул перетворення координат векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, якщо $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. 1) Запишемо коефіцієнти полілінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$a^1_{11} = 0,\ a^1_{12} = 0,\ a^1_{21} = -4,\ a^1_{22} = 0,\ a^2_{11} = 0,\ a^2_{12} = 1,\ a^2_{21} = 0,\ a^2_{22} = 0.$$

Коефіцієнти форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ при переході до нового базису перетворюються за формулою (9.12)

$$\dot{a}^k_{ij} = a^m_{sl} c^s_i c^l_j d^k_m.$$

При цьому матриця D має вигляд $D=(C^{-1})^T = \begin{pmatrix} d^1_1 & d^2_1 \\ d^1_2 & d^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Отже,

$$\dot{a}_{11}^{1} = a_{12}^{2} c_1^1 c_1^2 d_2^1 + a_{21}^{1} c_1^2 c_1^1 d_1^1 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 = -2 + 12 = 10,$$
$$\dot{a}_{12}^{1} = a_{12}^{2} c_1^1 c_2^2 d_2^1 + a_{21}^{1} c_1^2 c_2^1 d_1^1 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 3 = 6 - 24 = -18,$$
$$\dot{a}_{21}^{1} = a_{12}^{2} c_2^1 c_1^2 d_2^1 + a_{21}^{1} c_2^2 c_1^1 d_1^1 = 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 36 = -32,$$
$$\dot{a}_{22}^{1} = a_{12}^{2} c_2^1 c_2^2 d_2^1 + a_{21}^{1} c_2^2 c_2^1 d_1^1 = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 3 = -12 + 72 = 60,$$
$$\dot{a}_{11}^{2} = a_{12}^{2} c_1^1 c_1^2 d_2^2 + a_{21}^{1} c_1^2 c_1^1 d_1^2 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1 + 4 = 3,$$
$$\dot{a}_{12}^{2} = a_{12}^{2} c_1^1 c_2^2 d_2^2 + a_{21}^{1} c_1^2 c_2^1 d_1^2 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 1 = 3 - 8 = -5,$$
$$\dot{a}_{21}^{2} = a_{12}^{2} c_2^1 c_1^2 d_2^2 + a_{21}^{1} c_2^2 c_1^1 d_1^2 = 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 12 = -10,$$
$$\dot{a}_{22}^{2} = a_{12}^{2} c_2^1 c_2^2 d_2^2 + a_{21}^{1} c_2^2 c_2^1 d_1^2 = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 1 = -6 + 24 = 18.$$

Тоді трилінійна форма в новому базисі буде мати вигляд:

$$A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 10\dot{x}^1 \dot{y}^1 \dot{z}_1 - 18\dot{x}^1 \dot{y}^2 \dot{z}_1 - 32\dot{x}^2 \dot{y}^1 \dot{z}_1 + 60\dot{x}^2 \dot{y}^2 \dot{z}_1 +$$
$$+ 3\dot{x}^1 \dot{y}^1 \dot{z}_2 - 5\dot{x}^1 \dot{y}^2 \dot{z}_2 - 10\dot{x}^2 y^1 \dot{z}_2 + 18\dot{x}^2 \dot{y}^2 \dot{z}_2.$$

2) Переконаємося в правильності знайдених коефіцієнтів безпосередньою підстановкою в трилінійну $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ форму формул перетворення координат векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ при переході до нового базису.

Для координат вектора $\bar{x}$ маємо $(X^{B})^T = C\,(\dot{X}^{B})^T$ або $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix}$.

Звідки

$$x^1 = \dot{x}^1 - 2\dot{x}^2,$$
$$x^2 = -\dot{x}^1 + 3\dot{x}^2.$$

Аналогічно, для координат вектора $\bar{y}$ маємо $(Y^{B})^T = C\,(\dot{Y}^{B})^T$ або $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 \end{pmatrix}$.

Звідки

$$y^1 = \dot{y}^1 - 2\dot{y}^2,$$
$$y^2 = -\dot{y}^1 + 3\dot{y}^2,$$

Для кординат вектора $\bar{z}$ маємо $(Z_H)^T = D\,(\dot{Z}_H)^T$ або $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}$.

Звідки

$$z_1 = 3\dot{z}_1 + \dot{z}_2,$$
$$z_2 = 2\dot{z}_1 + \dot{z}_2.$$

Підставляючи координати векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ в полілінійну форму, маємо:

$$A(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (\dot{x}^1 - 2\dot{x}^2)(-\dot{y}^1 + 3\dot{y}^2)(2\dot{z}_1 + \dot{z}_2) - 4(-\dot{x}^1 + 3\dot{x}^2)(\dot{y}^1 - 2\dot{y}^2)(3\dot{z}_1 + \dot{z}_2) =$$
$$= (-\dot{x}^1\dot{y}^1 + 3\dot{x}^1\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2\dot{y}^1 - 6\dot{x}^2\dot{y}^2)(2\dot{z}_1 + \dot{z}_2) - 4(-\dot{x}^1\dot{y}^1 + 2\dot{x}^1\dot{y}^2 + 3\dot{x}^2\dot{y}^1 - 6\dot{x}^2\dot{y}^2)(3\dot{z}_1 + \dot{z}_2) =$$
$$= -2\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 + 6\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 + 4\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 - 12\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 - \dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 + 3\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 + 2\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 - 6\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2 +$$
$$+ 12\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 - 24\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 - 36\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 + 72\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 + 4\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 - 8\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 - 12\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 + 24\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2 =$$
$$= 10\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 - 18\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 - 32\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 + 60\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 + 3\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 - 5\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 - 10\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 + 18\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2.$$

Задача 2. Дано тензор *B* рангу 1 типу (1, 0) в базисі e_H простору E_4: $B_{e_H} = \{b_i\} = (1,3,-2,4)$. Знайти тензор λB, якщо $\lambda = -3$.

Розв'язок. Добутком тензора $B_{e_H} = \{b_i\}$ на число $\lambda = -3$ буде тензор $(\lambda B)_{e_H} = \{\lambda b_i\} = (-3\cdot 1;\ -3\cdot 3;\ -3\cdot(-2);\ -3\cdot 4) = (-3;\ -9;\ 6;\ -12).$

Задача 3. Дано два тензори *A* і *B* типу (2, 0) в базисі e_H простору E_3

$$A_{e_H} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_{e_H} = \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти суму та різницю цих тензорів.

Розв'язок. Сума тензорів

$$(A+B)_{e_H} = C_{e_H} = \{c_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & 3+5 & 2+1 \\ -1+1 & 0+(-3) & 1+2 \\ 2+1 & 4+3 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Різниця тензорів

$$(A-B)_{e_H} = D_{e_H} = \{d_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1-(-4) & 3-5 & 2-1 \\ -1-1 & 0-(-3) & 1-2 \\ 2-1 & 4-3 & 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Дано тензор *A* рангу 1 типу (0, 1): $A_{e_H} = \{a^i\} = (1,2,3)$ та тензор *B* рангу 2 типу (2, 0): $B_{e_H} = \{b_{jk}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в базисі e_H простору E_3. Знайти тензор *AB*.

Розв'язок. Результатом множення цих тензорів буде тензор *C=AB* рангу 1+2=3. Кількість координат тензора $C_{e_H} = \{c^i_{jk}\}$ дорівнюватиме 3^3=27. Їх можна записати у вигляді тривимірної матриці: тобто у вигляді трьох квадратних матриць розміром 3×3, накладених послідовно одна на одну.

Складемо матриці:

$$\left\{c_{jk}^{1}\right\}=\left\{a^{1}b_{jk}\right\}=1\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$\left\{c_{jk}^{2}\right\}=\left\{a^{2}b_{jk}\right\}=2\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & 6 & 2\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix},$$

$$\left\{c_{jk}^{3}\right\}=\left\{a^{3}b_{jk}\right\}=3\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 6 & 9 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Одержали 27 координат тензора $C_{e_H}=\left\{c_{jk}^{i}\right\}$, де i, j, k=1, 2, 3. Перший індекс i означає номер шару тривимірної матриці, другий j - номер рядка, третій k - номер стовпця.

Задача 5. Виконати операцію перестановки індексів тензора

$$A_{e_H}=\left\{a_{ij}\right\}=\begin{pmatrix}9 & 3 & 6\\ 7 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 15\end{pmatrix},$$

який є двічі коваріантним тензором рангу 2 в E_3.

Розв'язок. Для тензора A рангу два операція перестановки індексів призводить до нового тензора B рангу два, матриця координат якого буде транспонованою по відношенню до матриці координат початкового тензора, тобто

$$B_{e_H}=\left\{b_{ij}\right\}=\begin{pmatrix}9 & 7 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 6 & 3 & 15\end{pmatrix},$$

де $b_{ij}=a_{ji}$.

Задача 6. Дано тензор $A_{e_H}=\left\{a_{ijk}^{lm}\right\}$ типу (3, 2) в базисі e_H простору E_3. Згорнути цей тензор парами індексів m, k та l, j.

Розв'язок. Покладемо $k=m$. Одержимо тензор $B_{e_H}=\left\{b_{ij}^{l}\right\}=\left\{a_{ijm}^{lm}\right\}$, де $b_{ij}^{l}=a_{ijm}^{lm}=a_{ij1}^{l1}+a_{ij2}^{l2}+a_{ij3}^{l3}$.

Тензор B_{e_H} є тензором рангу 3.

Згорнемо його ще раз, поклавши $j=l$. Маємо

$$C_{e_H}=\left\{c_i\right\}=\left\{b_{il}^{l}\right\},\ \text{де}\ c_i=b_{il}^{l}=b_{i1}^{1}+b_{i2}^{2}+b_{i3}^{3}.$$

Тензор $C_{e_H}=\left\{c_i\right\}$ є тензором типу (1, 0).

Задача 7. Згорнути тензор

$$C_{e_H} = \left\{c_i^j\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

типу (1, 1) в базисі e_H простору E_3.

Розв'язок. Покладемо $i=j$. Одержим тензор

$$D_{e_H} = \left\{c_j^j\right\} = c_j^j = c_1^1 + c_2^2 + c_3^3 = 1 + 4 + 2 = 7,$$

який є тензором рангу нуль.

Задача 8. Дано тричі коваріантний тензор $A_{e_H} = \left\{a_{ijk}\right\}$ рангу 3 в евклідовому просторі E_n. Перейти до тричі контраваріантного тензора $B_{e_H} = \left\{b^{ijk}\right\}$ рангу 3 за допомогою операції підняття індексів, якщо взаємний метричний тензор $G_{e_H}^{-1} = \left\{g^{mk}\right\}$ відомий.

Розв'язок. Піднімемо у тензора $A_{e_H} = \left\{a_{ijk}\right\}$ спочатку третій індекс k. Для цього помножимо його на взаємний метричний тензор $G_{e_H}^{-1} = \left\{g^{mk}\right\}$ та згорнемо за індексом k, тобто

$$\left\{g^{mk} a_{ijk}\right\} = \left\{c_{ij}^m\right\}.$$

Діючи аналогічно піднімемо другий індекс j

$$\left\{g^{sj} a_{ij}^m\right\} = \left\{d_i^{sm}\right\}.$$

І, нарешті,

$$B_{e_H} = \left\{b^{lsm}\right\} = \left\{g^{li} a_i^{sm}\right\}.$$

Задачі для розв'язування

1101. В деякому базисі e_H простору E_2 дано трилінійну форму $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 5x^1 y_2 z_2$ з коефіцієнтами типу (1, 2) (один раз коваріантними та двічі контраваріантними) і матрицю $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$.
   а) знайти коефіцієнти $\dot{a}_{ij}^k$ трилінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ в новому базисі, користуючись формулами (9.12) перетворення коефіцієнтів;
   б) визначити вигляд трилінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ в новому базисі $\dot{e}_H$ безпосередньою підстановкою формул перетворення координат векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

1102. В деякому базисі e_H евклідового простору E_2 задано трилінійну форму $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 2x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1$ з коефіцієнтами типу (0, 3).

Визначити а) коефіцієнти $\dot{a}^{ijk}$ трилінійної форми $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ в новому базисі $\dot{e}_H$ за допомогою формул (9.12) перетворення коефіцієнтів, якщо $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ - матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$; б) переконатися в правильності знаходження коефіцієнтів безпосередньою підстановкою в трилінійну форму формул перетворення координат векторів $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ при переході до нового базису.

1103. Знайти добуток один раз контраваріантного тензора $C_{e_H}=\{c^i\}=(-1{,}5{,}0)$ на дійсне число $\lambda=5$.

1104. Знайти тензор $C=\lambda D$, якщо

$$D_{e_H}=\{d_i^j\}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\\ 5 & 7 & -1\end{pmatrix};\qquad \lambda=-2.$$

1105. Довести, що якщо $A_{e_H}=\{a_{ij}^k\}$ та $B_{e_H}=\{b_{ij}^k\}$ є тензорами рангу три типу (2, 1), то і $C=C_{e_H}=\{c_{ij}^k\}=A+B$ є тензором рангу три типу (2, 1).

1106. Чи можна додавати тензори таких видів:

а) $A_{e_H}=\{a^{ik}\}$ та $B_{e_H}=\{b^{ik}\}$; б) $A_{e_H}=\{a_{ijk}\}$ та $B_{e_H}=\{b_{jk}^i\}$;

в) $C_{e_H}=\{c_{ijk}\}$ та $D_{e_H}=\{d^{ijk}\}$; г) $C_{e_H}=\{c_{ijk}^l\}$ та $D_{e_H}=\{d_{ijk}^l\}$.

1107. Тензори A та B рангу 2 типу (0,2) задані координатами в одному і тому ж базисі e_H простору E_3

$$A_{e_H}=\{a^{ij}\}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -7\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad B_{e_H}=\{b^{ij}\}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

Знайти суму та різницю цих тензорів.

1108. Тензори A та B рангу 2 (один раз коваріантні та один раз контраваріантні) задані координатами в одному і тому ж базисі e_H простору E_3

$$A_{e_H}=\{a_i^j\}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad B_{e_H}=\{b_i^j\}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Знайти суму та різницю цих тензорів.

1109. Дано два тензори рангу один: $A_{e_H} = \{a_i\} = (1,2,-1)$ та $B_{e_H} = \{b_j\} = (2,4,1)$. Знайти тензор *AB*.

1110. Дано два тензори рангу один: $C_{e_H} = \{c^i\} = (4,2,-1)$ та $D_{e_H} = \{d^i\} = (1,3,-1)$. Знайти тензори *CD* та *DC*.

1111. Знайти тензор *P=FQ*, якщо $F_{e_H} = \{f^i\} = (1,-1,2)$, $Q_{e_H} = \{q_j^k\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1112. Записати координати тензора *C=AB*, якщо $A_{e_H} = \{a^{ij}\} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_{e_H} = \{b_k\} = (-1,2,3)$.

1113. Виконати операцію перестановки індексів один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора $C_{e_H} = \{c_k^l\} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 11 & 6 & 18 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1114. Виконати операцію перестановки індексів для двічі контраваріантного тензора $B_{e_H} = \{b^{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 10 \\ 3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

1115. Згорнути тензор $A_{e_H} = \{a_k^l\} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 12 & 7 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

1116. Згорнути тензор $B_{e_H} = \{b_i^j\} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ -1 & 13 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1117. Згорнути тензор *C*, одержаний в результаті добутку двічі коваріантного тензора $A_{e_H} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ та один раз контраваріантного тензора $B_{e_H} = \{b^k\} = (1,2,4)$ по індексам *j* та *k*.

1118. Згорнути тензор $P_{e_H} = \{p_i^{jk}\}$ один раз коваріантний та двічі контраваріантний, одержаний в результаті добутку контраваріантного тензора $Q_{e_H} = \{q^k\} = (-1,2,5)$ рангу один і один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора $R_{e_H} = \{r_i^j\} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ рангу два по індексам i та k.

1119. Довести, що координати тензорів A і B в (9.14) є коефіцієнтами типів (p,q) і $(p\text{-}1,q+1)$ однієї і тієї же полілінійної форми степеня $k=p+q$ в E_n.

1120. Довести, що координати тензорів A і C в (9.15) є коефіцієнтами типів (p,q) і $(p+1,q\text{-}1)$ однієї і тієї ж полілінійної форми степеня $k=p+q$ в E_n.

1121. Опустити верхній індекс у тензора $B_{e_H} = \{b_{lm}^k\}$ рангу 3 типу (2, 1) в E_n, якщо метричний тензор G простору E_n відомий.

1122. Опустити верхні індекси у тензора $C_{e_H} = \{c_m^{kl}\}$ (один раз коваріантного та двічі контраваріантного) в E_n, якщо метричний тензор G простору E_n відомий.

1123. Знайти тензор рангу 2 типу (1,1), який одержується, якщо у метричного тензора $G_{e_H} = \{g_{ij}\}$ в E_n підняти один з нижніх індексів.

1124. Знайти тензор рангу 2 типу (1,1), який одержується, якщо у взаємного метричного тензора $G_{e_H}^{-1} = \{g^{ij}\}$ в E_n опустити один з верхніх індексів.

1125. Знайти повну згортку $g_{ij}g^{ij}$ метричних тензорів евклідового простору E_n.